Modelação Numérica 2017

Aula 2, 15/Fev

- Discretização.
- Teorema da amostragem.
- Série de Fourier

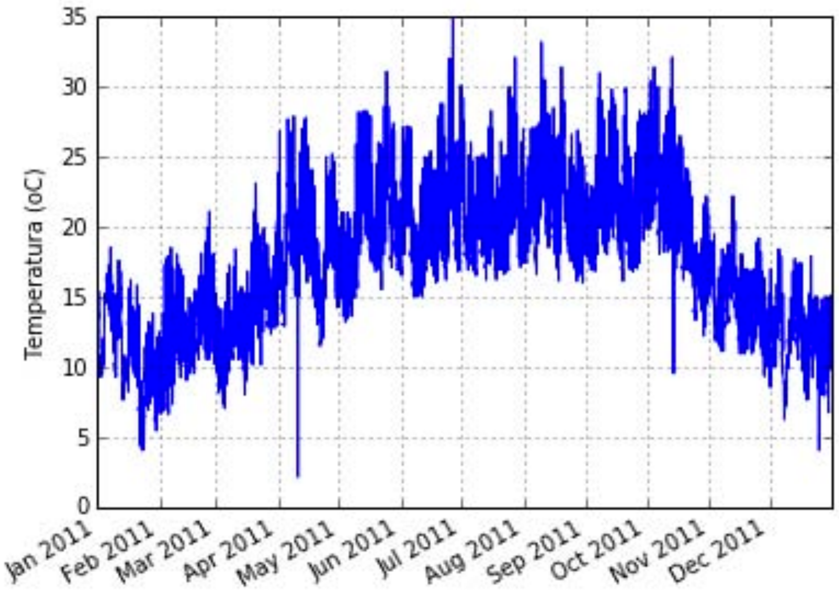
http://modnum.ucs.ciencias.ulisboa.pt

Sistemas contínuos vs discretos

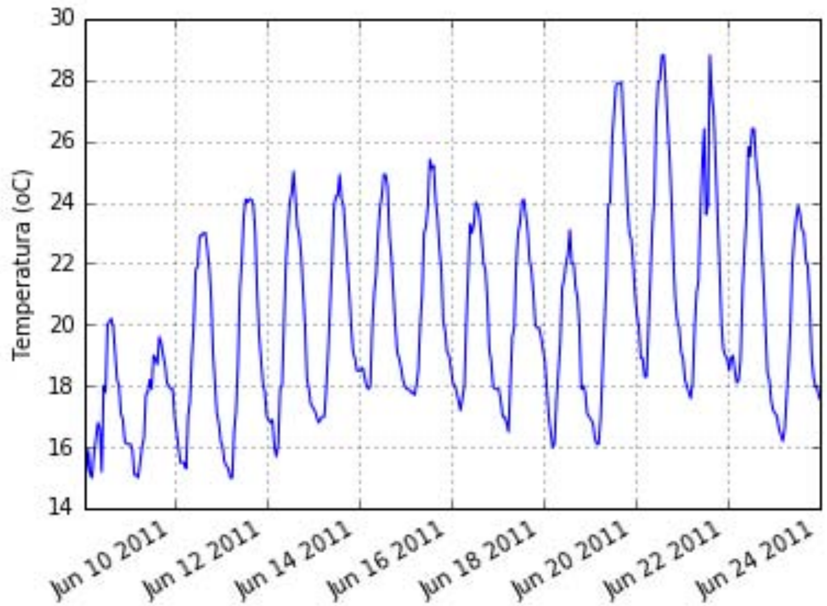
- A modelação analógica analisa sistemas "contínuos", sujeitos a leis macroscópicas (termodinâmica, mecânica dos meios contínuos, ...).
- A modelação numérica processa números computáveis, i.e. números discretos (inteiros ou pseudo-reais, e.g. floating point).
- A discretização implica perda de graus de liberdade (uma simplificação...).
- Como medir o impacto da discretização?

Exemplo: Temperatura em Lisboa

Um ano

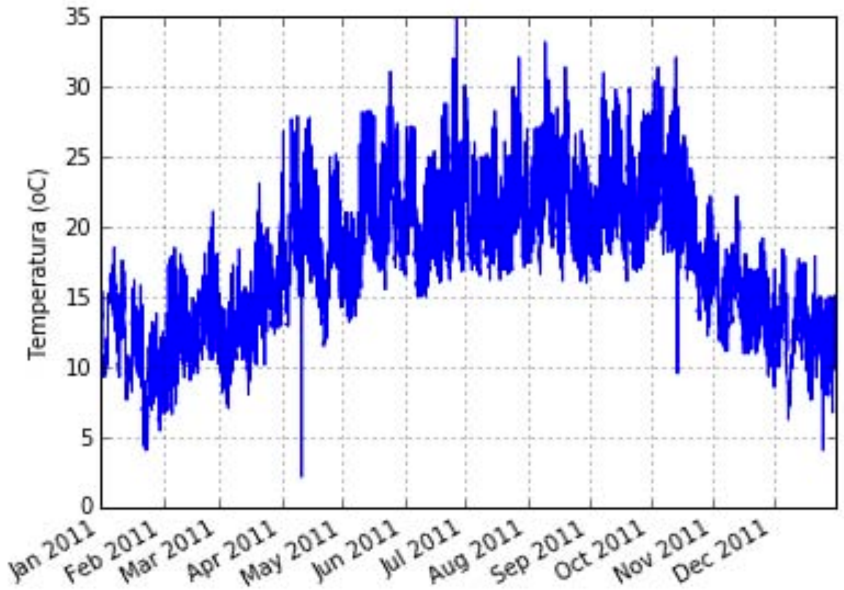


Duas semanas

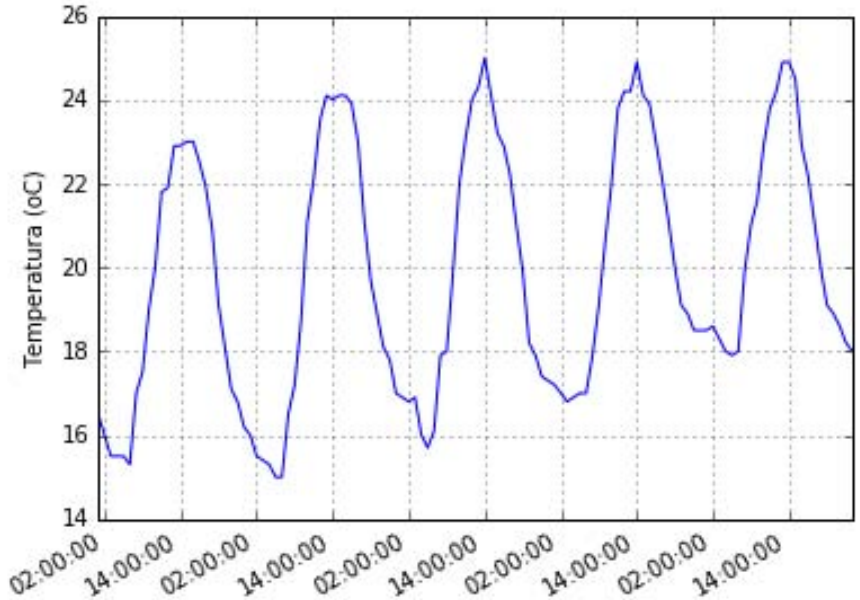


Exemplo: Temperatura em Lisboa

Um ano

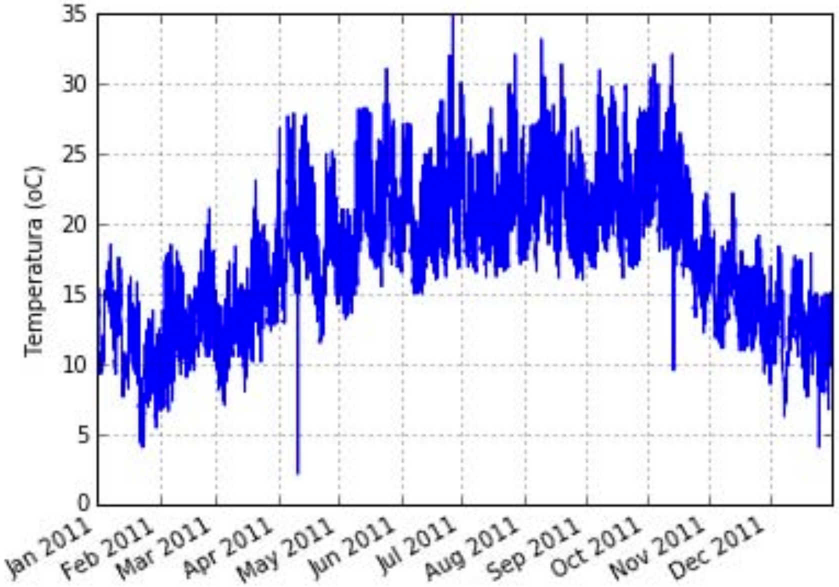


Cinco dias

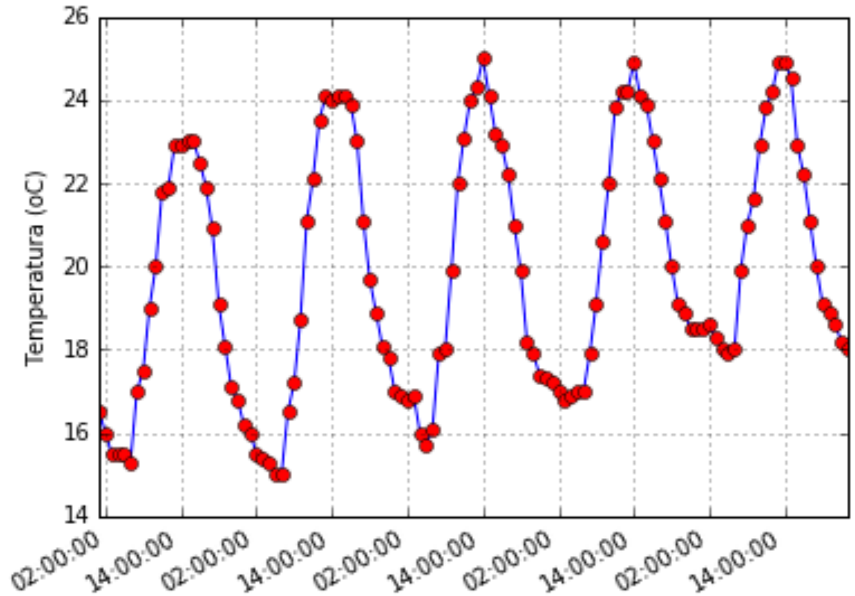


Exemplo: Temperatura em Lisboa

Um ano



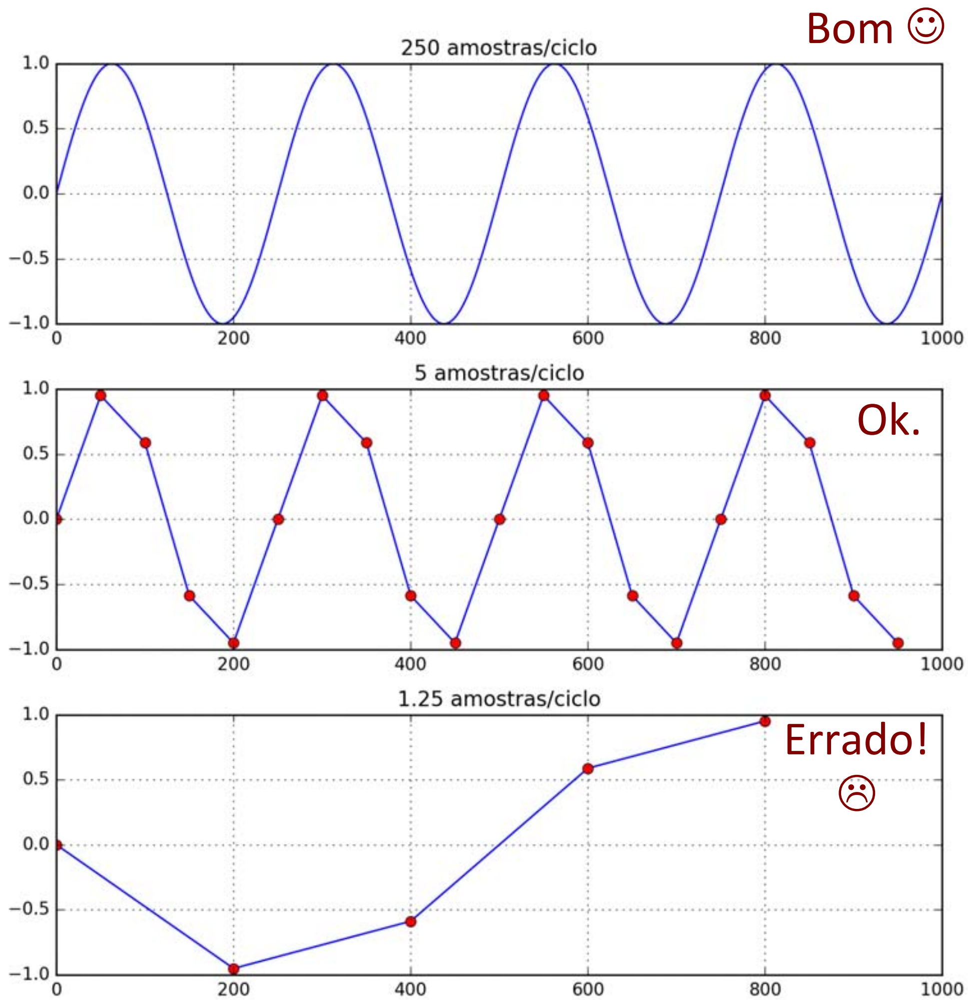
Cinco dias



- Observações horárias são suficientes para descrever os “ciclos” diurno e annual.
- Não dizem nada sobre flutuações muito rápidas (sub-horárias).

Discretização de um seno

```
t=np.arange(0.,1000.,1.)
T=250.
y=np.sin(2*math.pi * t/T)

plt.close(); plt.subplot(3,1,1)
plt.plot(t, y)
plt.title('250 amostras/ciclo')
plt.grid(); plt.xlim([0,1000])

#%%
dt=50
t2=t[0:len(t):dt];
y2=y[0:len(t):dt];

plt.subplot(3,1,2)
plt.plot(t2, y2, '-bo', markerfacecolor='red')
plt.title('5 amostras/ciclo')
plt.grid(); plt.xlim([0,1000])

#%%
dt=200
t3=t[0:len(t):dt];
y3=y[0:len(t):dt];

plt.subplot(3,1,3)
plt.plot(t3, y3, '-bo', markerfacecolor='red')
plt.title('1.25 amostras/ciclo')
plt.grid(); plt.xlim([0,1000])
```



Aliasing: uma oscilação rápida mal amostrada é vista como uma oscilação lenta.

Teorema da amostragem

- Um sinal contínuo será mal representado se for amostrado a uma taxa inferior a 2 amostras por cada uma das oscilações mais rápidas presentes no sinal.

  Frequência de Nyquist:

$$f_{Nyquist} = \frac{1}{2\Delta t}$$

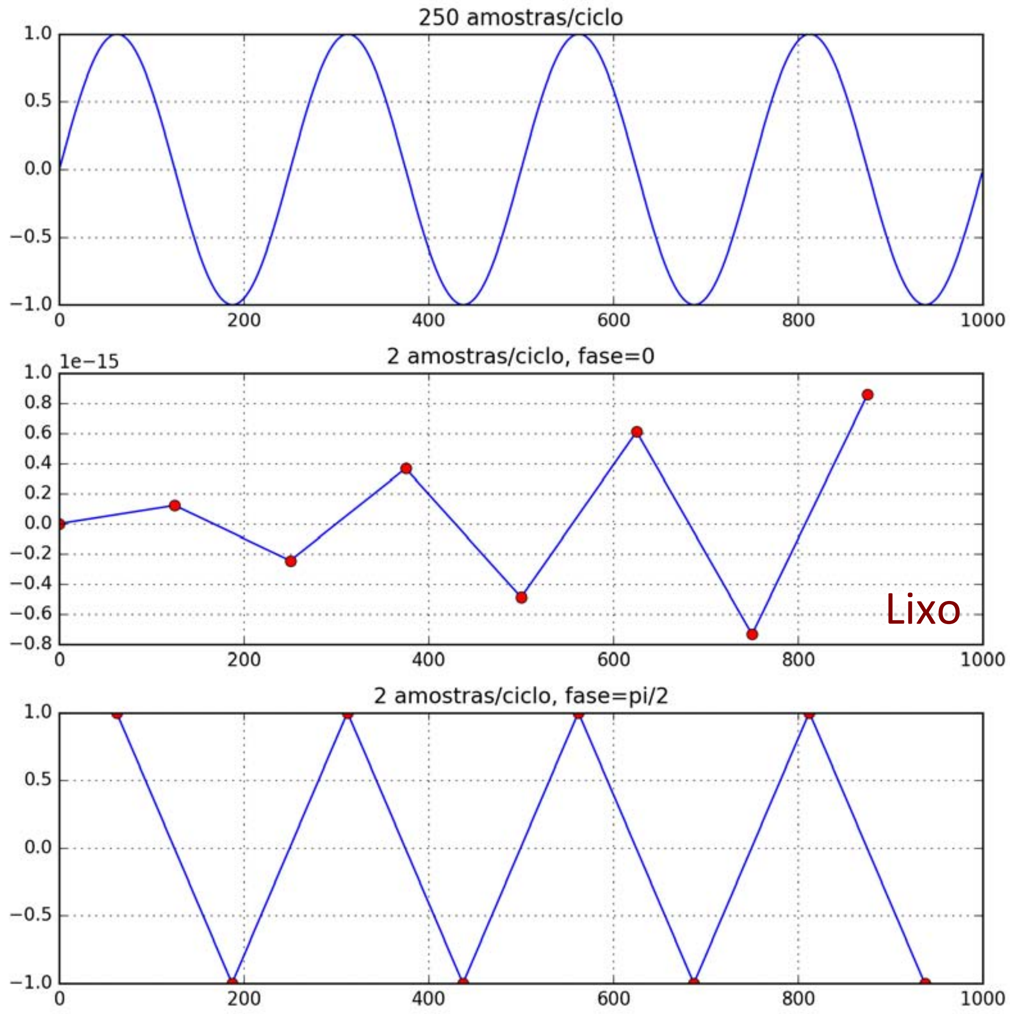
- Para observarmos uma frequência máxima $f_{Nyquist}$ temos de amostrar a série com um intervalo de amostragem mínimo Δt.

- Nota: estamos a admitir que o processo de amostragem é regular, i.e. feito a intervalos regularmente espaçados.

- No limite de 2 amostras por ciclo, haverá problemas… É preciso mais.

Amostragem no limite (2 amostras/ciclo)

```
t=np.arange(0.,1000.,1.)
T=250.
y=np.sin(2*math.pi * t/T)

plt.close(); plt.subplot(3,1,1)
plt.plot(t, y)
plt.title('250 amostras/ciclo')
plt.grid(); plt.xlim([0,1000])

#%%
dt=125
t2=t[0:len(t):dt];
y2=y[0:len(t):dt];

plt.subplot(3,1,2)
plt.plot(t2, y2, '-bo', markerfacecolor='red')
plt.title('2 amostras/ciclo, fase=0')
plt.grid(); plt.xlim([0,1000])

#%%
dt=125
t3=t[62:len(t):dt];
y3=y[62:len(t):dt];

plt.subplot(3,1,3)
plt.plot(t3, y3, '-bo', markerfacecolor='red')
plt.title('2 amostras/ciclo, fase=pi/2')
plt.grid(); plt.xlim([0,1000])
```



Características da digitalização

- Intervalo de amostragem (constante):

  < metade do período (tempo)

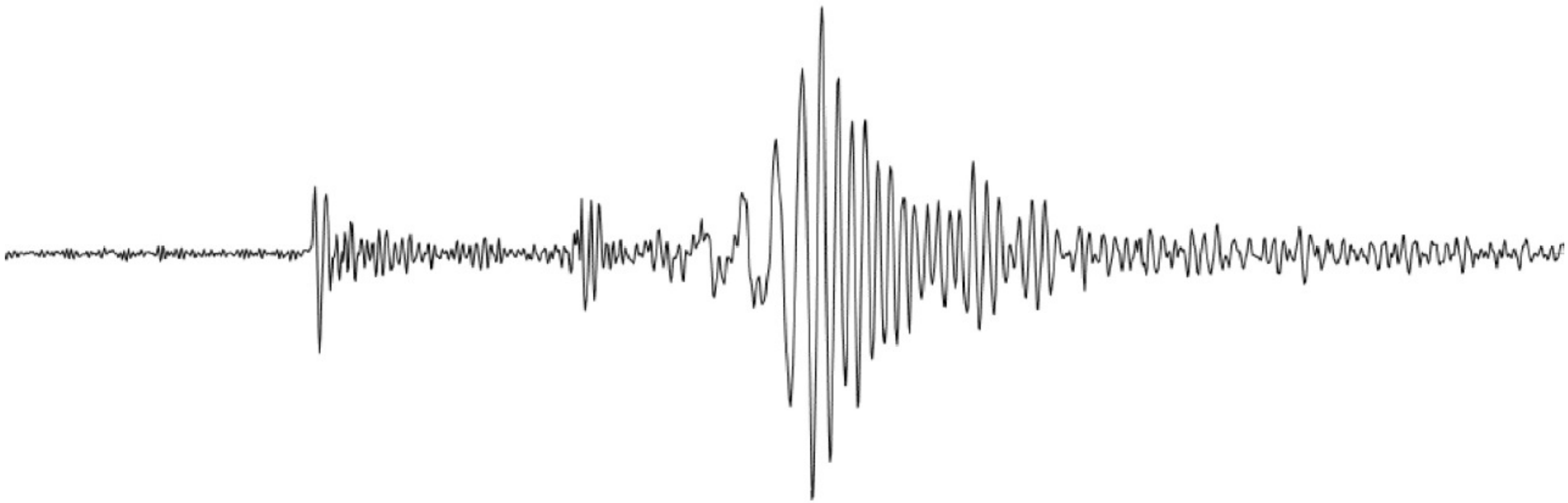
  < metade comprimento de onda (espaço)

- Fase de amostragem: localização da primeira amostra

- Truncatura: dimensão da amostra (número de pontos)

- Erro de arredondamento: precisão da representação de números "reais" (DOUBLE)

O que fazer com funções não-periódicas?



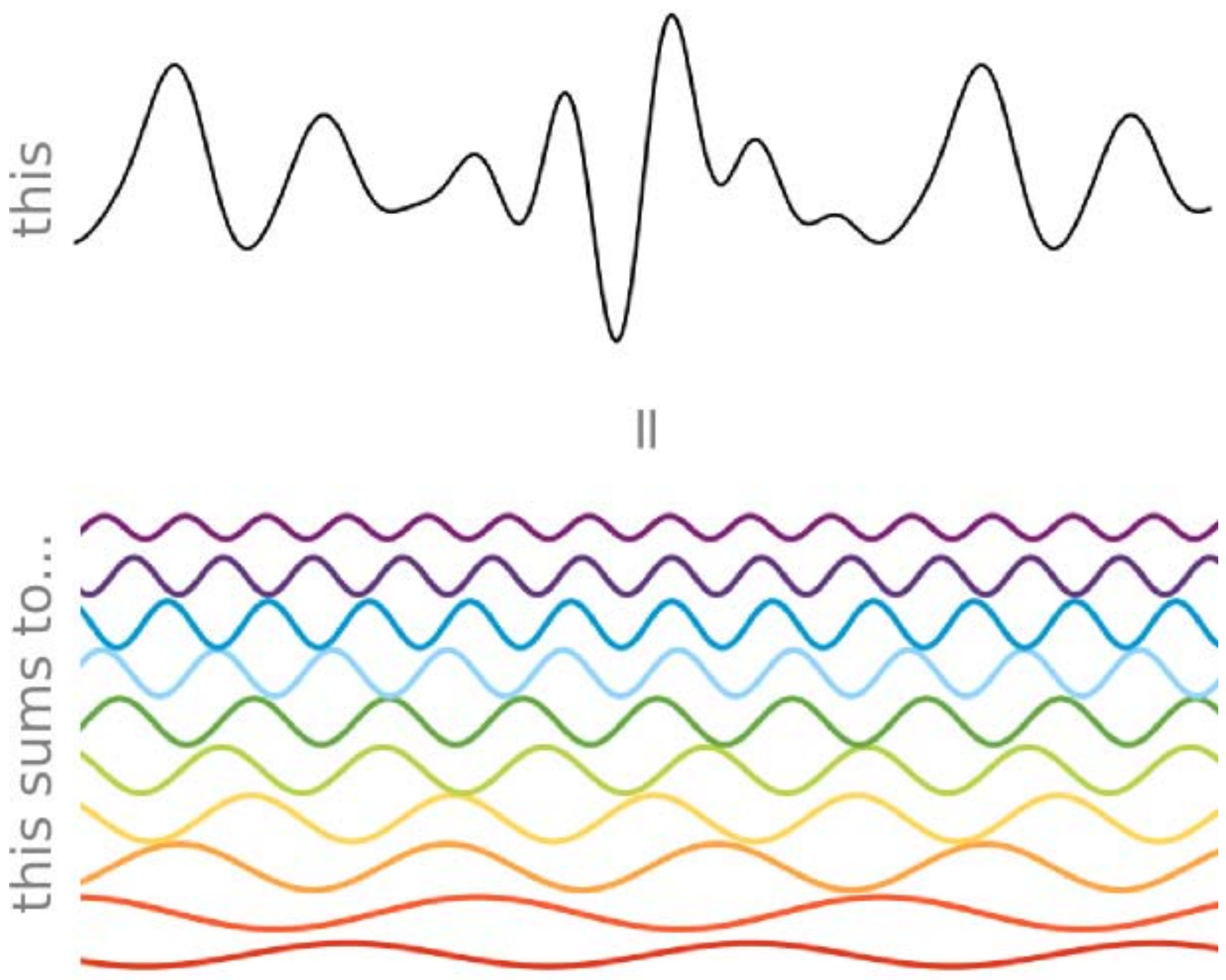
Generalização a qualquer função (não senos)

- O teorema de Fourier permite utilizar a análise anterior com um universo alargado de funções "bem comportadas".
- Qualquer função periódica pode ser representada como uma série de Fourier, i.e.:

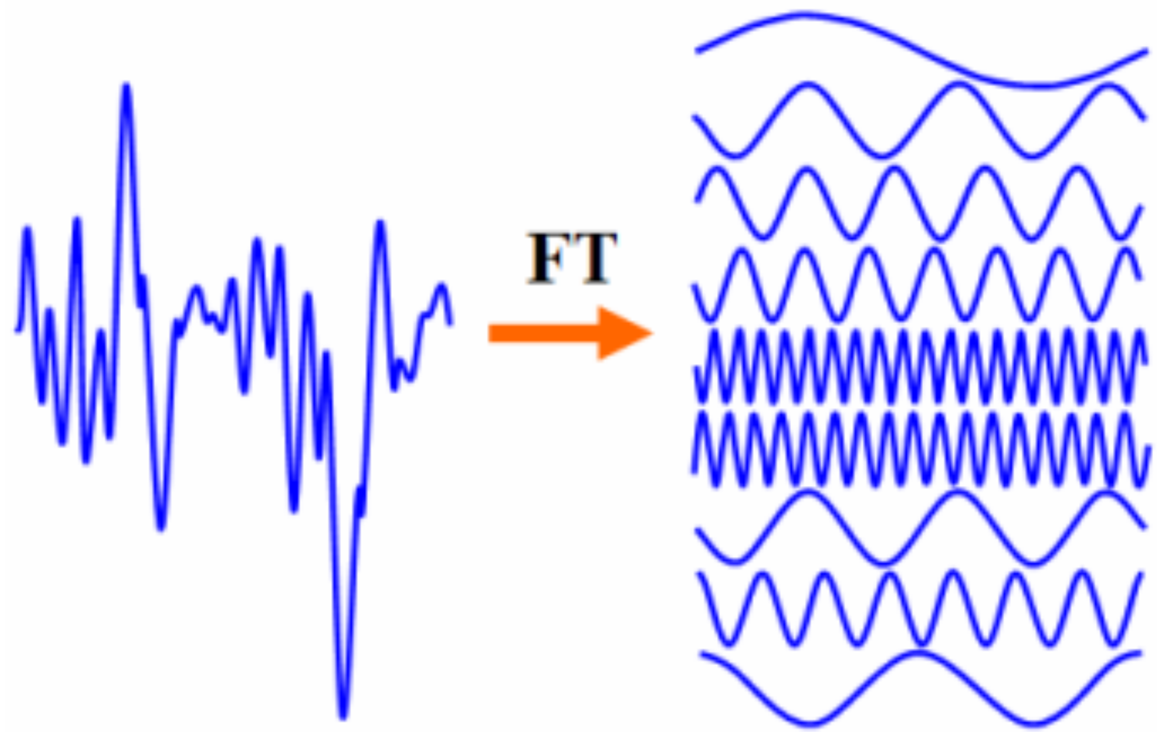
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

- Trata-se de uma série infinita. A função é obtida pela soma de senos e cossenos, com períodos que são submúltiplos do período fundamental T (frequências múltiplas da frequência fundamental). Cada componente da série é designado por harmónica (analogia musical).

Generalização a qualquer função (não senos)



Generalização a qualquer função (não senos)



Série de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k t}{T} + b_k \sin \frac{2\pi k t}{T} \right) =$$

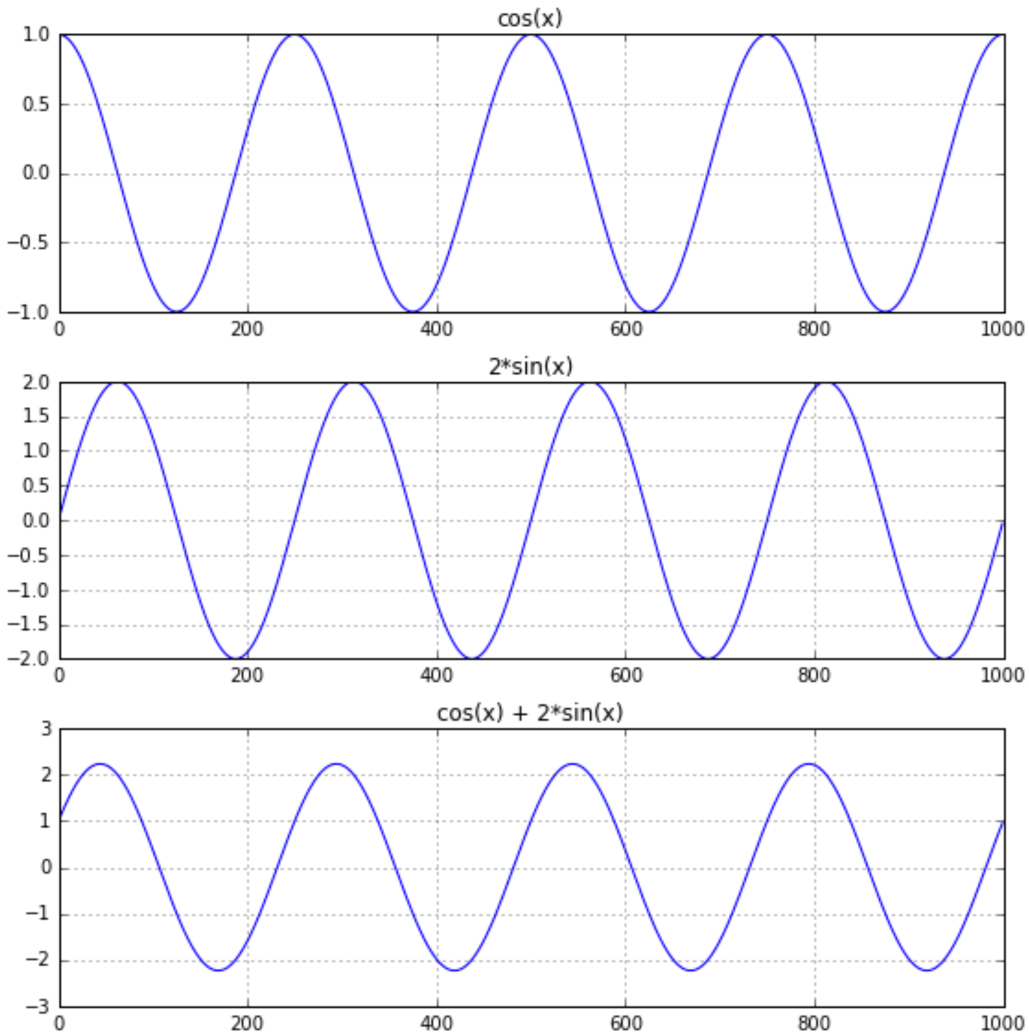
$$= \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi t}{T} \right) + \left(a_2 \cos \frac{2\pi t}{T/2} + b_2 \sin \frac{2\pi t}{T/2} \right) + \ldots$$

Primeira harmónica:

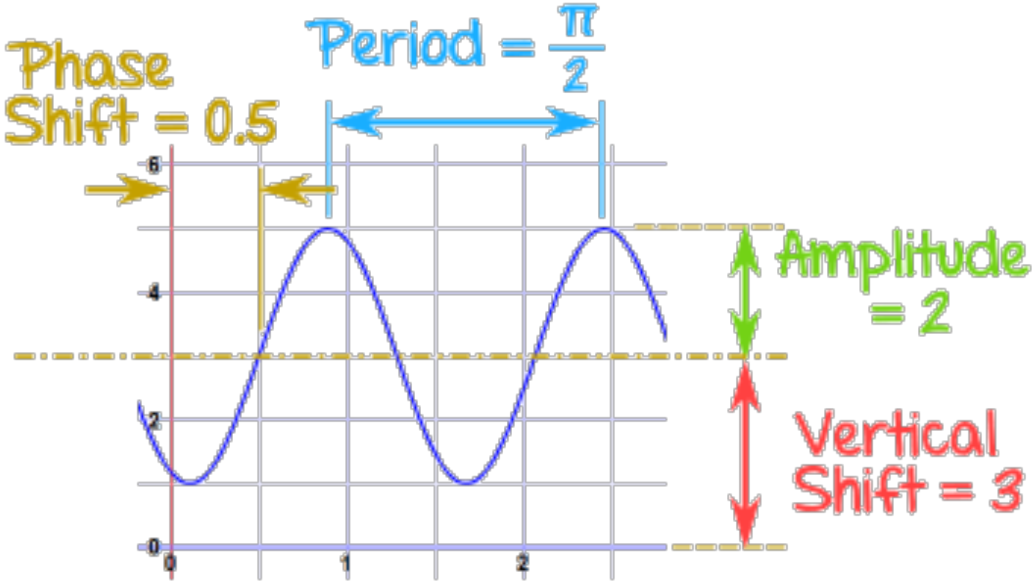
$$a_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi t}{T} = A \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \phi \right)$$

Série de Fourier

```
t=np.arange(0.,1000.,1.)
T=250.
y1=np.cos(2*math.pi * t/T)
y2=2*np.sin(2*math.pi * t/T)
y3=y1+y2

plt.close(); plt.subplot(3,1,1)
plt.plot(t, y1)
plt.title('cos(x)')

plt.subplot(3,1,2)
plt.plot(t, y2)
plt.title('2*sin(x)')

plt.subplot(3,1,3)
plt.plot(t, y3)
plt.title('cos(x) + 2*sin(x)')

for i in range(3):
    plt.subplot(3,1,i+1)
    plt.grid(); plt.xlim([0,1000])
plt.tight_layout()
```



Série de Fourier

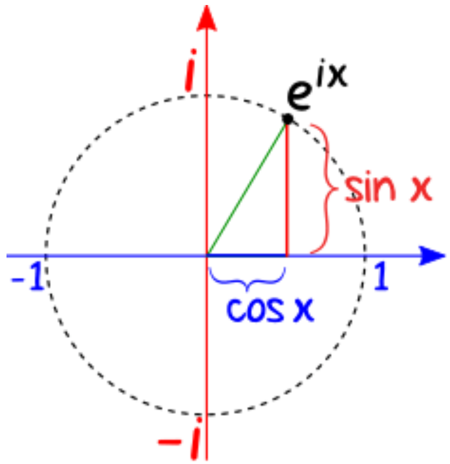


- Φ: Fase inicial
- A: Amplitude
- T: Período; Frequência f=1/T; Frequência angular: $\omega=2\pi f = 2\pi/T$

Forma complexa da série de Fourier

Fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



Forma complexa da série de Fourier

Fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\cos\frac{2\pi kt}{T} = \frac{e^{i2\pi kt/T} + e^{-i2\pi kt/T}}{2}$$

$$\sin\frac{2\pi kt}{T} = \frac{e^{i2\pi kt/T} - e^{-i2\pi kt/T}}{2i}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k\sin\frac{2\pi kt}{T}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k - ib_k}{2}e^{i2\pi kt/T} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k + ib_k}{2}e^{-i2\pi kt/T} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kt/T}$$

Os coeficientes de Fourier são complexos

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kt}{T}\right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k - ib_k}{2}e^{i2\pi kt/T} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k + ib_k}{2}e^{i2\pi kt/T} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kt/T} \end{aligned}$$