

**Ciências
ULisboa**

Faculdade
de Ciências
da Universidade
de Lisboa

CARTOGRAFIA

Sebenta de apoio às aulas teóricas da disciplina de Cartografia

2016/2017

Licenciatura em Engenharia Geoespacial

Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia

Índice

Chapter 1 Introdução	1-1
1.1. O problema básico da representação cartográfica	1-1
1.2. Objectivos e métodos de representação	1-2
1.3 Classificação das projecções cartográficas.....	1-3
1.3.1. O problema extrínseco	1-4
1.3.2. O problema intrínseco.....	1-6
1.3.3. O esquema de classificação.....	1-6
Chapter 2 Definições, notação e dimensões.....	2-1
2.1. Definições e notação	2-1
2.1.1. Representação matemática da forma da terra	2-1
2.1.2. Definições e notação no elipsóide e na esfera.....	2-2
2.2. Linhas com propriedades especiais.....	2-4
2.2.1. A geodésica, o círculo máximo e a ortodrómica	2-5
2.2.2. A loxodrómica.....	2-6
Chapter 3 Fórmula geral da transformação. A teoria das distorções	3-1
3.1. Fórmula geral da transformação. Condições de unicidade, reversibilidade e correspondência entre curvas paramétricas.....	3-1
3.2. Geometria diferencial elementar. A matriz de transformação.....	3-2
3.2.1. Elemento linear e expressões angulares.....	3-2
3.2.2. A matriz de transformação fundamental. O determinante do jacobiano	3-5
3.3. Outros conceitos	3-7
3.3.1. A deformação linear. Condições de conformidade e de equivalência.....	3-7
3.3.2. Coeficientes superficiais de Gauss no elipsóide, na esfera e no plano. Coordenadas isométricas	3-8
3.4. A teoria das distorções das distâncias, ângulos e áreas.....	3-12
3.4.1. Pares ortogonais correspondentes	3-12
3.4.2. A deformação linear	3-12
3.4.3. A deformação linear sobre curvas paramétricas	3-13
3.4.4. A deformação angular	3-14
3.4.5. A deformação linear correspondente à deformação angular máxima	3-16
3.4.6. A deformação areal	3-16
3.5. A indicatriz de Tissot.....	3-16

3.5.1. A teoria da indicatriz	3-16
3.5.2. A indicatriz na prática	3-18
Chapter 4 Projecções equivalentes	4-1
4.1. Considerações gerais	4-1
4.1.1. Introdução	4-1
4.1.2. A deformação linear	4-1
4.2. Projecções equivalentes do elipsóide sobre o plano	4-4
4.3. A projecção pseudo-cónica equivalente de Bonne	4-5
4.3.1. Introdução	4-5
4.3.2. A projecção de Bonne.	4-6
4.3.2. Interpretação geométrica da projecção de Bonne	4-12
Chapter 5 Projecções conformes ou isogónicas.....	5-1
5.1. Considerações gerais.....	5-1
5.1.1. Introdução	5-1
5.1.2. Sistemas de coordenadas isométricas. A deformação linear.....	5-2
5.2. Projecção de Gauss	5-6
5.2.1. Introdução	5-6
5.2.2. Fórmulas de transformação directa	5-6
5.2.3. Fórmulas de transformação inversa.....	5-8
5.2.4. A deformação linear	5-10
5.2.5. Correção tangente à corda	5-11
5.2.6. Correção de redução dos comprimentos finitos	5-13
5.2.7. Convergência de meridianos.....	5-15
5.3. Projecção de Mercator	5-16
5.3.1. Introdução	5-16
5.3.2. Fórmulas de transformação directa	5-17
5.3.3. Fórmulas de transformação inversa.....	5-21
5.3.4. Correção tangente à corda	5-21
5.3.5. Correção de redução dos comprimentos finitos	5-23
5.3.6. Comprimento de um arco de loxodrómica	5-24

Chapter 1 Introdução

1.1. O problema básico da representação cartográfica

O problema básico da representação cartográfica consiste na representação de uma superfície curva numa superfície plana. A figura da terra é usualmente representada por um sólido de revolução, o elipsóide ou a esfera, o qual é considerado como a superfície de referência em relação à qual todos os pontos são relacionados. Estes pontos podem estar situados na superfície terrestre, na superfície dos oceanos e lagos ou abaixo dessas superfícies de água. Esta superfície de referência é a representação do nível médio do mar e a sua continuação sob as zonas mais elevadas ou sobre as zonas mais profundas da superfície terrestre. Tal afirmação não é necessariamente verdade dado que a figura da terra é, na realidade, representada por uma superfície equipotencial do campo gravítico terrestre, denominada por geóide, e como tal essa superfície é irregular, ou ondulatória, sendo impossível a sua representação por uma fórmula matemática rigorosa. Assume-se então que as superfícies de referência utilizadas para a superfície terrestre são o elipsóide e a esfera e, desta forma, o problema das projecções cartográficas resume-se à representação de uma superfície elipsoidal ou esférica numa superfície plana (Figura 1.1).

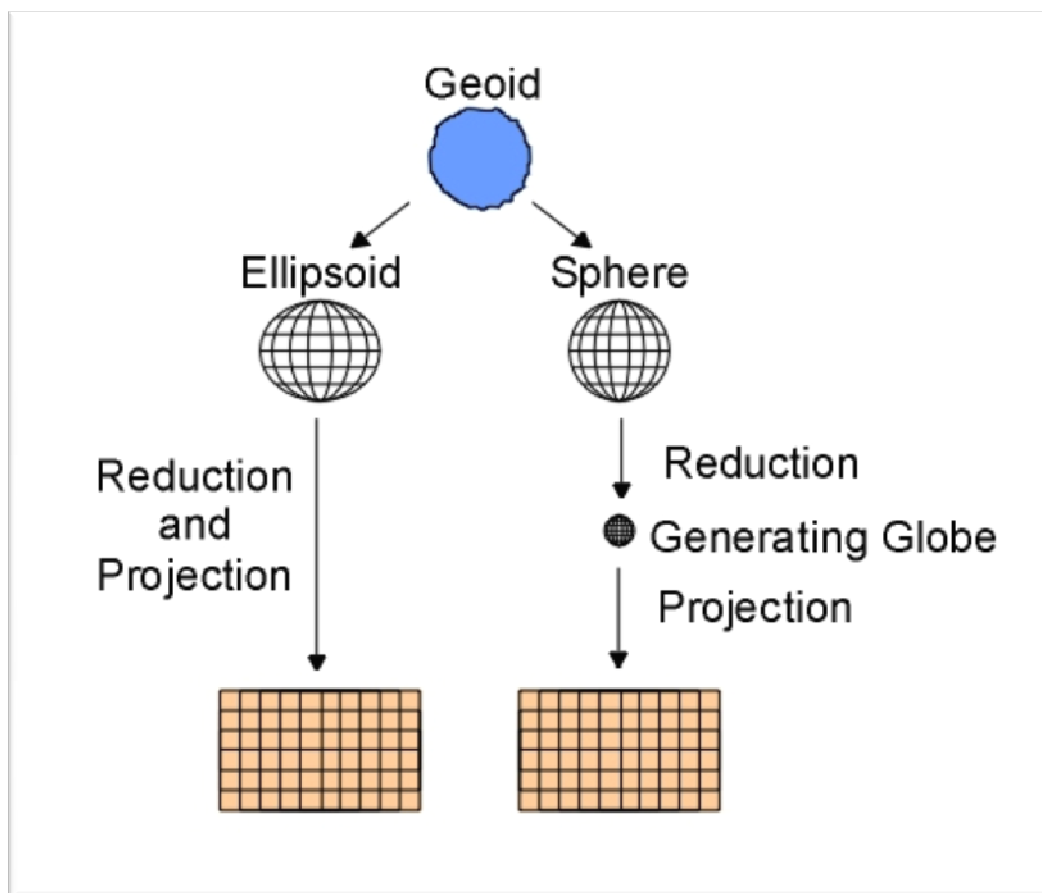


Figura 1.1 - Esquema de representação da superfície terrestre numa superfície plana.

A representação de uma superfície curva numa superfície plana apresenta as vantagens de ser muito mais fácil de produzir e de manusear um mapa plano do que um globo ou uma porção, reduzidos a uma determinada escala, da superfície terrestre e ainda de os cálculos matemáticos serem muito mais simples num plano do que num elipsóide ou esfera. No entanto, esta representação envolve distorções, sendo aplicadas diferentes técnicas de representação que possuam determinadas propriedades favoráveis a um propósito específico e considerando, ainda, a dimensão da área a ser representada. Esta técnica de representação é designada por projecção cartográfica.

1.2. Objectivos e métodos de representação

A representação da superfície terrestre numa superfície plana tem como principal objectivo a representação das posições de pontos discretos na superfície original num sistema de coordenadas planas e, conseqüentemente, o cálculo de distâncias e de ângulos entre esses pontos discretos.

É precisamente esta transformação da superfície da terra numa superfície plana a operação mais difícil de conseguir. No entanto, pode-se projectar a superfície física da terra, sobre um elipsóide de referência, por meio de projectantes normais ao elipsóide em cada um dos seus pontos (método de projecção de Helmert). Deste modo, cada um dos pontos da superfície terrestre fica definido por 3 coordenadas, a latitude ϕ (ângulo entre a normal do lugar e o plano do equador) e a longitude λ (ângulo entre o meridiano do lugar e o meridiano de referência, medido no plano do equador) das respectivas projecções sobre o elipsóide, e, pela altitude elipsoidal h .

Existem três critérios cartográficos que são aplicados para a avaliação das propriedades das projecções cartográficas:

- a) Equidistância – representação correcta das distâncias;
- b) Conformidade – representação correcta das formas;
- c) Equivalência – representação correcta das áreas.

Estes três critérios são básicos e mutuamente exclusivos, sendo do ponto de vista cartográfico, irrelevantes quaisquer outras características de uma dada projecção. Dado isto, de notar que não existe uma representação ideal, apenas a melhor representação para um determinado propósito.

Os métodos de projecção ou representação podem ser classificados como:

- a) Projecção directa do elipsóide na superfície de projecção;
- b) Dupla projecção envolvendo a transformação do elipsóide numa superfície esférica e posterior representação da superfície esférica na superfície de projecção.

Existem, então, dois tipos de superfícies *datum* – o elipsóide e a esfera – e três tipos de superfícies de projecção – o plano, o cone e o cilindro – sendo as duas últimas superfícies planificáveis (Figura 1.2).

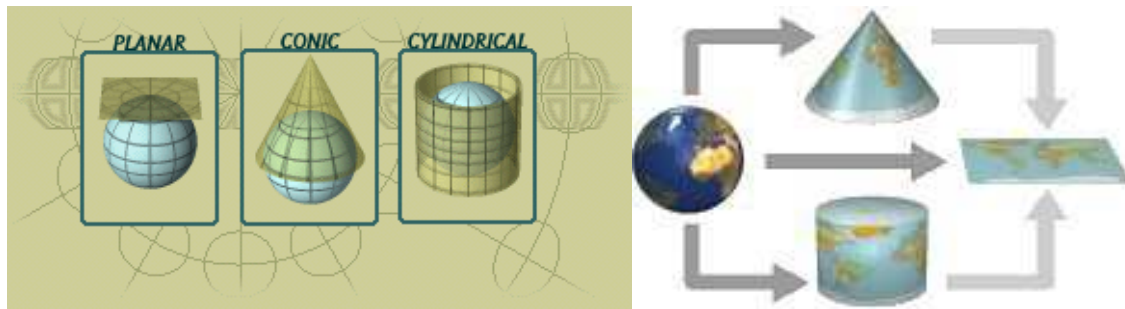


Figura 1.2. Classificação das projeções cartográficas segundo o critério da superfície de projecção.

A transformação da superfície datum na superfície projecção pode ser de natureza geométrica, semi-geométrica ou matemática (convencional). Muito poucas projeções são projeções verdadeiramente perspectivas em sentido geométrico.

É conveniente definir uma projecção cartográfica com um arranjo sistemático de linhas que se intersectam no plano, que representam e têm uma correspondência de um para um com os meridianos e paralelos da superfície datum. Este arranjo obedece a algum princípio consistente de modo a verificar determinadas condições pré-definidas. Cada conjunto de novas condições resulta numa projecção cartográfica diferente e, conseqüentemente, existe um número ilimitado de projeções cartográficas. Contudo, na prática, os três critérios cartográficos mencionados anteriormente – equidistância, conformidade e equivalência - são aplicados com um número limitado de outras condições resultando num número de cerca de duzentas projeções distintas criadas para fins específicos (Maling, 1968).

1.3 Classificação das projeções cartográficas

A classificação de projeções cartográficas deverá seguir um “standard” de modo que qualquer projecção (não convencional) possa ser descrita por um conjunto de critérios e inversamente um conjunto de critérios definirá uma qualquer projecção. Assim, um esquema de classificação deverá seguir um número de critérios subdivididos em classes e variedades conforme sugerido por Goussinsky (1951).

As classes podem ser consideradas de diferentes pontos de vista, sendo estes não mutuamente exclusivos. As variedades são as subdivisões de cada classe e são mutuamente exclusivas. Para facilitar o processo de construção de um esquema de classificação das projeções cartográficas composto por classes e variedades deverão ser consideradas determinados factores específicos:

- a) O objecto projectado ou a superfície datum;
- b) A superfície projecção na qual a superfície datum é projectada;
- c) A projecção ou a representação “per si”.

A superfície de projecção é considerada como o problema extrínseco e o processo de projecção ou representação como o problema intrínseco.

1.3.1. O problema extrínseco

Este problema considera as propriedades da superfície relativamente à superfície datum dando origem a três classes:

- I. Natureza : natureza da superfície projecção definida como a figura geométrica
- II. Coincidência : contacto da superfície projecção com a superfície datum
- III. Posição : alinhamento da superfície projecção em relação com a superfície datum.

Quanto à sua natureza, as projecções podem ainda ser dividida em três variedades, representando, cada uma, as superfícies básicas de projecção, nomeadamente o plano, o cone e o cilindro (Figura 1.3). A mais simples destas superfícies de projecção é o plano, que quando tangente à superfície datum tem um único ponto de contacto que corresponde ao centro da área de distorção mínima. O cone e o cilindro, que são ambos planificáveis, foram introduzidos com o objectivo de aumentar a zona de contacto e consequentemente a área de mínima distorção.

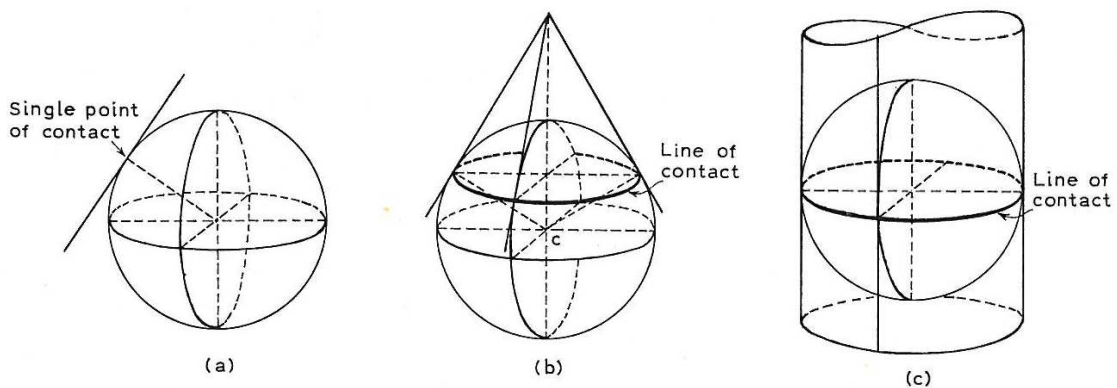


Figura 1.3. Classificação das projecções cartográficas quanto à natureza: a) plana, b) cónica e c) cilíndrica.

A classe coincidência pode ser dividida em três variedades representando os três tipos de coincidência entre a superfície datum e a superfície projecção, nomeadamente tangente, secante e polisuperficial (Figura 1.4). Verifica-se facilmente que a tangência entre a superfície datum e a superfície projecção resulta num ponto ou numa linha de contacto, o primeiro no caso da superfície projecção ser um plano e a segunda no caso da superfície ser um cilindro ou um cone. Para aumentar a área de contacto entre as duas superfícies, e consequentemente a área de distorção mínima, é introduzido o modo secante, resultando numa linha de contacto no caso em que a superfície é o plano e em duas linhas de contacto no caso do cilindro ou do cone. Para uma ainda maior área de contacto é introduzido o múltiplo contacto designado por polisuperficial. Neste caso uma série de planos sucessivos produzirá uma projecção poliédrica, uma sequência de cones produzirá uma projecção policónica e uma série de cilindros produzirá uma projecção policilíndrica.

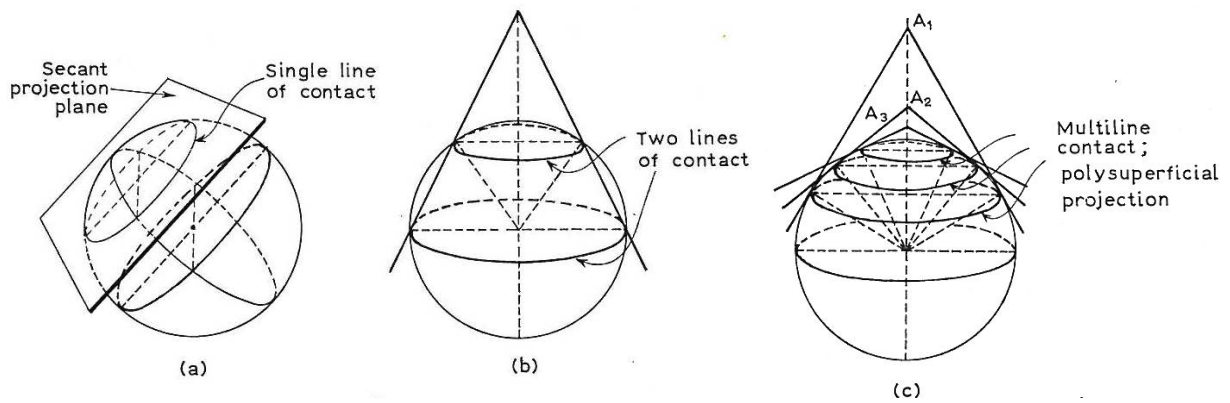


Figura 1.4. Classificação das projecções cartográficas quanto à coincidência: a) tangente, b) secante e c) polisuperficial.

Quanto à posição as projecções são subdivididas em três variedades representando as três posições básicas ou alinhamentos da superfície de projecção relativamente à superfície datum, nomeadamente, normal, transversa e oblíqua (Figura 1.5). Caso o propósito da projecção seja a representação de uma área limitada da superfície datum, é então vantajoso alcançar uma distorção mínima nessa área particular. Tal é possível através da variação da atitude da superfície de projecção. Se o eixo de simetria da superfície de projecção coincide com o eixo de rotação do elipsóide ou da esfera, temos uma projecção normal. Com o eixo de simetria perpendicular ao eixo de rotação, obtêm-se um projecção transversa e para qualquer outra atitude do eixo de simetria, obtêm-se uma projecção oblíqua.

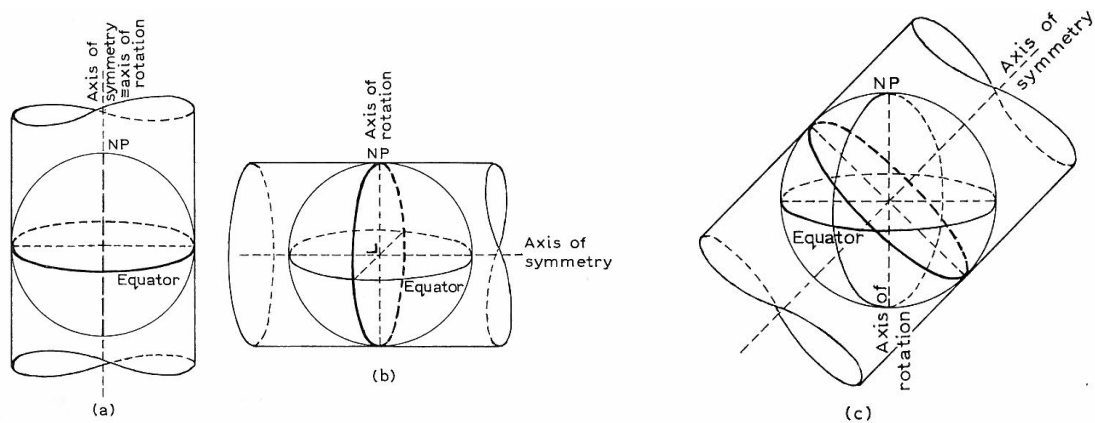


Figura 1.5. Classificação das projecções cartográficas quanto à posição: a) normal, b) transversa e c) oblíqua.

1.3.2. O problema intrínseco

Este problema considera a projecção do ponto de vista das suas propriedades cartográficas e do seu modo de construção, dando origem a duas classes:

IV. Propriedades cartográficas

V. Modo de construção

Quanto às propriedades cartográficas, esta classe divide-se em três variedades mutuamente exclusivas que representam os três critérios cartográficos básicos : equidistância, conformidade e equivalência. A equidistância significa que existe uma correcta representação da distância entre dois pontos na superfície datum e na superfície projecção, de modo que a escala é mantida ao longo de linhas que liguem quaisquer dois pontos. Esta característica é naturalmente limitada a um número específico de pontos e não é de forma alguma uma característica geral destas projecções. A conformidade representa a manutenção da forma dos elementos, e conseqüentemente a manutenção dos ângulos (direcções), sendo esta propriedade limitada a áreas infinitamente pequenas e não certamente a figuras geométricas de grandes dimensões. A equivalência de áreas significa a manutenção das áreas dos elementos representados, mas à custa da deformação da sua forma e dos seus ângulos que são neste caso deformados. A última classe pode ser dividida em três variedades mutuamente exclusivas representando os três principais modos de construção de uma projecção: geométrica, semi-geométrica e convencional (matemática). As projecções geométricas ou semi-geométricas resultam de uma representação geométrica ou perspectiva pura ou por meio de um processo parcialmente projectivo. Neste caso enquadram-se as projecções gnónomica e estereográfica. Nas projecções convencionais não existe qualquer relação do tipo projectivo ou geométrico sendo a representação obtida por um processo puramente matemático.

1.3.3. O esquema de classificação

As classes e as variedades mencionadas nas duas secções anteriores podem ser organizadas da seguinte forma (Tabela 1.1):

Tabela 1.1. Classes e variedades das projecções cartográficas.

	Classes	Variedades		
Problema extrínseco – Superfície de projecção	I. Natureza	Plana	Cónica	Cilíndrica
	II. Coincidência	Tangente	Secante	Polisuperficial
	III. Posição	Normal	Transversa	Oblíqua
Problema intrínseco - Projecção	IV. Propriedades cartográficas	Equidistante	Equivalentente	Conforme
	V. Modo de construção	Geométrica	Semi-geométrica	Convencional

Uma qualquer projecção pode ser descrita por um conjunto de variedades, uma de cada class; e inversamente, um conjunto de variedades, uma de cada classe, definem uma projecção. De salientar o facto de que o número de projecções é infinito. Na tabela 1.2 são apresentados os conjuntos de variedades que caracterizam algumas das projecções utilizadas na cartografia portuguesa.

Tabela 1.2. Variedades que caracterizam algumas das projecções utilizadas na cartografia portuguesa.

	Projecção de Bonne	Projecção de Mercator	Projecção Transversa de Mercator (Gauss)	Projecção Universal Transversa de Marcator (UTM)
Natureza	Cónica	Cilíndrica	Cilíndrica	Cilíndrica
Coincidência	Tangente	Tangente	Tangente	Secante
Posição	Normal	Normal	Transversa	Transversa
Propriedades	Equivalente	Conforme	Conforme	Conforme
Modo de construção	Convencional	Convencional	Convencional	Convencional

Chapter 2 Definições, notação e dimensões

2.1. Definições e notação

2.1.1. Representação matemática da forma da terra

A forma física da terra é muito irregular para ser utilizada directamente em cálculos matemáticos. Consequentemente, diversas superfícies matemáticas fictícias têm sido definidas como aproximações da forma da terra com diferentes graus de precisão.

A melhor aproximação universalmente aceite é a uma superfície equipotencial correspondente ao nível médio do mar, designada por geóide. O geóide é uma superfície ondulatória, suave e contínua, que ficticiamente se estende sob os continentes ao mesmo nível e que, por definição, é perpendicular, em cada ponto, à direcção da gravidade. Esta superfície não é simétrica em relação ao seu eixo de rotação, sendo irregular a distribuição de densidades no interior da Terra (Figura 2.1). O monte Everest constitui o ponto mais alto, com cerca de 8 km de altitude, e a fossa das Marianas, com cerca de 11 km de profundidade, constitui o ponto mais profundo da superfície da terra.

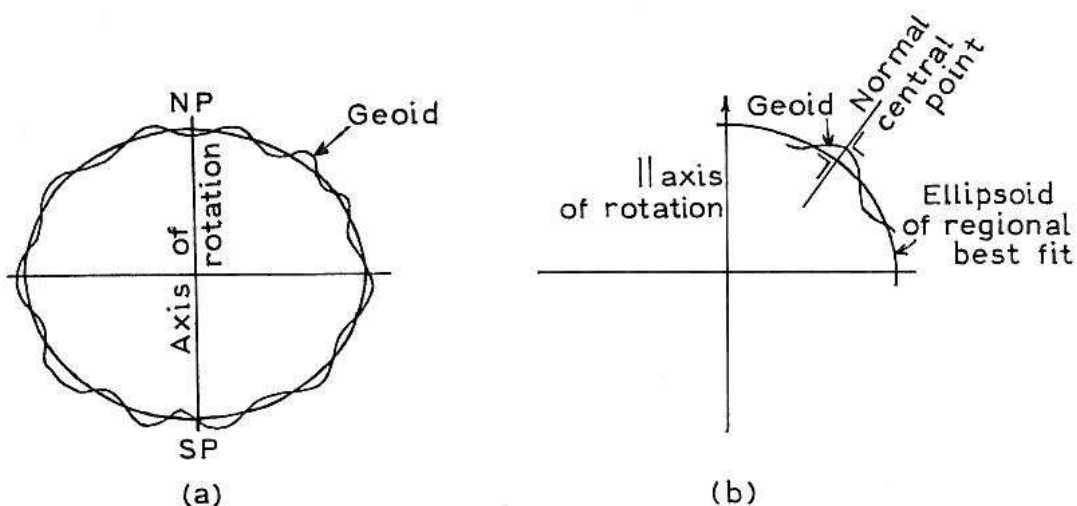


Figura 2.1. O geóide e o elipsóide.

Embora o geóide seja um meio conveniente para o estudo do campo gravítico da terra, este apresenta desvantagens quando se pretendem calcular coordenadas horizontais de pontos, distâncias e ângulos, dado que a formulação matemática necessária para esse cálculo é extremamente complexa.

Dado isto, é introduzida uma superfície de revolução simétrica considerada como a melhor aproximação ao geóide. Esta superfície é um elipsóide cujas dimensões dependem das condições que proporcionam o melhor ajustamento em relação à superfície do geóide que se pretende representar. Uma das propriedades mais comuns consiste em fazer coincidir o seu eixo de revolução e centro, respectivamente, com o eixo de rotação e o centro de gravidade do geóide – datum global (Figura 2.1a). No entanto, para a representação de uma região parcial do geóide é considerado um elipsóide, tangente

à superfície do geóide no ponto central dessa região, cuja superfície constitua o melhor ajustamento regional e cujo eixo de revolução seja paralelo ao eixo de rotação do geóide – datum local (Figura 2.1b).

2.1.2. Definições e notação no elipsóide e na esfera

Para os próximos capítulos é necessário definir os elementos do elipsóide bem como os elementos correspondentes à esfera. Vamos considerar a figura 2.2 onde está representada parte de um elipsóide.

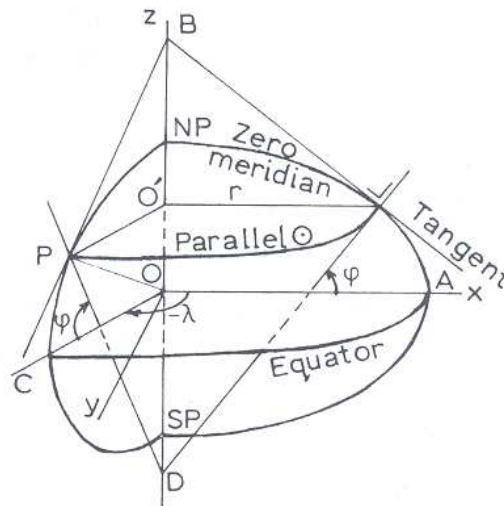


Figura 2.2. Parâmetros do elipsóide.

O eixo-z corresponde ao eixo de revolução. Um plano que passe por este eixo intersecta a superfície ao longo de uma elipse meridional. O centro do elipsóide é O; o Polo Norte e Sul são indicados por NP e SP, respectivamente. O semi-eixo maior da elipse meridional (a) é igual ao raio equatorial representado na figura por OA ou OC ($OA=OC=a$). O semi-eixo menor da elipse meridional (b) é representado na figura por $ONP=b$. De seguida são apresentadas as relações matemáticas entre os diversos parâmetros do elipsóide.

O achatamento do elipsóide (f) é dado por:

$$f = \frac{a-b}{a} \quad (2.1)$$

A primeira excentricidade (e) é dada por:

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (2.2)$$

com e^2 igual à seguinte expressão:

$$e^2 = 1 - (1 - f)^2 \quad (2.3)$$

O ângulo entre a normal ao elipsóide PD em P e o eixo equatorial CO é designado por latitude geodésica (ϕ). O ângulo COP é designado por latitude geocêntrica.

O raio de curvatura do meridiano (ρ) em P é dado por:

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4)$$

O raio do círculo paralelo (r) que passa por P (com ϕ constante), representado na figura por PO' , é igual a:

$$PO' = N \cdot \cos \phi = r \quad (2.5)$$

sendo N o raio de curvatura na direcção da primeira vertical perpendicular à direcção do meridiano, o qual é dado pela seguinte expressão:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.6)$$

O meridiano que passa por P é indicado pelo ângulo λ , designado por longitude de P , contado a partir do meridiano de referência. Por regra considera-se o meridiano de Greenwich como sendo o meridiano de referência. No entanto, no caso das representações cartográficas pode ser mais conveniente considerar o meridiano central da projecção de uma dada região como origem da contagem das longitudes. O ângulo λ é considerado positivo na direcção Este e negativo na direcção Oeste a partir do meridiano de origem.

A equação do elipsóide no sistema de coordenadas rectangulares tridimensional (Figura 2.2) é dada por:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.7)$$

ou em coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = N \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ y = N \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ z = N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \phi \end{cases} \quad (2.8)$$

O azimute de um arco arbitrário PP' sobre a superfície do elipsóide é designado por α e é contado no sentido dos ponteiros do relógio a partir da direcção do Norte. Tal é mostrado na figura 2.3.

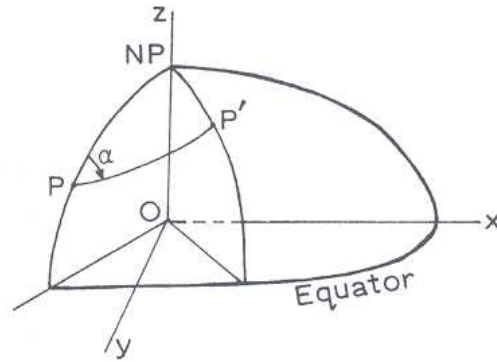


Figura 2.3. Azimute de PP' .

As correspondentes fórmulas para a esfera são obtidas colocando $e=0$ nas expressões anteriores (Figura 2.4). No caso da esfera existe apenas um raio de curvatura pelo que $\rho = N = R$ e é óbvio que a latitude geodésica ϕ é coincidente com a latitude geocêntrica.

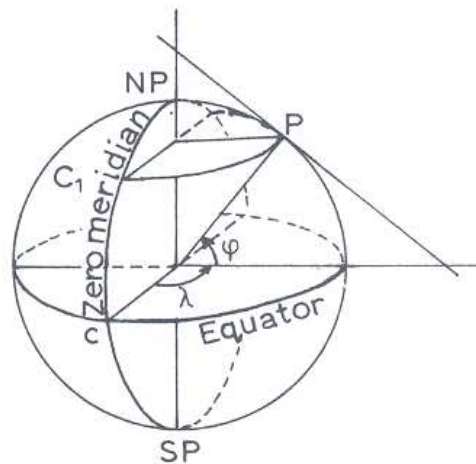


Figura 2.4. Parâmetros esféricos.

Quer no caso do elipsóide quer no caso da esfera a posição dos pontos sobre a superfície é dada pela latitude ϕ contada positiva a partir do equador até ao Norte e a longitude λ , ambas expressas em graus, minutos e segundos de arco.

2.2. Linhas com propriedades especiais

Existem algumas linhas com propriedades sobre a superfície do elipsóide (e as suas equivalentes esféricas). No caso concreto da cartografia, as linhas mais importantes são a geodésica e a loxodrómica.

2.2.1. A geodésica, o círculo máximo e a ortodrómica

O caminho mais curto entre dois pontos P_1 e P_2 sobre a superfície do elipsóide é designado por geodésica (Figura 2.5). Progredindo ao longo desta linha curva, o azimute da tangente muda continuamente a cada ponto.

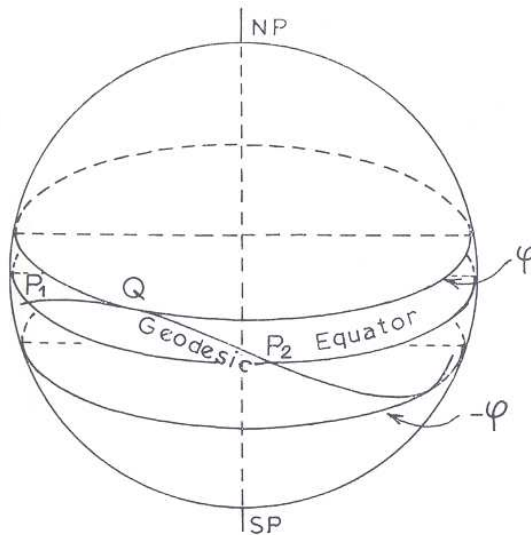


Figura 2.5. A geodésica.

De acordo com o teorema de Clairaut verifica-se a seguinte relação em cada ponto P da geodésica: “o producto do raio de um círculo paralelo que passe por um dado ponto P pelo seno do azimute da geodésica é uma constante”, ou

$$r \cdot \sin \alpha = N \cdot \cos \phi \cdot \sin \alpha = C \quad (2.9)$$

Desta expressão retiram-se algumas particularidades:

- (1) Para $\phi = 0$, $N = a$ e

$$\sin \alpha = \frac{C}{a} \quad (2.10)$$

quando a geodésica intersecta o equador, o azimute α é igual ao $\arcsin(C/a)$.

- (2) Para $\alpha = 90^\circ$, verifica-se que

$$\begin{cases} N \cdot \cos \phi = C \\ N \cdot \cos(-\phi) = C \end{cases} \quad (2.11)$$

a solução destas equações devolve dois valores para ϕ simétricos em relação ao equador.

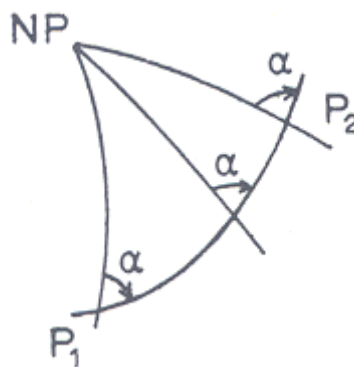
- (3) Para $\alpha = 0$, o valor de ϕ é indeterminado e a geodésica é um meridiano.

Caso P_1 e P_2 tenham uma distância máxima em longitude de 180° ($\lambda_2 - \lambda_1 = 180^\circ$), o caminho mais curto é ao longo de uma secção meridional que passe por um dos polos. Os círculos paralelos não são geodésicas, embora o teorema de Clairaut seja satisfeito (equação 2.9).

Quer as secções normais entre dois pontos quer a geodésica correspondem a partes de círculos máximos na esfera dado que esta corresponde a um caso particular do elipsóide, isto é quando o semi-eixo maior e menor são iguais. Logo, o caminho mais curto entre 2 pontos é parte de um círculo máximo. No entanto, esta curva só é projectada como uma linha recta nas projecções gnomónicas (à projecção da geodésica é dado o nome de ortodrómica).

2.2.2. A loxodrómica

A loxodrómica entre dois pontos P_1 e P_2 é uma curva que intersecta os meridianos com um azimute α constante (Figura 2.6).



2.6. A loxodrómica.

A equação dessa curva é gerada a partir de uma equação diferencial:

$$d\lambda = \tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos \phi} d\phi \quad (2.12)$$

derivando directamente a partir da Figura 2.7.

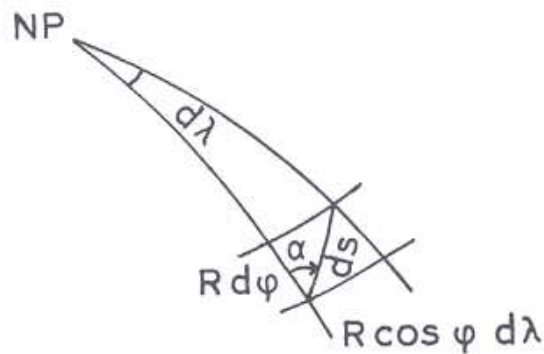


Figura 2.7. Elementos diferenciais da loxodrómica.

Integrando e resolvendo de modo a obter $\tan \alpha$, obtém-se:

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\phi_2) - \ln \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\phi_1)} \quad (2.13)$$

Qualquer outro ponto $P (\phi, \lambda)$ ao longo da curva pode ser calculado através da integração de (2.12) com os limites λ_1 e λ :

$$\lambda_1 - \lambda = \tan \alpha \left\{ \ln \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\phi_2) - \ln \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\phi_1) \right\} \quad (2.14)$$

Desta expressão tiram-se algumas particularidades:

- (1) Se $\phi_1 = \phi_2$, $\tan \alpha = \infty$ ou $\alpha = 90^\circ$, resultando num círculo paralelo;
- (2) Se $\lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha = 0$, resultando num meridiano;
- (3) Se $\phi = 90^\circ$, $\lambda - \lambda_1$ tende para infinito, resultando numa espiral em direcção ao polo (Figura 2.8).

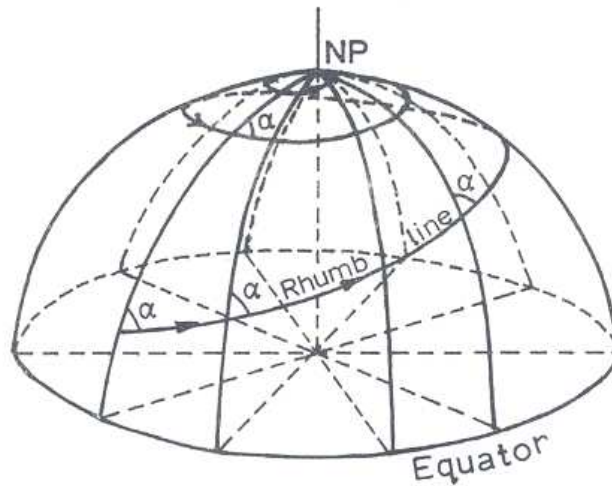


Figura 2.8. A loxodrómica em direcção ao polo.

A loxodrómica é de especial importância na navegação dado que é projectada como uma linha recta entre pontos na projecção cilíndrica conforme de Mercator. As Figuras 2.9 e 2.10 mostram a ortodrómica e a loxodrómica numa projecção gnomónica e numa projecção conforme de Mercator, respectivamente.

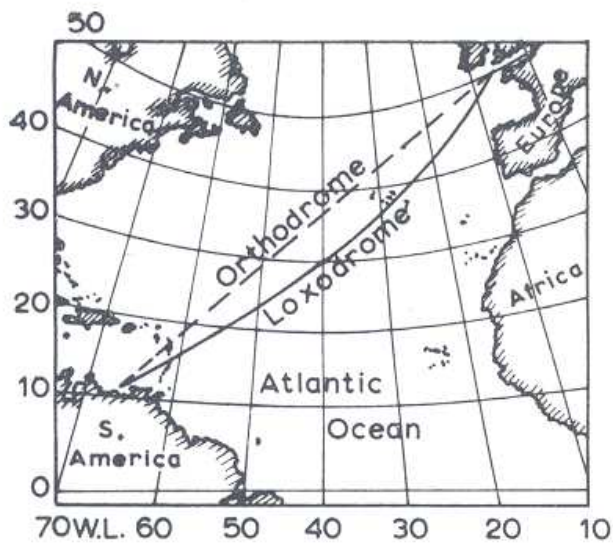


Figura 2.9. A ortodrómica e a loxodrómica na projecção gnomónica, $\phi_0 = 30^\circ$.

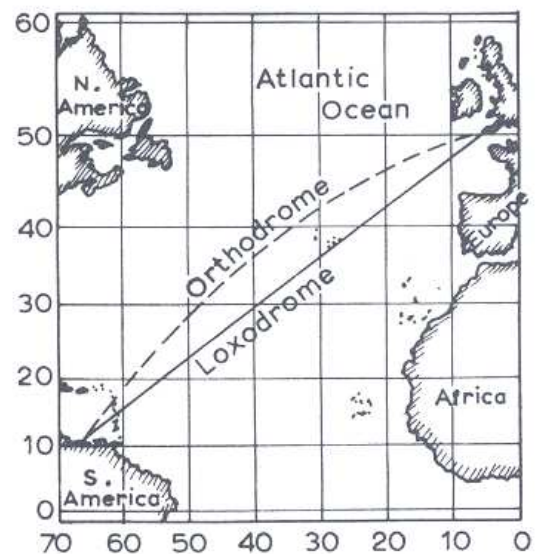


Figura 2.10. A ortodrómica e a loxodrómica na projecção de Mercator.

Chapter 3 Fórmula geral da transformação. A teoria das distorções

3.1. Fórmula geral da transformação. Condições de unicidade, reversibilidade e correspondência entre curvas paramétricas

Um dado sistema de curvas paramétricas (u, v) pode ser adoptado sobre uma superfície curva, logo cada ponto dessa superfície pode ser dado em coordenadas cartesianas tridimensionais x, y, z como função de u e v (Figura 3.1).

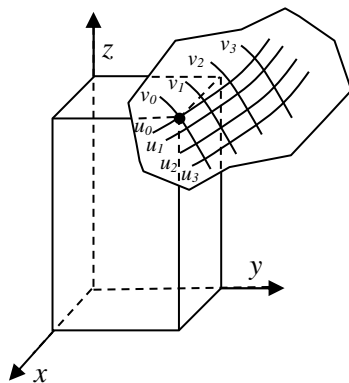


Fig. 3.1. *Superfície datum*

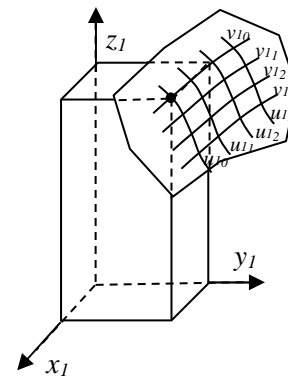


Fig. 3.2. *Superfície de projecção*

$$\begin{cases} x = p_1(u, v) \\ y = p_2(u, v) \\ z = p_3(u, v) \end{cases} \quad (3.1)$$

Por conveniência, a essa superfície irá chamar-se *superfície datum*. A mesma relação pode ser escrita para uma segunda superfície à qual se irá chamar *superfície de projecção* (Figura 3.2).

$$\begin{cases} x_1 = p'_1(u_1, v_1) \\ y_1 = p'_2(u_1, v_1) \\ z_1 = p'_3(u_1, v_1) \end{cases} \quad (3.2)$$

As curvas paramétricas da superfície datum estão relacionadas com um sistema de curvas na superfície de projecção se existir uma relação matemática entre os parâmetros (u, v) e (u_1, v_1) , e vice-versa.

$$\begin{cases} u_1 = q_1(u, v) \\ v_1 = q_2(u, v) \end{cases} \quad (3.3)$$

É óbvio que para representarmos a superfície da Terra, ou qualquer outra superfície curva, numa esfera ou num plano, duas condições devem ser satisfeitas

(1) a projecção deve ser única (condição de unicidade);

(2) a projecção deve ser reversível (condição de reversibilidade).

Tal significa que a um dado ponto na superfície datum deve corresponder um único ponto na superfície de projecção e vice-versa. Matematicamente, tal pode ser expresso pela condição de que os parâmetros u e v devem ser resolúveis a partir das equações (3.3), tendo-os como função de u_1 e v_1 .

$$\begin{cases} u = \bar{q}_1(u_1, v_1) \\ v = \bar{q}_2(u_1, v_1) \end{cases} \quad (3.4)$$

Sem mais restrições, as curvas paramétricas u e v por norma não correspondem ao sistema (u_1, v_1) , constituindo um outro sistema arbitrário diferente. No entanto, a relação entre (u, v) e (u_1, v_1) pode ser estabelecida eliminando u_1 e v_1 das equações (3.1) e (3.2) com a ajuda de (3.3), obtendo-se a *fórmula geral da transformação*

$$\begin{cases} x = p_1(u, v) \\ y = p_2(u, v) \\ z = p_3(u, v) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \bar{p}_1(u, v) \\ y_1 = \bar{p}_2(u, v) \\ z_1 = \bar{p}_3(u, v) \end{cases} \quad (3.5)$$

3.2. Geometria diferencial elementar. A matriz de transformação

3.2.1. Elemento linear e expressões angulares

De acordo com uma fórmula da geometria diferencial o quadrado do comprimento infinitesimal de uma parte de uma curva, designado abreviadamente por elemento linear ds , sobre uma superfície é dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.6)$$

Derivando as expressões (3.1) em ordem a u e v , obtêm-se

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv \end{cases} \quad (3.7)$$

substituindo (3.7) em (3.6), resulta que

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv \right)^2 = \dots \\
&= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right] \cdot du^2 + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right] \cdot dudv \\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right] \cdot dv^2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Os coeficientes de du^2 , $du \cdot dv$ e dv^2 são designados por primeiros coeficientes superficiais de Gauss e são designados na literatura por E , F e G , respectivamente. Deste modo a expressão (3.6) passa e escrever-se da seguinte forma

$$ds^2 = E \cdot du^2 + 2F \cdot dudv + G \cdot dv^2 \tag{3.9}$$

Considerando que uma dada curva sobre uma dada superfície é uma curva coordenada $u = const.$, então $du=0$, logo substituindo em (3.9) obtemos

$$ds_u^2 = G \cdot dv^2 \Leftrightarrow ds_u = \sqrt{G} \cdot dv$$

de igual modo, se $v = const.$, então $dv=0$, logo

$$ds_v^2 = E \cdot du^2 \Leftrightarrow ds_v = \sqrt{E} \cdot du$$

As quantidades \sqrt{E} e \sqrt{G} actuam como unidades de medida ao longo das curvas u e v sobre uma dada superfície. Na figura 3.3 é apresentado um paralelogramo diferencial num ponto P de uma dada curva

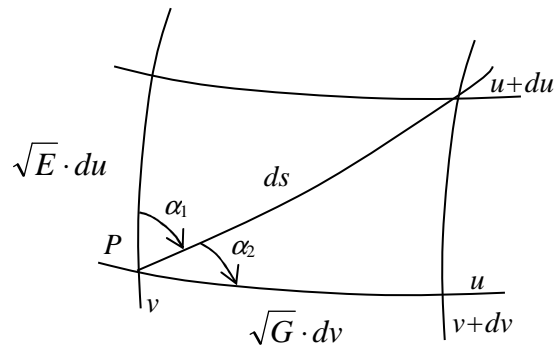


Figura 3.3. O paralelogramo diferencial

As curvas coordenadas $u = const.$ e $v = const.$ serão, no caso da Cartografia, os paralelos e meridianos, respectivamente.

Consideremos então que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \theta \tag{3.10}$$

sendo θ o ângulo de intersecção das curvas coordenadas u e v no ponto P (i.e., o ângulo entre as tangentes às curvas u e v em P). O paralelogramo pode considerar-se plano dada a sua área infinitamente pequena, pelo que se pode aplicar a lei do coseno, obtendo-se

$$ds^2 = (\sqrt{E} \cdot du)^2 + (\sqrt{G} \cdot dv)^2 - 2(\sqrt{E} \cdot du) \cdot (\sqrt{G} \cdot dv) \cdot \cos(180^\circ - \theta) \Leftrightarrow$$

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 + 2\sqrt{EG} \cdot dudv \cdot \cos \theta \quad (3.11)$$

Igualando as expressões (3.11) e (3.9), obtém-se que

$$2F = 2\sqrt{EG} \cdot \cos \theta \Leftrightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (3.12)$$

A igualdade (3.12) mostra que a condição necessária e suficiente para que as curvas coordenadas u e v sejam ortogonais é que $F=0$. Considerando que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, resulta que

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\right)^2} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} \quad (3.13)$$

O ângulo α_1 entre a tangente à curva coordenada $v = \text{const.}$ e a tangente a uma curva ds num dado ponto P , denominado azimute de ds , obtém-se aplicando novamente a lei do coseno

$$(\sqrt{G} \cdot dv)^2 = (\sqrt{E} \cdot du)^2 + ds^2 - 2(\sqrt{E} \cdot du) \cdot ds \cdot \cos \alpha_1 \Leftrightarrow$$

$$ds^2 = Gdv^2 - Edu^2 + 2\sqrt{E} \cdot du \cdot ds \cdot \cos \alpha_1$$

igualando esta expressão à expressão (3.11), obtém-se

$$\cos \alpha_1 = \frac{2Edu^2 + 2\sqrt{EG} \cdot du \cdot dv \cdot \cos \theta}{2\sqrt{E} \cdot du \cdot ds} = \frac{Edu + \sqrt{EG} \cdot dv \cdot \cos \theta}{\sqrt{E} \cdot ds}$$

substituindo $\cos \theta$ pela sua expressão em (3.12), resulta que

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \left(E \cdot \frac{du}{ds} + F \cdot \frac{dv}{ds} \right) \quad (3.14)$$

de igual modo se obtém para $\cos \alpha_2$ a seguinte expressão

$$\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \left(F \cdot \frac{du}{ds} + G \cdot \frac{dv}{ds} \right) \quad (3.15)$$

Considerando, novamente, que $\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1 = 1$, resulta que

$$\begin{aligned}\sin \alpha_1 &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \left(E \cdot \frac{du}{ds} + F \cdot \frac{dv}{ds} \right) \right)^2} = \dots \\ &= \sqrt{\frac{E \cdot ds^2 - E^2 \cdot du^2 - 2E \cdot F \cdot du \cdot dv - F^2 \cdot dv^2}{E \cdot ds^2}}\end{aligned}$$

substituindo no numerador ds^2 pela sua expressão em (3.9), obtém-se que

$$\sin \alpha_1 = \sqrt{\frac{E \cdot G - F^2}{E}} \cdot \frac{dv}{ds} \quad (3.16)$$

de igual modo se obtém que

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{\frac{E \cdot G - F^2}{G}} \cdot \frac{du}{ds} \quad (3.17)$$

A área elementar do paralelogramo é dada pelo produto externo de dois vectores

$$A = \sqrt{EG} \cdot du \cdot dv \cdot \sin \theta$$

substituindo $\sin \theta$ pela sua expressão (3.13), obtém-se que

$$A = \sqrt{EG - F^2} \cdot du \cdot dv \quad (3.18)$$

A expressão $EG - F^2$ é definida positiva. Estas mesmas expressões são aplicáveis à superfície de projecção usando as letras e_1, f_1 e g_1 (em vez de E, F e G , respectivamente) e os ângulos Ω e β (em vez de θ e α , respectivamente). Num sistema paramétrico ortogonal (u, v) onde $\theta = 90^\circ$, $F = 0$ e a expressão para a área do paralelogramo passa a ser

$$A = \sqrt{EG} \cdot du \cdot dv$$

3.2.2. A matriz de transformação fundamental. O determinante do jacobiano

Considerando duas superfícies S e S_1 , e sobre cada uma delas um sistema de coordenadas curvilíneas (u, v) e (u_1, v_1), obtemos os seguintes elementos lineares ds e ds_1

$$\begin{aligned}ds^2 &= E \cdot du^2 + 2F \cdot dudv + G \cdot dv^2 \\ ds_1^2 &= E_1 \cdot du_1^2 + 2F_1 \cdot du_1 dv_1 + G_1 \cdot dv_1^2\end{aligned} \quad (3.19)$$

Derivando as expressões (3.3) que estabelecem a correspondência entre os pontos das duas superfícies, obtém-se que

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot dv$$

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot dv$$

Substituindo estas expressões na segunda expressão em (3.19), vamos obter o elemento linear ds_1 em termos das coordenadas u e v

$$ds_1^2 = E_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot dv \right)^2 + 2F_1 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot dv \right) \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot dv \right) \right] + G_1 \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot dv \right)^2 = \dots = e_1 \cdot du^2 + 2f_1 \cdot dudv + g_1 \cdot dv^2$$

onde

$$e_1 = E_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 + 2F_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right) + G_1 \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \right)^2$$

$$f_1 = E_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial v} \right) + F_1 \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right) \right] + G_1 \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) \quad (3.20)$$

$$g_1 = E_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 + 2F_1 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) + G_1 \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial v} \right)^2$$

A relação entre os coeficientes e_1, f_1 e g_1 e os coeficientes E_1, F_1 e G_1 pode ser expressa em notação matricial da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial v} \right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 & 2 \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial v} \right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ F_1 \\ G_1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

sendo esta matriz designada por matriz fundamental da transformação. O termo $e_1 \cdot g_1 - f_1^2$ pode ser deduzido a partir das expressões anteriores, podendo também ser expresso como o produto de dois determinantes

$$e_1 \cdot g_1 - f_1^2 = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = (E_1 \cdot G_1 - F_1^2) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u} \right)^2 = (E_1 \cdot G_1 - F_1^2) \cdot \Delta^2 \quad (3.22)$$

sendo o segundo determinante, designado abreviadamente por Δ , o determinante do jacobiano de (u_1, v_1) com respeito a (u, v) .

Com as funções descritas desta forma pode garantir-se que a cada par (u, v) corresponde um ponto sobre a superfície datum e outro sobre a superfície de projecção, dado que este determinante é sempre diferente de zero ($\Delta \neq 0$, pois $\frac{\partial u_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v} \neq \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial u}$). Caso fosse nulo o determinante, uma função dependeria da outra e a correspondência não era unívoca.

3.3. Outros conceitos

3.3.1. A deformação linear. Condições de conformidade e de equivalência

O módulo da deformação linear k , também designado por factor de escala, é definido pela seguinte razão:

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{e_1 du^2 + 2f_1 dudv + g_1 dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2} = \frac{e_1 \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2f_1 \frac{du}{dv} + g_1}{E \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G} \quad (3.23)$$

de notar que k depende da direcção $\frac{du}{dv}$ da tangente ao ponto P e que é diferente em cada direcção. No entanto, existe uma excepção, nomeadamente, quando os coeficientes do denominador são respectivamente proporcionais aos do numerador:

$$k^2 = \frac{e_1}{E} = \frac{f_1}{F} = \frac{g_1}{G} \quad (3.24)$$

O factor de escala é então independente de $\frac{du}{dv}$ e é o mesmo em todas as direcções. Esta condição deve ser satisfeita para todas as *projecções conformes*. Esta mesma condição mantém os ângulos livres de distorções na imagem. Tal pode ser observado a partir das expressões (3.13) e (3.16) em combinação com (3.24), resultando em:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} = \frac{\sqrt{\frac{e_1}{k^2} \cdot \frac{g_1}{k^2} - \left(\frac{f_1}{k^2}\right)^2}}{\sqrt{\frac{e_1}{k^2} \cdot \frac{g_1}{k^2}}} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sqrt{e_1 \cdot g_1 - f_1^2}}{\sqrt{e_1 \cdot g_1}} = \sin \Omega$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{\sqrt{\frac{e_1}{k^2} \cdot \frac{g_1}{k^2} - \left(\frac{f_1}{k^2}\right)^2}}{\sqrt{\frac{e_1}{k^2}}} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sqrt{e_1 \cdot g_1 - f_1^2}}{\sqrt{e_1}} \cdot \frac{dv}{ds} = \sin \beta$$

considerando $k=1$.

De acordo com (3.18), a área de um paralelogramo infinitamente pequeno é dada por:

$$A = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

se a imagem (*projecção*) deste paralelogramo tiver a mesma área, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$EG - F^2 = \frac{1}{k^4} \cdot (e_1 \cdot g_1 - f_1^2) = e_1 \cdot g_1 - f_1^2 = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}^2 \quad (3.25)$$

considerando um factor de escala igual a 1.

3.3.2. Coeficientes superficiais de Gauss no elipsóide, na esfera e no plano. Coordenadas isométricas

No caso da Cartografia o que se pretende é a representação da superfície do elipsóide de revolução sobre uma superfície de projecção (plano, cilindro ou cone). Em geral, consideram-se sobre a superfície do elipsóide as coordenadas latitude e longitude (ϕ, λ) e sobre a superfície de projecção as coordenadas cartesianas, também designadas por rectangulares ou planas, (x, y) ou as coordenadas polares (R, θ). Um elipsóide pode ser descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} X = N \cos \phi \cos \lambda \\ Y = N \cos \phi \sin \lambda \\ Z = N(1 - e^2) \sin \phi \end{cases} \quad (3.26)$$

sendo N o raio de curvatura na direcção da primeira vertical perpendicular à direcção do meridiano.

As curvas paramétricas sobre a superfície do elipsóide são os meridianos e as trajectórias *ortogonais* são os círculos de paralelo ($u = \phi$ e $v = \lambda$). A expressão do elemento linear sobre a superfície datum é dada por:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

derivando as expressões (3.26) e considerando as expressões dos coeficientes superficiais de Gauss, E , F e G , na expressão (3.8), obtém-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \left(\frac{dX}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\phi}\right)^2 = \dots = \rho^2 \\ F = 0 \\ G = \left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\lambda}\right)^2 = (-N \cos \phi \sin \lambda)^2 + (N \cos \phi \cos \lambda)^2 = \dots \\ \quad = N^2 \cos^2 \phi = r^2 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

e conseqüentemente a expressão do elemento linear passa a escrever-se da seguinte forma:

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2 \phi d\lambda^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2 \quad (3.28)$$

No caso da esfera tem-se que $\rho = N = R$, sendo descrita pelas seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = R \cos \phi \cos \lambda \\ Y = R \cos \phi \sin \lambda \\ Z = R \sin \phi \end{array} \right. \quad (3.29)$$

de igual modo se obtém que:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \left(\frac{dX}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\phi}\right)^2 = (-R \sin \phi \cos \lambda)^2 + (-R \sin \phi \sin \lambda)^2 + (R \cos \phi)^2 = \dots \\ \quad = R^2 \\ F = 0 \\ G = \left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\lambda}\right)^2 = (-R \cos \phi \sin \lambda)^2 + (R \cos \phi \cos \lambda)^2 = \dots \\ \quad = R^2 \cos^2 \phi \end{array} \right. \quad (3.30)$$

e conseqüentemente:

$$ds^2 = R^2 d\phi^2 + R^2 \cos^2 \phi d\lambda^2 \quad (3.31)$$

No plano tem-se a seguinte expressão para o elemento linear ds_1 , considerando $u_1 = x$ e $v_1 = y$:

$$ds_1^2 = E_1 dx^2 + G_1 dy^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3.32)$$

pelo que:

$$E_1 = G_1 = 1 \quad e \quad F_1 = 0 \quad (3.33)$$

as unidades de medida ao longo dos eixos coordenados são iguais. Tal não se verifica nas expressões (3.28) e (3.31), pois $E \neq G$.

No caso do elipsóide, o sistema de coordenadas (ϕ, λ) não é um sistema isométrico, i. e. não tem a mesma métrica ao longo dos dois eixos principais. No entanto, estas coordenadas podem ser submetidas a uma transformação com vista a tornar as unidades de medida iguais. Considerando a expressão (3.28):

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2 \phi d\lambda^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2$$

colocando $N^2 \cos^2 \phi$ em evidência obtém-se:

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \phi \cdot \left[\left(\frac{\rho d\phi}{N \cos \phi} \right)^2 + d\lambda^2 \right] = r^2 \cdot \left[\left(\frac{\rho d\phi}{r} \right)^2 + d\lambda^2 \right] \quad (3.34)$$

Introduzindo uma nova variável Φ , designada por latitude isométrica, cuja relação com a latitude geodésica é dada por:

$$d\Phi = \frac{\rho}{N \cos \phi} d\phi = \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi) \cos \phi} d\phi \quad (3.35)$$

e integrando esta expressão, obtém-se a seguinte expressão para a latitude isométrica Φ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \frac{\rho}{N \cos \phi} d\phi = \ln \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \phi \right) \cdot \left(\frac{1-e \sin \phi}{1+e \sin \phi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] = \dots \\ &= \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \phi \right) + \frac{e}{2} \ln \left(\frac{1-e \sin \phi}{1+e \sin \phi} \right) + c \end{aligned} \quad (3.36)$$

em que e representa a excentricidade do elipsóide, \ln o logaritmo natural e c é uma constante, a qual é igual a zero. De notar que a latitude isométrica se torna infinita nas regiões polares e assume o valor zero no equador.

A expressão (3.34) passa então a escrever-se da seguinte forma:

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \phi (d\Phi^2 + d\lambda^2) \quad (3.37)$$

sendo o novo sistema de coordenadas designado por sistema de coordenadas isométricas.

A latitude isométrica na esfera deriva-se directamente da expressão (3.36) colocando a excentricidade e igual a zero, resultando em:

$$\Phi_{esf} = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \phi \right) \quad (3.38)$$

O elemento linear, no caso da esfera, é então dado por:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \phi (d\Phi^2 + d\lambda^2) \quad (3.39)$$

Num sistema de coordenadas polares plano, onde o elemento linear ds_1 é dado por, considerando $u_1 = R$ e $v_1 = \theta$:

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= E_1 dR^2 + G_1 d\theta^2 \\ x &= R \cos \theta \\ y &= R \sin \theta \\ E_1 &= \left(\frac{dx}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dR}\right)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ F_1 &= 0 \\ G_1 &= \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta = R^2 \\ ds_1^2 &= dR^2 + R^2 d\theta^2 \quad (3.40) \end{aligned}$$

onde R é o raio polar e θ o ângulo polar. Os primeiros coeficientes de Gauss E_1 e G_1 não são iguais aos da equação (3.32), pelo que o sistema também não é isométrico. De igual forma se pode transformar este sistema num outro sistema equivalente que seja isométrico. Colocando R^2 em evidência, obtém-se:

$$ds_1^2 = R^2 \left(\frac{dR^2}{R^2} + d\theta^2 \right) = R^2 (d\mu^2 + d\theta^2) \quad (3.41)$$

onde $d\mu = \frac{dR}{R}$. Integrando $d\mu$, obtém-se que:

$$\mu = \ln R + c$$

donde resulta que:

$$\begin{aligned} \mu - c &= \ln R \Leftrightarrow \\ R &= e^{\mu - c} = e^\mu \cdot e^{-c} = e^\mu \cdot p \end{aligned}$$

sendo assim a expressão do elemento linear passa a ter a seguinte forma:

$$ds_1^2 = e^{2\mu} \cdot p^2 (d\mu^2 + d\theta^2) \quad (3.42)$$

onde as coordenadas μ e θ são isométricas.

Num sistema de coordenadas rectangulares os paralelogramos elementares são rectângulos, logo $\theta = 90^\circ$ e $F = 0$. Estes paralelogramos tornam-se quadrados num sistema de coordenadas isométrico.

As coordenadas isométricas são de extrema importância nas projecções conformes. Embora os coeficientes principais de Gauss, na condição de conformidade (3.24), possam ser derivados directamente de (3.21), a introdução dos parâmetros isométricos simplifica consideravelmente as expressões.

3.4. A teoria das distorções das distâncias, ângulos e áreas

3.4.1. Pares ortogonais correspondentes

Definindo um sistema rectangular de curvas paramétricas (u, v) sobre a superfície *datum* ($F=0$), o correspondente conjunto de curvas na superfície de projecção é por regra não rectangular ($f_1 \neq 0$). Sendo assim, a expressão da deformação linear k assume a seguinte forma

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{e_1 du^2 + 2f_1 dudv + g_1 dv^2}{ds^2}$$

Atendendo às expressões do *cos* (3.14) e do *sin* (3.16) do azimute α de uma linha qualquer sobre uma superfície, omitindo o índice $_1$ em α por conveniência, e considerando que $F=0$, obtém-se que

$$k^2 = e \cdot \cos^2 \alpha + 2f \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + g \cdot \sin^2 \alpha \quad (3.43)$$

sendo $e = \frac{e_1}{E}$, $f = \frac{f_1}{\sqrt{EG}}$ e $g = \frac{g_1}{G}$.

No entanto, Tissot (1881) provou que em cada ponto da superfície *datum* existe um conjunto de curvas paramétricas rectangulares, as quais têm um conjunto de curvas correspondentes com as mesmas características na superfície de projecção. Estas curvas são designadas por curvas paramétricas principais ($f_1=0$). Consequentemente, a expressão de k pode então ser simplificada passando a

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{e_1 du^2 + g_1 dv^2}{ds^2} = e \cdot \cos^2 \alpha + g \cdot \sin^2 \alpha \quad (3.44)$$

3.4.2. A deformação linear

De acordo com a expressão 3.43, a deformação linear k assume a seguinte forma

$$k^2 = e \cdot \cos^2 \alpha + 2f \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + g \cdot \sin^2 \alpha$$

Para determinar o valor máximo e mínimo para a deformação linear, anula-se a derivada do segundo membro da expressão em ordem a α , obtendo-se

$$\begin{aligned} \frac{d(k^2)}{d\alpha} &= -2 \cdot e \cdot \cos \alpha \sin \alpha + 2 \cdot f \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \cdot g \cdot \sin \alpha \cos \alpha = \\ &(g - e) \cdot \sin 2\alpha + f \cdot \cos 2\alpha = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

expressão esta que é equivalente a

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{f}{(e-g)} \quad (3.46)$$

Reescrevendo a expressão da deformação linear em coordenadas cartesianas obtem-se que

$$e \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cos^2 \alpha + 2f \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + g \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$e \cdot x^2 + 2f \cdot x \cdot y + g \cdot y^2 = 1$$

calculando os valores próprios desta expressão, obtem-se o valor máximo e mínimo para a deformação linear

$$\begin{cases} k_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(e+g) + \sqrt{(e-g)^2 + 4 \cdot f^2}] } \\ k_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(e+g) - \sqrt{(e-g)^2 + 4 \cdot f^2}] } \end{cases} \quad (3.47)$$

Analisando estas duas igualdades rapidamente se verifica que

$$k_2^2 + k_1^2 = e + g \quad (3.48)$$

3.4.3. A deformação linear sobre curvas paramétricas

A deformação linear ao longo da curva u (onde $dv=0$, $\alpha = 90^\circ$) é igual a

$$k_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}} \quad (3.49)$$

de igual forma, a deformação linear ao longo da curva v (onde $du=0$, $\alpha = 0^\circ$) é igual a

$$k_2 = \sqrt{\frac{e_1}{E}} \quad (3.50)$$

Usando (3.14) e (3.16) e considerando que $F=0$

$$\sin \alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \quad \cos \alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds} \quad (3.51)$$

e as expressões (3.49) e (3.50), a expressão (3.44) passa a escrever-se da seguinte forma:

$$k^2 = \frac{Ek_2^2 du^2 + Gk_1^2 dv^2}{ds^2} = Ek_2^2 \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{E}} \right)^2 + Gk_1^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{G}} \right)^2 = k_2^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha \quad (3.52)$$

e devolve o valor da deformação linear para um elemento linear ds de azimuth α , sendo k_2 a deformação linear principal da linha origem da contagem dos azimuthes ($\alpha=0$).

Para determinar o valor máximo e mínimo para a deformação linear, anula-se a derivada do segundo membro da expressão (3.52) em ordem a α , obtendo-se:

$$\frac{d(k^2)}{d\alpha} = -2k_2^2 \cos \alpha \sin \alpha + 2k_1^2 \sin \alpha \cos \alpha = (k_1^2 - k_2^2) \sin 2\alpha = 0$$

um valor extremo para k com $\alpha=0$

$$k_{ext} = k_2 \quad (3.53)$$

e com $\alpha=90^\circ$

$$k_{ext} = k_1 \quad (3.54)$$

Estas expressões são particularmente importantes dado que demonstram que as direcções onde a deformação linear é máxima e mínima correspondem às direcções das curvas paramétricas u e v , e são consequentemente ortogonais.

3.4.4. A deformação angular

Representando por α e β os ângulos que os elementos lineares ds e ds_1 fazem com as linhas $v=const.$, chama-se deformação angular δ à diferença entre os azimuthes α e β (Figura 3.4).

$$\delta = \beta - \alpha \quad (3.55)$$

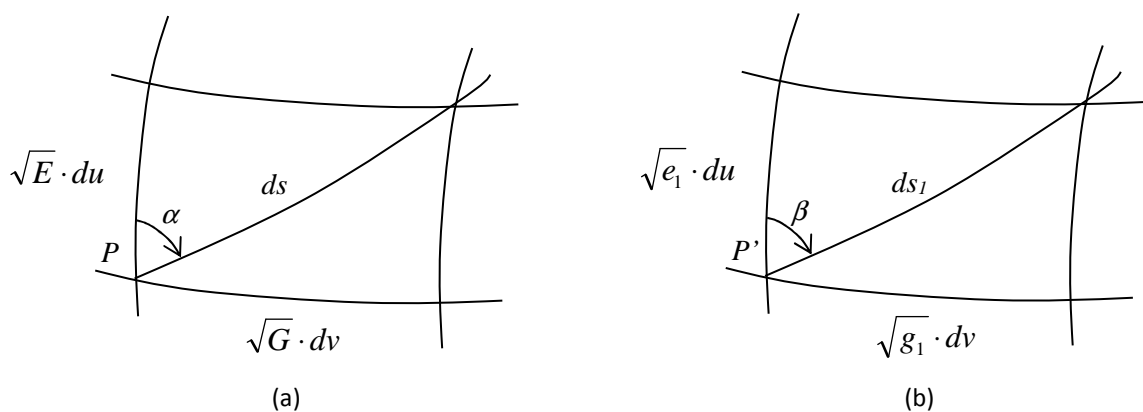


Figura 3.4. O paralelogramo diferencial, (a) *Superfície datum*, (b) *Superfície de projecção*

Considerando as expressões do $\sin \alpha$ e do $\cos \alpha$ sobre a superfície *datum*, as quais são dadas por (3.51)

$$\sin \alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \quad \cos \alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds}$$

e as expressões correspondentes sobre a superfície de projecção

$$\sin \beta = \sqrt{g_1} \frac{dv}{ds_1} \quad \cos \beta = \sqrt{e_1} \frac{du}{ds_1}$$

tem-se que

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du} \quad \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{g_1}{e_1}} \frac{dv}{du}$$

escrevendo a expressão da $\operatorname{tg} \beta$ em função de $\operatorname{tg} \alpha$ e considerando as expressões (3.49) e (3.50), obtemos

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{g_1}{e_1}} \frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{g_1 E}{e_1 G}} \operatorname{tg} \alpha = k_1 \cdot \frac{1}{k_2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg} \alpha$$

de onde se pode observar que, para $\alpha \neq \beta$, se tem que $\frac{k_1}{k_2} = 1$ e conseqüentemente $k_1 = k_2$, como se verifica em todas as *projecções conformes*.

Sendo $\delta = \beta - \alpha$, tem-se que

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg} \alpha\right) - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg}^2 \alpha} = \left(\frac{k_1}{k_2} - 1\right) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (3.56)$$

de notar que, como seria esperado, para $\alpha = 0$ e $\alpha = 90^\circ$ a deformação angular é nula ($\operatorname{tg} \delta = 0$ e $\delta = 0$). Para achar o valor do azimute α_m correspondente à deformação angular máxima, anula-se a derivada do segundo membro da expressão (3.56) em ordem a α , obtendo-se

$$\frac{d(\operatorname{tg} \delta)}{d\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha_m = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \quad (3.57)$$

substituindo este valor na expressão da deformação angular, obtém-se a expressão para a deformação angular máxima

$$\operatorname{tg} \delta_m = \left(\frac{k_1}{k_2} - 1\right) \frac{\pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}}{1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{k_2}{k_1}} = \dots = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \right) \quad (3.58)$$

3.4.5. A deformação linear correspondente à deformação angular máxima

Considerando a expressão (3.52)

$$k^2 = k_2^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha$$

e a expressão (3.57)

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

obtem-se que

$$k_{\alpha_m}^2 = k_2^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha = k_2^2 \frac{k_1}{k_2} \sin^2 \alpha_m + k_1^2 \frac{k_2}{k_1} \cos^2 \alpha_m = k_1 \cdot k_2 \quad (3.59)$$

pelo que a deformação linear para o azimute α_m correspondente à máxima deformação angular é igual a $\sqrt{k_1 \cdot k_2}$.

3.4.6. A deformação areal

A expressão para a deformação areal m deriva-se a partir da expressão (3.18)

$$A_D = \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

combinando-a com as expressões (3.49) e (3.50) e considerando $F=0$

$$m = \frac{A_P}{A_D} = \frac{\sqrt{e_1 g_1}}{\sqrt{EG}} = k_1 \cdot k_2 \quad (3.60)$$

Para projecções equivalentes, $A_P/A_D=1$ pelo que

$$k_1 \cdot k_2 = 1$$

logo, com base na expressão (3.59) pode concluir-se que nas projecções equivalentes as distâncias na direcção da máxima deformação angular são representadas sem deformação, pois $k_{\alpha_m} = \sqrt{k_1 \cdot k_2} = 1$.

3.5. A indicatriz de Tissot

3.5.1. A teoria da indicatriz

A teoria das distorções de Tissot diz que um círculo, sobre uma superfície *datum*, com centro em P e raio ds pode considerar-se plano dada a sua área infinitamente pequena e que esta área permanece infinitamente pequena e plana na superfície de projecção. De um modo geral, este círculo é projectado

sobre a superfície de projecção como uma elipse. Apenas no caso particular de a superfície *datum* ser paralela à superfície de projecção é que este círculo permanece com a sua forma original, embora a uma escala diferente.

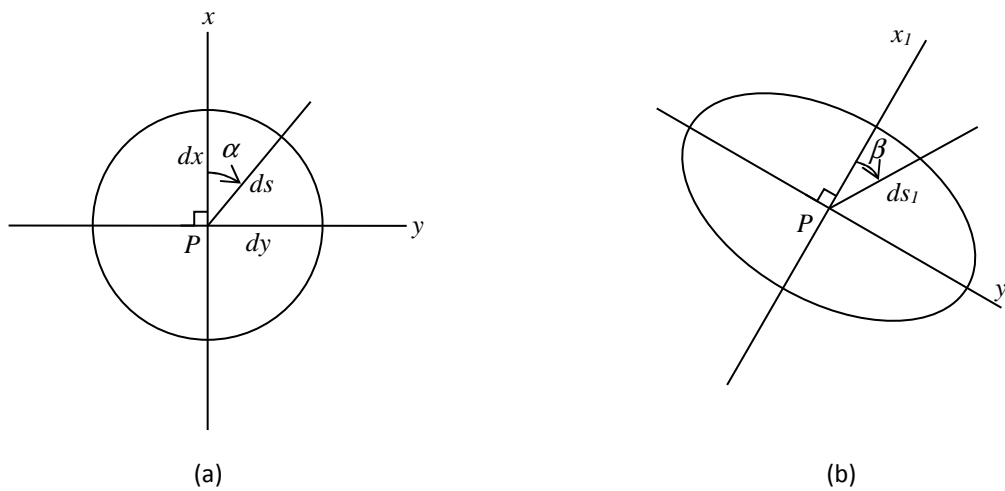


Figura 3.5. A elipse de deformação (elipse de *Tissot*), (a) Superfície datum, (b) Superfície de projecção

Considerando um círculo com centro em P num sistema de coordenadas rectangulares (x, y) e a sua projecção num sistema rectangular correspondente (x_1, y_1) , os eixos coordenados são então as tangentes aos correspondentes sistemas (u, v) em ambas as superfícies. Com base na expressão (3.51) e na figura 3.5.

$$\sin \alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \quad \cos \alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds}$$

$$\begin{cases} dx = ds \cdot \cos \alpha = \sqrt{E} du \\ dy = ds \cdot \sin \alpha = \sqrt{G} dv \end{cases} \quad (3.61)$$

e correspondentemente

$$\begin{cases} dx_1 = ds_1 \cdot \cos \beta = \sqrt{e_1} du \\ dy_1 = ds_1 \cdot \sin \beta = \sqrt{g_1} dv \end{cases} \quad (3.62)$$

Substituindo

$$\begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \cos \alpha \cdot ds \\ dv = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \sin \alpha \cdot ds \end{cases}$$

em (3.62), obtem-se

$$\begin{cases} dx_1 = \sqrt{\frac{e_1}{E}} \cdot \cos \alpha \cdot ds \\ dy_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}} \cdot \sin \alpha \cdot ds \end{cases}$$

recorrendo às expressões (3.49) e (3.50)

$$\begin{cases} dx_1 = k_2 \cdot \cos \alpha \cdot ds \\ dy_1 = k_1 \cdot \sin \alpha \cdot ds \end{cases} \quad (3.63)$$

colocando $\frac{dx_1}{k_2}$ e $\frac{dy_1}{k_1}$ ao quadrado e somando estes dois termos, obtém-se

$$\left(\frac{dx_1}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{k_1}\right)^2 = \cos^2 \alpha \cdot ds^2 + \sin^2 \alpha \cdot ds^2 = ds^2 \quad (3.64)$$

Esta expressão corresponde à equação de uma elipse com semieixo maior (menor) igual a $k_2 \cdot ds$ e semieixo menor (maior) igual a $k_1 \cdot ds$. Considerando que ds é igual a 1, a expressão anterior assume a seguinte forma

$$\left(\frac{dx_1}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{k_1}\right)^2 = 1 \quad (3.65)$$

Esta elipse é designada por *indicatriz de Tissot*, dado que indica as características da projecção na vizinhança de um dado ponto P.

Sabe-se que a área da superfície da Terra que se pode considerar como plana tem um raio de aproximadamente 10 km, podendo até ser maior caso os requisitos de precisão sejam menos exigentes. No interior desta região, pode então escrever-se a equação (3.65) em função das coordenadas (x_1, y_1) de um sistema de coordenadas rectangulares omitindo as derivadas

$$\left(\frac{x_1}{k_2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{k_1}\right)^2 = 1 \quad (3.66)$$

3.5.2. A indicatriz na prática

Foi já demonstrado que um círculo de raio unitário $ds=1$ sobre a superfície datum que possa ser substituído por um plano tangencial local, é de uma forma geral projectado como uma elipse, designada por indicatriz. Demonstrou-se também que o semieixo maior e semieixo menor são iguais à deformação linear máxima e mínima, respectivamente. Estes são então calculados utilizando as expressões (3.50) e (3.49), respectivamente:

$$k_2 = \sqrt{\frac{e_1}{E}}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{g_1}{G}}$$

A máxima distorção angular de um azimute é dada pela expressão (3.58)

$$\text{tg } \delta_m = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \right)$$

A deformação angular num determinado azimute arbitrário α é calculada com base na expressão (3.52)

$$k_\alpha^2 = k_2^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha$$

sendo a deformação linear no azimute correspondente à deformação angular máxima α_m dada pela expressão (3.59)

$$k_{\alpha_m} = \sqrt{k_1 \cdot k_2}$$

A deformação areal é obtida através da expressão (3.60)

$$m = \frac{A_P}{A_D} = k_1 \cdot k_2$$

Chapter 4 Projecções equivalentes

4.1. Considerações gerais

4.1.1. Introdução

Uma projecção diz-se *equivalente* se a deformação areal m tiver um valor constante em todos os pontos, tem-se então que

$$m = \frac{A_p}{A_D} = \frac{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}}{\sqrt{EG - F^2}} = \text{const.}$$

Foi anteriormente demonstrado que a combinação da matriz de transformação fundamental com a condição de equivalência conduz à equação (3.25), utilizando um factor de escala igual a 1

$$EG - F^2 = (e_1 \cdot g_1 - f_1^2) = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}^2$$

No caso das *projecções equivalentes* as áreas não sofrem distorção, a deformação linear varia e os ângulos são deformados. Como anteriormente mencionado, a equivalência e a conformidade não podem ser verificadas completamente em simultâneo. Tal pode ser demonstrado, no caso de uma projecção equivalente, considerando a expressão (3.55)

$$m = k_1 \cdot k_2 = 1$$

para que esta projecção fosse simultaneamente conforme ter-se-ia que verificar, em cada ponto, a seguinte igualdade

$$k_1 = k_2$$

se a deformação linear máxima e mínima forem iguais, e se se designar esse valor por k , tem-se que

$$m = k^2 = 1$$

logo, pode concluir-se que esta última expressão não é possível de ser verificada em todos os pontos da superfície.

4.1.2. A deformação linear

A distorção linear numa direcção arbitrária pode ser determinada através da seguinte expressão

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{e_1 d\phi^2 + 2f_1 \cdot d\phi d\lambda + g_1 d\lambda^2}{Ed\phi^2 + Gd\lambda^2} \quad (4.1)$$

considerando o caso geral de que o sistema ortogonal (ϕ, λ) sobre o elipsóide não é transformado num sistema ortogonal sobre o plano.

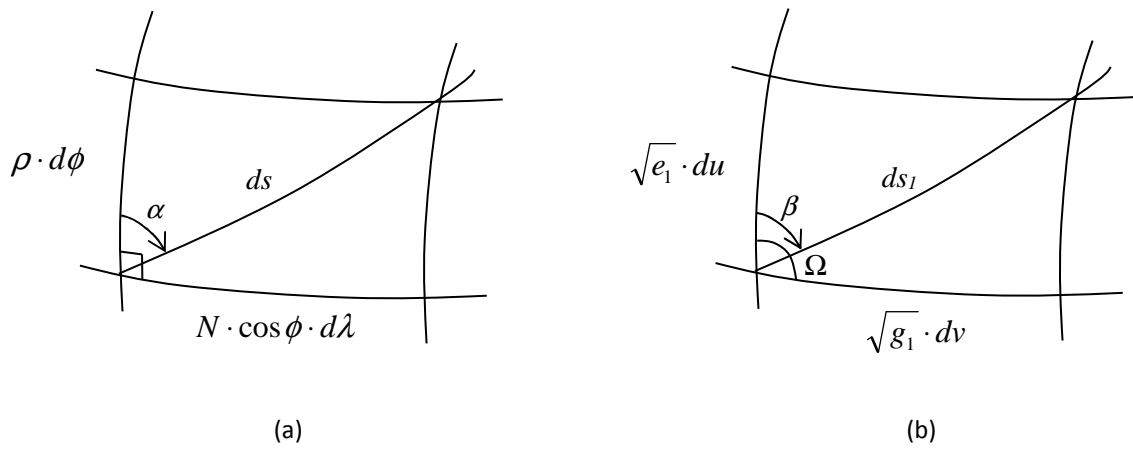


Figura 4.1. O paralelogramo diferencial, (a) *Superfície datum*, (b) *Superfície de projecção*

Considerando a figura 4.1 e as expressões (3.12) e (3.28), a expressão (4.1) passa a escrever-se da seguinte forma

$$k^2 = \frac{e_1 d\phi^2 + 2\sqrt{e_1 \cdot g_1} \cdot \cos \Omega \cdot d\phi d\lambda + g_1 d\lambda^2}{\rho^2 \cdot d\phi^2 + N^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot d\lambda^2} \quad (4.2)$$

com

$$\cos \Omega = \frac{f_1}{\sqrt{e_1 \cdot g_1}} \quad (4.3)$$

Recorrendo às expressões (3.14), (3.16) e (3.27), obtêm-se as seguintes expressões

$$\tan \alpha = \frac{N \cdot \cos \phi}{\rho} \cdot \frac{d\lambda}{d\phi} \quad (4.4)$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{g_1} \cdot \sin \Omega \cdot d\lambda}{\sqrt{e_1} \cdot d\phi + \sqrt{g_1} \cdot \cos \Omega \cdot d\lambda} \quad (4.5)$$

Substituindo (4.4) em (4.5), obtém-se

$$\tan \beta = \frac{\rho \cdot \sqrt{g_1} \cdot \tan \alpha \cdot \sin \Omega}{N \cdot \cos \phi \cdot \sqrt{e_1} + \rho \cdot \sqrt{g_1} \cdot \tan \alpha \cdot \cos \Omega} \quad (4.6)$$

Sendo a *projecção equivalente* e considerando a expressão (3.60) tem-se que

$$\begin{aligned}\rho \cdot N \cdot \cos \phi &= \sqrt{e_1 \cdot g_1 - f_1^2} \Leftrightarrow \\ \rho \cdot N \cdot \cos \phi &= \sqrt{e_1 \cdot g_1 - (\sqrt{e_1 \cdot g_1} \cdot \cos \Omega)^2} \Leftrightarrow \\ \rho \cdot N \cdot \cos \phi &= \sqrt{e_1 \cdot g_1} \cdot \sin \Omega\end{aligned}$$

Logo,

$$\sin \Omega = \frac{\rho \cdot N \cdot \cos \phi}{\sqrt{e_1 \cdot g_1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{e_1 \cdot g_1}{E \cdot G}}} = \frac{1}{k_2 \cdot k_1} \quad (4.7)$$

Multiplicando a expressão (4.6) por ρ , a expressão da $\tan \beta$ passa a escrever-se da seguinte forma

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{\rho^2 \cdot \sqrt{g_1} \cdot \tan \alpha \cdot \sin \Omega}{\rho \cdot N \cdot \cos \phi \cdot \sqrt{e_1} + \rho^2 \cdot \sqrt{g_1} \cdot \tan \alpha \cdot \cos \Omega} = \frac{\sqrt{g_1} \cdot \sin \Omega \cdot (\rho^2 \cdot \tan \alpha)}{\sqrt{g_1} \cdot \sin \Omega \cdot (e_1 + \rho^2 \cdot \tan \alpha \cdot \cot \Omega)} = \\ &= \frac{\rho^2 \cdot \tan \alpha}{\rho^2 \cdot \left(\frac{e_1}{\rho^2} + \tan \alpha \cdot \cot \Omega \right)} = \frac{\tan \alpha}{k_2^2 + \tan \alpha \cdot \cot \Omega}\end{aligned} \quad (4.8)$$

Esta é a expressão geral da transformação de um azimute de um arco sobre o elipsóide no correspondente azimute desse mesmo arco após a projecção.

Numa direcção qualquer, contada a partir do eixo k_2 , tem-se segundo a expressão (3.52) que

$$k^2 = k_2^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha$$

A deformação linear numa determinada direcção torna-se igual à identidade se

$$k^2 = k_2^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha = 1 = k_1 \cdot k_2$$

pelo que

$$k_2 \cos^2 \alpha = k_1 \sin^2 \alpha$$

ou

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \quad (4.9)$$

que é idêntica à expressão (3.57), a qual devolve o valor do azimute α correspondente à deformação angular máxima.

No caso das projecções equivalentes, com $k_1 \cdot k_2 = 1$, a expressão anterior passa a ser a seguinte

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{k_2^2} = \pm k_2 \quad (4.10)$$

4.2. Projecções equivalentes do elipsóide sobre o plano

Considerando sobre o elipsóide as coordenadas curvilíneas ϕ e λ (com $u = \phi$ e $v = \lambda$) então os coeficientes superficiais de Gauss são $E = \rho^2$ e $G = r^2$, em que ρ é o raio principal de curvatura na direcção do meridiano e r é o raio do paralelo num determinado ponto P sobre o elipsóide. Então o elemento linear sobre S é dado por

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2 \phi d\lambda^2 = \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2$$

e sobre o plano, o elemento linear em coordenadas cartesianas x e y (com $u_1 = x$ e $v_1 = y$) é dado por

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2$$

Fazendo as respectivas substituições na seguinte expressão

$$m^2 = \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{EG - F^2} \Leftrightarrow m^2 \cdot (EG - F^2) = e_1 g_1 - f_1^2 \Leftrightarrow$$

$$m^2 \cdot (EG - F^2) = e_1 g_1 - f_1^2 = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \phi} & \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \phi} & \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \end{vmatrix}^2$$

obtem-se

$$m^2 \cdot (EG - F^2) = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix}^2 \Leftrightarrow m \cdot \rho \cdot r = \left| \frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} \right| \quad (4.11)$$

Considerando agora sobre o plano as coordenadas polares R e θ (com $u_1 = R$ e $v_1 = \theta$), o elemento linear é dado por

$$ds_1^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2$$

obtendo-se a seguinte expressão geral das representações equivalentes em coordenadas polares

$$m^2 \cdot (EG - F^2) = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial \phi} & \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \phi} & \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \end{vmatrix}^2 \Leftrightarrow m \cdot \rho \cdot r = R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} - \frac{\partial R}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| \quad (4.12)$$

As expressões (4.11) e (4.12) são as expressões gerais das representações equivalentes entre o elipsóide, com um sistema de coordenadas ortogonais (ϕ, λ) , e o plano com um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e polares (R, θ) , respectivamente.

4.3. A projecção pseudo-cónica equivalente de Bonne

4.3.1. Introdução

A projecção de Bonne é uma projecção cónica, equivalente, normal com uma linha de contacto tangente ao paralelo de referência. Nesta projecção apenas o meridiano central de referência é uma linha recta e os meridianos e círculos de paralelo não formam um sistema ortogonal no plano. A deformação linear ao longo do meridiano central e ao longo de todos os paralelos é igual a 1, não sendo preservada a escala ao longo dos restantes meridianos.

O arco de meridiano σ entre o paralelo de latitude ϕ_0 e um paralelo de latitude ϕ (os quais são projectados como círculos concêntricos em torno do vértice do cone) é calculado por

$$\sigma = \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi \quad (4.13)$$

Como tal os círculos paralelos não são igualmente espaçados, tendo ρ um valor diferente em função da latitude. A distância ao longo de um paralelo à latitude ϕ desde o meridiano central λ_0 até ao meridiano de longitude λ é igual a

$$(\lambda - \lambda_0) \cdot N \cdot \cos \phi \quad (4.14)$$

Tal é ilustrado na figura 4.2, onde a rede paramétrica é desenhada na projecção de Bonne.

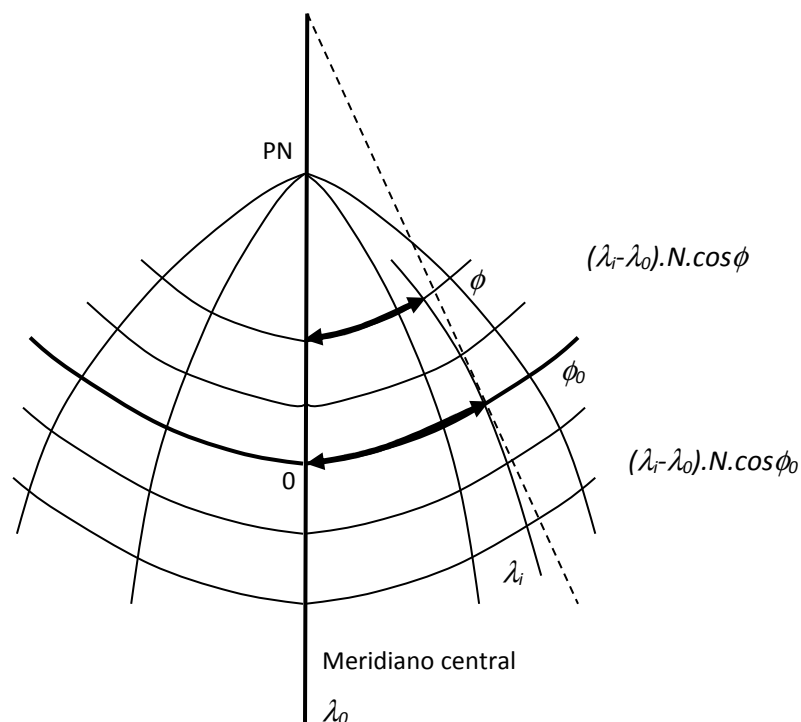


Figura 4.2. A rede paramétrica na projecção de Bonne.

Os eixos principais da indicatriz de Tissot não coincidem com o sistema de curvas paramétricas (ϕ, λ) . Tal requer cálculos adicionais com vista à determinação de k_1 e k_2 conforme já mostrado na secção 4.1.2.

Os sistemas cartográficos equivalentes têm como se sabe um interesse geodésico reduzido para mapas de escala média em virtude das grandes deformações lineares e angulares. No entanto, para regiões alongadas na direcção Norte-Sul e estreitas na direcção Este-Oeste, como é o caso de Portugal continental, a projecção de Bonne tem deformações angulares pequenas, sendo praticamente conforme. De facto, a projecção de Bonne é mesmo rigorosamente conforme sobre o meridiano central e sobre o paralelo central.

4.3.2. A projecção de Bonne.

Comecemos por impor a condição de que os paralelos sejam representados por arcos de circunferência concêntricos, pelo que é conveniente adoptar coordenadas polares sobre o plano e fazer com que o raio polar R seja função exclusiva da latitude ϕ

$$R = R(\phi) \quad (4.15)$$

Impondo esta condição, a equação geral das projecções equivalentes (4.12) reduz-se a

$$m \cdot \rho \cdot r = R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right| \quad (4.16)$$

donde

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \pm \frac{m \cdot \rho \cdot r}{R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|} \quad (4.17)$$

Com a condição imposta as fórmulas de transformação são então

$$\begin{cases} R = R(\phi) \\ \theta = \pm \frac{m \cdot \rho \cdot r}{R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|} \cdot \lambda + const. \end{cases} \quad (4.18)$$

Considerando que esta constante é nula, resulta que para $\lambda = 0$ o valor de $\theta = 0$ e portanto tem-se o meridiano origem das longitudes, o qual se vai tomar como sendo o meridiano central da projecção e que será representado pelo eixo polar (apenas o meridiano central da projecção é ortogonal a todos os círculos paralelos). As fórmulas de transformação (4.18) ficam então

$$\begin{cases} R = R(\phi) \\ \theta = \pm \frac{m \cdot \rho \cdot r}{R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|} \cdot \lambda \end{cases} \quad (4.19)$$

Nestas fórmulas dispomos de dois graus de liberdade, representados pela função arbitrária $R(\phi)$ e pela constante m . Os elementos lineares sobre o elipsóide e sobre o plano são respectivamente

$$\begin{aligned} ds^2 &= \rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2 \\ ds_1^2 &= dR^2 + R^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

Introduzindo, provisoriamente, a quantidade $F(\phi)$

$$F(\phi) = \frac{\rho \cdot r}{R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|} \quad (4.20)$$

as fórmulas (4.19) passam a ter a seguinte forma

$$\begin{cases} R = R(\phi) \\ \theta = \pm m \cdot \lambda \cdot F(\phi) \end{cases} \quad (4.21)$$

Para calcular ds_1^2 é necessário determinar dR e $d\theta$

$$\begin{cases} dR = \frac{\partial R}{\partial \phi} \cdot d\phi \\ d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \cdot d\phi + \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \cdot d\lambda = m \cdot \lambda \cdot \frac{dF}{d\phi} \cdot d\phi + m \cdot F(\phi) \cdot d\lambda = \\ = m \cdot \left(\lambda \cdot \frac{dF}{d\phi} \cdot d\phi + F(\phi) \cdot d\lambda \right) \end{cases} \quad (4.22)$$

O elemento linear ds_1^2 será então dado por

$$ds_1^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2 \cdot d\phi^2 + R^2 \cdot m^2 \cdot \left(\lambda \cdot \frac{dF}{d\phi} \cdot d\phi + F(\phi) \cdot d\lambda \right)^2 \quad (4.23)$$

A deformação linear sobre o meridiano central ($\lambda=0$) e na direcção do meridiano central ($d\lambda=0$) será então dado por

$$k = \frac{ds_1}{ds} = \frac{\left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right| \cdot d\phi}{\rho \cdot d\phi} = \frac{\left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|}{\rho} \quad (4.24)$$

Impondo que esta deformação seja a mesma em todos os pontos do meridiano central, resulta que

$$k = \frac{\left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|}{\rho} = \text{const.} > 0$$

donde se obtém, integrando esta expressão, que

$$R = \pm k \cdot \int \rho \cdot d\phi + \text{const.} \quad (4.25)$$

correspondendo o sinal positivo ao caso de R crescer com ϕ e o sinal negativo ao caso de R decrescer com ϕ (Figura 4.3).

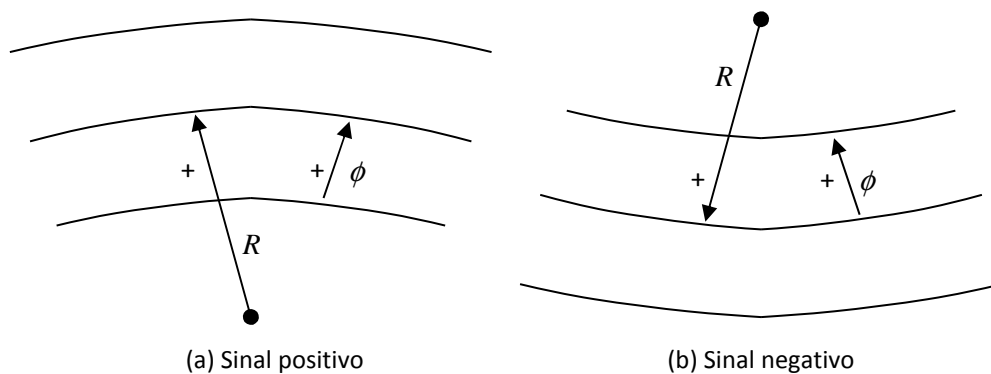


Figura 4.3. Sinal a atribuir ao raio polar R consoante no caso de o seu valor crescer com a latitude (a) e no caso de o seu valor decrescer com a latitude (b).

Se representarmos por ϕ_0 a latitude do paralelo central da projecção e por R_0 o raio do arco de circunferência correspondente, então a expressão (4.25) passa a escrever-se da seguinte forma

$$R_0 = \pm k \cdot \left| \int \rho \cdot d\phi \right|_{\phi=\phi_0} + \text{const.} \quad (4.26)$$

Sendo const. uma constante qualquer, esta pode ser eliminada conjugando as expressões (4.25) e (4.26), obtendo-se

$$R = R_0 \pm k \cdot \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi \quad (4.27)$$

Note-se que o integral $\int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi$ representa o arco de meridiano σ (Figura 4.4) entre o paralelo de latitude ϕ_0 e um paralelo de latitude ϕ expresso na equação (4.13).

No caso de uma projecção de uma zona no hemisfério Norte, deverá ser adoptado o sinal negativo para que o valor de R cresça do polo Norte para o ponto e a ϕ cresça do equador para o polo Norte (ou seja, que as duas coordenadas tenham sentidos contrários de crescimento).

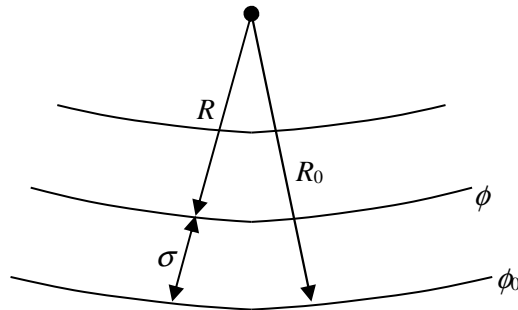


Figura 4.4. Relação entre o raio vector (R) de um dado paralelo e o raio vector do paralelo de referência (R_0).

Neste caso, a expressão (4.27) assume o seguinte aspecto

$$R = R_0 - k \cdot \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi \quad (4.28)$$

Numa tentativa de fazer com que o sistema seja conforme no meridiano central e na direcção dos paralelos vamos impor que a deformação linear no meridiano central ($\lambda = 0$) e na direcção dos paralelos ($d\lambda = 0$) seja igual, obtendo-se deste modo os seguintes elementos lineares sobre o elipsóide e sobre o plano, respectivamente

$$ds^2 = r^2 d\lambda^2$$

$$ds_1^2 = R^2 \cdot m^2 \cdot F^2(\phi) \cdot d\lambda^2$$

logo, a deformação linear é igual a

$$k = \frac{ds_1}{ds} = \frac{R \cdot m \cdot F(\phi) \cdot d\lambda}{r \cdot d\lambda} = \frac{R \cdot m \cdot F(\phi)}{r}$$

Substituindo $F(\phi)$ pela sua expressão em (4.20), obtem-se

$$k = \frac{R \cdot m \cdot F(\phi)}{r} = \frac{R \cdot m \cdot \frac{\rho \cdot r}{R \cdot \left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|}}{r} = \frac{m \cdot \rho}{\left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|}$$

tendo em consideração a expressão (4.24), a expressão anterior passa a ter a seguinte forma

$$k = \frac{m \cdot \rho}{\left| \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|} = \frac{m}{k} \Leftrightarrow k = \sqrt{m} \quad (4.29)$$

Introduzindo estes novos elementos, as fórmulas de transformação (4.19) passam a escrever-se da seguinte maneira

$$\begin{cases} R = R_0 - k \cdot \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi \\ \theta = \pm \frac{\sqrt{m} \cdot r}{R} \cdot \lambda \end{cases} \quad (4.30)$$

Na expressão do θ poderia ter sido omitido o sinal, bastando escolher o sentido crescente de θ de acordo com o sentido de crescimento de λ para que a carta não fique invertida.

A última etapa consiste em impor que a deformação linear seja tanto quanto possível constante, ou seja, que a projecção seja tanto quanto possível conforme. Vai-se então impor como condição que a deformação linear k respeitante aos elementos lineares sobre o paralelo central ($\phi = \phi_0$) e sobre o meridiano central ($d\lambda = 0$) seja igual a \sqrt{m} . Deste modo, sobre o elipsóide tem-se a seguinte expressão para o elemento linear

$$ds^2 = \rho_0^2 d\phi^2$$

e sobre o plano tem-se que

$$ds_1^2 = dR^2 + R_0^2 \cdot d\theta^2 \quad (4.31)$$

como, a partir da primeira expressão em (4.22), se sabe que

$$dR = \frac{\partial R}{\partial \phi} \cdot d\phi$$

pode obter-se uma nova expressão para dR com base nas expressões (4.24) e (4.29)

$$\begin{aligned} dR &= k \cdot \rho_0 \cdot d\phi = \sqrt{m} \cdot \rho_0 \cdot d\phi \Leftrightarrow \\ dR^2 &= m \cdot \rho_0^2 \cdot d\phi^2 \end{aligned}$$

Relativamente a $d\theta$, e considerando novamente as expressões em (4.22), tem-se que

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \cdot d\phi$$

derivando a expressão de θ nas equações (4.30)

$$d\theta = \left(-\frac{\sqrt{m} \cdot \lambda}{R_0} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial \phi} - \frac{\sqrt{m} \cdot \lambda \cdot r_0}{R_0^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \phi} \right) \cdot d\phi = \left(\frac{\sqrt{m} \cdot \lambda \cdot \sin \phi_0 \cdot \rho_0}{R_0} - \frac{m \cdot \lambda \cdot r_0 \cdot \rho_0}{R_0^2} \right) \cdot d\phi$$

Substituindo dR e $d\theta$ na expressão (4.31), o elemento linear sobre o plano é

$$ds_1^2 = m \cdot \rho_0^2 \cdot d\phi^2 + R_0^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{m} \cdot \lambda \cdot \sin \phi_0 \cdot \rho_0}{R_0} - \frac{m \cdot \lambda \cdot r_0 \cdot \rho_0}{R_0^2} \right)^2 \cdot d\phi^2$$

e consequentemente, a deformação linear será então dada por

$$\begin{aligned} k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} &= \frac{m \cdot \rho_0^2 \cdot d\phi^2 + R_0^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{m} \cdot \lambda \cdot \sin \phi_0 \cdot \rho_0}{R_0} - \frac{m \cdot \lambda \cdot r_0 \cdot \rho_0}{R_0^2} \right)^2 \cdot d\phi^2}{\rho_0^2 d\phi^2} = \\ &= m + R_0^2 \cdot \lambda^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{m} \cdot \sin \phi_0}{R_0} - \frac{m \cdot r_0}{R_0^2} \right)^2 = m \end{aligned}$$

Para que esta igualdade seja verificada para qualquer valor de λ , tem que se verificar a seguinte condição

$$\begin{aligned} R_0^2 \cdot \lambda^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{m} \cdot \sin \phi_0}{R_0} - \frac{m \cdot r_0}{R_0^2} \right)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ R_0 &= \frac{m \cdot r_0}{\sqrt{m} \cdot \sin \phi_0} = \frac{\sqrt{m} \cdot N_0 \cdot \cos \phi_0}{\sin \phi_0} = \sqrt{m} \cdot N_0 \cdot \cot \phi_0 \end{aligned}$$

Logo, as fórmulas de transformação finais são as seguintes

$$\begin{cases} R = R_0 - \sqrt{m} \cdot \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi \\ R_0 = \sqrt{m} \cdot N_0 \cdot \cot \phi_0 \\ \theta = \pm \frac{\sqrt{m} \cdot r}{R} \cdot \lambda \end{cases} \quad (4.32)$$

Estas são as fórmulas da projecção de Bonne. Fazendo $m=1$, como é o caso da cartografia portuguesa continental, obtém-se

$$\begin{cases} R = R_0 - \int_{\phi_0}^{\phi} \rho \cdot d\phi = R_0 - \sigma \\ R_0 = N_0 \cdot \cot \phi_0 \\ \theta = \pm \frac{r \cdot \lambda}{R} \end{cases} \quad (4.33)$$

4.3.2. Interpretação geométrica da projecção de Bonne

Trace-se uma recta representativa do meridiano central e escolha-se um ponto O para centro dos arcos de circunferência representativos do paralelo. Trace-se um arco de raio R_0 (Figura 4.5).

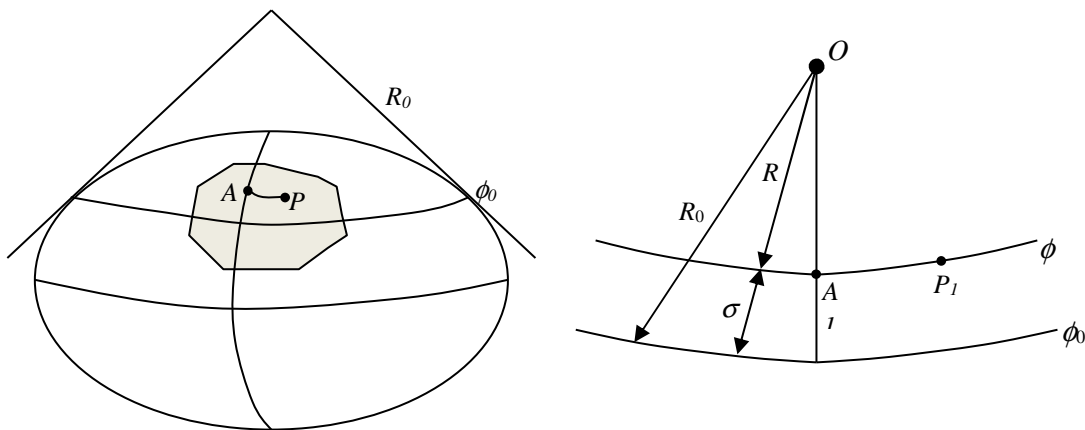


Figura 4.5. Projecção equivalente de Bonne.

$$R_0 = N_0 \cdot \cot \phi_0$$

Desta forma temos representado o paralelo central. Note-se que R_0 é o lado do cone circunscrito ao elipsóide e tangente ao longo do paralelo central de latitude ϕ_0 .

Para representar um ponto genérico P , trace-se o arco de circunferência de raio R

$$R = R_0 - \sigma$$

sendo σ o arco de meridiano entre as latitudes ϕ_0 e ϕ . O arco traçado é a imagem do paralelo que passa por P . Marcando sobre ele um comprimento A_1P_1 igual ao correspondente AP sobre o elipsóide, fica assim definido o mecanismo geométrico da correspondência.

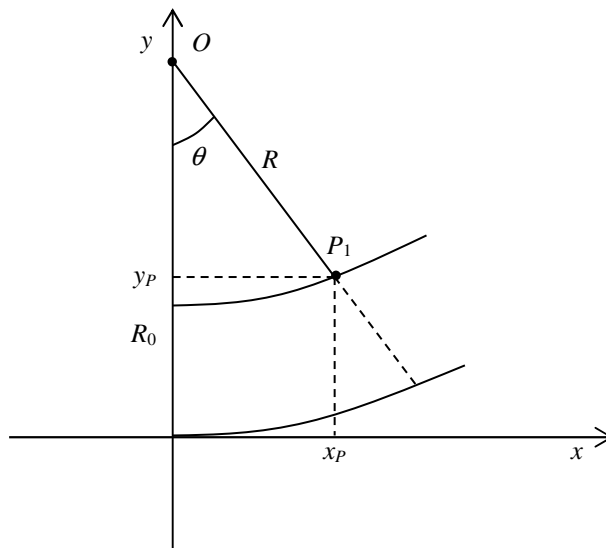


Figura 4.6. Sistema de coordenadas polares na projecção de Bonne.

As coordenadas cartesianas rectangulares são então dadas pelas expressões

$$\begin{cases} x_{P_1} = R \cdot \sin \theta = (R_0 - \sigma) \cdot \sin \theta \\ y_{P_1} = R_0 - R \cdot \cos \theta = R_0 - (R_0 - \sigma) \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (4.34)$$

em que

$$\begin{aligned} R_0 &= N_0 \cdot \cot \phi_0 \\ R &= R_0 - \sigma \\ \theta &= \frac{r \cdot \lambda}{R} \end{aligned}$$

A transformação directa fica resolvida pelas expressões anteriores. Para a transformação inversa têm-se as seguintes expressões

$$\begin{cases} \theta = \arctan \left(\frac{x_{P_1}}{R_0 - y_{P_1}} \right) \\ R = \frac{R_0 - y_{P_1}}{\cos \theta} = \frac{x_{P_1}}{\sin \theta} \end{cases} \quad (4.35)$$

em que

$$R_0 = N_0 \cdot \cot \phi_0$$

$$\sigma = R_0 - R$$

$$\lambda = \frac{R \cdot \theta}{r}$$

Chapter 5 Projecções conformes ou isogónicas

5.1. Considerações gerais

5.1.1. Introdução

Uma projecção diz-se conforme ou isogónica se a deformação linear k for independente do azimute, isto é, o seu valor terá de ser o mesmo em todas as direcções. Foi anteriormente demonstrado que a combinação da matriz de transformação fundamental com a condição de conformidade conduz à equação (3.24).

$$k^2 = \frac{e_1}{E} = \frac{f_1}{F} = \frac{g_1}{G}$$

Assumindo dois sistemas ortogonais correspondentes ($F_1 = F = f_1 = 0$)

$$k^2 = \frac{e_1}{E} = \frac{g_1}{G} \quad (5.1)$$

pelo que, neste caso, as expressões (3.20) passam a ser

$$\begin{cases} e_1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 \cdot E_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 \cdot G_1 \\ f_1 = \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot E_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u} \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot G_1 = 0 \\ g_1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 \cdot E_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 \cdot G_1 \end{cases} \quad (5.2)$$

combinando (5.1) e (5.2) obtêm-se as seguintes condições de conformidade

$$\begin{cases} e_1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 \cdot E_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 \cdot G_1 = E \cdot k^2 \\ f_1 = \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial u_1}{\partial v} \cdot E_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u} \frac{\partial v_1}{\partial v} \cdot G_1 = 0 \\ g_1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 \cdot E_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 \cdot G_1 = G \cdot k^2 \end{cases} \quad (5.3)$$

Para que a deformação linear k seja independente do azimute, a derivada de k em ordem a α tem de ser nula. Sendo a deformação linear dada pela expressão (3.43) na secção 3.4.1

$$k^2 = e \cdot \cos^2 \alpha + 2f \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + g \cdot \sin^2 \alpha$$

tem-se então que

$$\frac{d}{d\alpha}(k^2) = (g - e) \cdot \sin 2\alpha + 2f \cdot \cos 2\alpha = 0$$

logo

$$\tan 2\alpha = \frac{2f}{(e - g)} \quad (5.4)$$

Devendo esta equação ser verificada para qualquer valor de α , verifica-se, em particular, que para $\alpha = 0$ e $\alpha = 45^\circ$, o valor da expressão (5.4) é igual a

$$\alpha = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \tan 2\alpha = +\infty \Rightarrow e - g = 0 \Leftrightarrow e = g$$

Assim, para uma representação conforme a expressão (3.43) passa a escrever-se da seguinte forma

$$k^2 = e \cdot \cos^2 \alpha + e \cdot \sin^2 \alpha = e \quad (5.5)$$

A indicatriz da deformação linear será então uma circunferência; sendo $k_1 = k_2$ a expressão da deformação angular (3.56) reduz-se a

$$\operatorname{tg} \delta = \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg}^2 \alpha} = 0 \quad (5.6)$$

ou seja, a deformação angular é nula para todos os azimutes. Sendo assim, o ângulo entre dois elementos não é alterado pela representação.

5.1.2. Sistemas de coordenadas isométricas. A deformação linear

As unidades de medida ao longo dos eixos coordenados (u , v) podem tornar-se iguais conforme demonstrado na secção 3.3.2. Considerando as expressões do elemento linear sobre o elipsóide

$$ds^2 = E \cdot du^2 + G \cdot dv^2$$

e sobre o plano

$$ds_1^2 = E_1 \cdot du_1^2 + G_1 \cdot dv_1^2$$

tem-se que

$$ds^2 = G \cdot (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

com

$$\begin{cases} d\bar{u} = \sqrt{\frac{E}{G}} du \Leftrightarrow du = \sqrt{\frac{G}{E}} d\bar{u} \\ d\bar{v} = dv \end{cases} \quad (5.7)$$

e também que

$$ds_1^2 = G_1 \cdot (d\bar{u}_1^2 + d\bar{v}_1^2)$$

com

$$\begin{cases} d\bar{u}_1 = \sqrt{\frac{E_1}{G_1}} du_1 \Leftrightarrow du_1 = \sqrt{\frac{G_1}{E_1}} d\bar{u}_1 \\ d\bar{v}_1 = dv_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

substituindo (5.7) e (5.8) em (5.3)

$$\begin{cases} e_1 = \left(\frac{\sqrt{\frac{G_1}{E_1}} d\bar{u}_1}{\sqrt{\frac{G}{E}} d\bar{u}} \right)^2 \cdot E_1 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\sqrt{\frac{G}{E}} d\bar{u}} \right)^2 \cdot G_1 = E \cdot k^2 \\ f_1 = \frac{\sqrt{\frac{G_1}{E_1}} d\bar{u}_1}{\sqrt{\frac{G}{E}} d\bar{u}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{G_1}{E_1}} d\bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \cdot E_1 + \frac{\partial \bar{v}_1}{\sqrt{\frac{G}{E}} d\bar{u}} \cdot \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \cdot G_1 = 0 \\ g_1 = \left(\frac{\sqrt{\frac{G_1}{E_1}} d\bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \cdot E_1 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \cdot G_1 = G \cdot k^2 \end{cases}$$

obtem-se, após algumas transformações da primeira e da terceira equação, que

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \right)^2 = \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \quad (5.9)$$

e, da segunda equação, que

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right) = - \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right) \quad (5.10)$$

reescrevendo esta expressão da seguinte forma

$$\frac{\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}}\right)}{\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}}\right)} = -\frac{\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}}\right)}{\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}}\right)} = \eta$$

representando por η o valor comum das duas fracções. Separando as duas fracções desta expressão, resulta que

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} = \eta \cdot \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \quad \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} = -\eta \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}}$$

substituindo estas expressões em (5.9), tem-se que

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} = \pm \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \quad (5.11)$$

e substituindo (5.11) em (5.10), obtém-se a seguinte igualdade

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} = \pm \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \quad (5.12)$$

as equações (5.11) e (5.12) constituem as condições de conformidade.

Existindo parâmetros isométricos tanto na superfície *datum* como na superfície de projecção, então a projecção

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = q_1(\bar{u}, \bar{v}) \\ \bar{v}_1 = q_2(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases} \quad (5.13)$$

é conforme se forem verificadas as equações (5.11) e (5.12).

As equações (5.11) e (5.12) contêm as condições de Cauchy-Riemann que definem a condição necessária e suficiente para que uma qualquer função seja analítica, sendo por isso designadas por equações de Cauchy-Riemann. Deste modo, as derivadas parciais em (5.11) e (5.12) podem ser consideradas como as derivadas parciais da parte real e imaginária da equação

$$\bar{u}_1 + i \cdot \bar{v}_1 = q(\bar{u} + i \cdot \bar{v}) \quad (5.14)$$

sendo $q_1(\bar{u}, \bar{v})$ e $q_2(\bar{u}, \bar{v})$ a parte real e imaginária da expressão (5.13), respectivamente. A expressão (5.14) é designada por expressão geral das representações conformes. O termo da direita da expressão (5.14) pode ser expandido numa série de potências, obtendo-se

$$\bar{u}_1 + i \cdot \bar{v}_1 = (\bar{u} + i \cdot \bar{v}) + (A + i \cdot B) \cdot (\bar{u} + i \cdot \bar{v})^2 + (C + i \cdot D) \cdot (\bar{u} + i \cdot \bar{v})^3 + \dots \quad (5.15)$$

A escolha desta expansão pressupõe que

- (1) as origens em ambos os sistemas sejam pontos correspondentes;

(2) a deformação linear k nas origens seja igual a 1 ($k_0= 1$), e;

(3) ambos os sistemas tenham a mesma orientação.

Separando a parte real da imaginária em (5.15), resulta que

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \bar{u} + A \cdot (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) - 2 \cdot B \cdot \bar{u} \cdot \bar{v} + C \cdot (\bar{u}^3 - 3 \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}^2) + D \cdot (-3 \cdot \bar{u}^2 \cdot \bar{v} + \bar{v}^3) + \dots \\ \bar{v}_1 = \bar{v} + 2 \cdot A \cdot \bar{u} \cdot \bar{v} + B \cdot (\bar{u}^2 - \bar{v}^2) + C \cdot (3 \cdot \bar{u}^2 \cdot \bar{v} - \bar{v}^3) + D \cdot (\bar{u}^3 - 3 \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}^2) + \dots \end{cases} \quad (5.16)$$

Os elementos lineares sobre a superfície *datum* e sobre a superfície de projecção podem ser escritos, respectivamente, em termos de parâmetros isométricos

$$ds^2 = G \cdot (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

e

$$ds_1^2 = G_1 \cdot (d\bar{u}_1^2 + d\bar{v}_1^2)$$

A deformação linear, em termos de coordenadas isométricas, é então

$$k^2 = \frac{G_1 \cdot (d\bar{u}_1^2 + d\bar{v}_1^2)}{G \cdot (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)} \quad (5.17)$$

sendo

$$\begin{cases} d\bar{u}_1 = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} \cdot d\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \cdot d\bar{v} \\ d\bar{v}_1 = \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \cdot d\bar{u} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \cdot d\bar{v} \end{cases}$$

obtem-se, considerando as igualdades em (5.9) e (5.10), que

$$d\bar{u}_1^2 + d\bar{v}_1^2 = \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \right)^2 \right] \cdot (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2) = \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \right] \cdot (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

substituindo em (5.17), resulta que

$$k^2 = \frac{G_1}{G} \cdot \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{u}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{u}} \right)^2 \right] = \frac{G_1}{G} \cdot \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{v}} \right)^2 \right] \quad (5.18)$$

Derivando as expressões (5.11) e (5.12), obtêm-se as seguintes relações

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial \bar{v}^2} = \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{v}^2} = 0 \quad (5.19)$$

as quais constituem as equações de Laplace para \bar{u}_1 e \bar{v}_1 com respeito aos parâmetros independentes \bar{u} e \bar{v} .

5.2. Projecção de Gauss

5.2.1. Introdução

A projecção de Gauss, também designada por transversa de Mercator, é uma projecção conforme, cilíndrica e transversa que se presta à representação de zonas alongadas na direcção N-S e estreitas na direcção E-W (Figura 5.1). Sendo uma projecção conforme, esta mantém a forma dos elementos infinitamente pequenos e consequentemente os ângulos (direcções), no entanto esta mantém também os comprimentos ao longo do meridiano central da projecção.

A projecção de Gauss difere da de Mercator no que diz respeito à posição da superfície de projecção relativamente à superfície *datum*, sendo que nesta última o cilindro fica numa posição normal à superfície *datum*. Deste modo, a projecção de Mercator presta-se à representação de zonas alongadas na direcção E-W e mantém os comprimentos ao longo do equador.

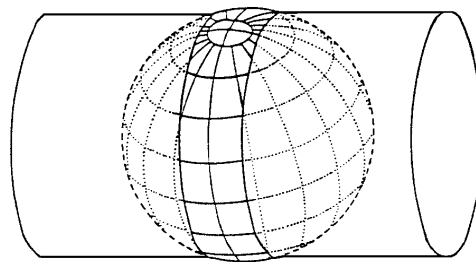


Figura 5.1. Projecção transversa de mercator.

5.2.2. Fórmulas de transformação directa

Na projecção de Gauss a linha de tangência do cilindro assume uma posição transversa relativamente ao equador, sendo a linha transversa o meridiano central da zona a representar. Impondo a condição de conformidade (5.14) e designando q por f , sendo f uma função analítica qualquer, tem-se que

$$y + i \cdot x = f(\Phi + i \cdot \lambda) \quad (5.20)$$

para $\lambda = 0$ é evidente que

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= f(\Phi) \end{aligned}$$

o eixo oy representa o meridiano origem das longitudes que deverá ser, naturalmente, o meridiano central da zona.

Seja $d\sigma$ um elemento do meridiano central então temos que $d\lambda=0$ e que

$$d\sigma = \rho \cdot d\phi = r \cdot d\Phi \quad (5.21)$$

resultando esta igualdade da definição de Φ . Este elemento será representado na carta por

$$d\sigma_1 = dy = \frac{df}{d\Phi} d\Phi \quad (5.22)$$

Querendo que sobre o meridiano central não haja deformação linear, então o valor de k tem de ser igual a 1

$$k = \frac{d\sigma_1}{d\sigma} = \frac{dy}{d\sigma} = \frac{df}{d\Phi} \cdot \frac{d\Phi}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{d\Phi} = 1$$

donde se obtém que

$$\frac{df}{d\Phi} = r \quad (5.23)$$

e então nesse caso a função f é dada por

$$f(\Phi) = \int_0^{\Phi} r \cdot d\Phi = \int_0^{\phi} \rho \cdot d\phi \quad (5.24)$$

Desenvolvendo a expressão (5.20) em série de Mac-Laurin e separando a parte real da imaginária, tem-se que

$$\begin{aligned} y &= f(\Phi) - \frac{\lambda^2}{2!} \cdot \left(\frac{d^2 f}{d\Phi^2} \right)_{\lambda=0} + \frac{\lambda^4}{4!} \cdot \left(\frac{d^4 f}{d\Phi^4} \right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^6}{6!} \cdot \left(\frac{d^6 f}{d\Phi^6} \right)_{\lambda=0} + \dots \\ x &= \lambda \cdot \left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^3}{3!} \cdot \left(\frac{d^3 f}{d\Phi^3} \right)_{\lambda=0} + \frac{\lambda^5}{5!} \cdot \left(\frac{d^5 f}{d\Phi^5} \right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^7}{7!} \cdot \left(\frac{d^7 f}{d\Phi^7} \right)_{\lambda=0} + \dots \end{aligned} \quad (5.25)$$

As derivadas da função f em ordem a Φ são calculadas a partir da expressão (5.24), obtendo-se as seguintes expressões

$$f(\Phi) = \int_0^{\phi} \rho \cdot d\phi = \int_0^{\phi} d\sigma = \sigma$$

$$\frac{df}{d\Phi} = r = N \cdot \cos \phi$$

$$\frac{d^2 f}{d\Phi^2} = \frac{dr}{d\Phi} = \frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\Phi} = -\sin \phi \cdot \rho \cdot \frac{r}{\rho} = -r \cdot \sin \phi = -N \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 f}{d\Phi^3} &= \frac{d}{d\Phi} (-r \cdot \sin \phi) = -\frac{dr}{d\Phi} \cdot \sin \phi - r \cdot \cos \phi \cdot \frac{d\phi}{d\Phi} = -r \cdot \sin^2 \phi - r \cdot \cos \phi \cdot \frac{r}{\rho} = \\ &= -N \cdot \cos^3 \phi \cdot \left[\frac{N}{\rho} - \tan^2 \phi \right] = -N \cdot \cos^3 \phi \cdot k_1 \end{aligned}$$

e de modo análogo para os restantes termos de ordem superior

$$\frac{d^4 f}{d\Phi^4} = N \cdot \sin \phi \cdot \cos^3 \phi \cdot \left[\frac{N}{\rho} + 4 \cdot \frac{N^2}{\rho^2} - \tan^2 \phi \right] = N \cdot \sin \phi \cdot \cos^3 \phi \cdot k_2$$

$$\frac{d^5 f}{d\Phi^5} = N \cdot \cos^5 \phi \cdot \left[4 \cdot \frac{N^3}{\rho^3} \cdot (1 - 6 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) + \frac{N^2}{\rho^2} \cdot (1 + 8 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) - 2 \cdot \frac{N}{\rho} \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi \right] = N \cdot \cos^5 \phi \cdot k_3$$

$$\begin{aligned} \frac{d^6 f}{d\Phi^6} &= N \cdot \sin \phi \cdot \cos^5 \phi \cdot \left[8 \cdot \frac{N^4}{\rho^4} \cdot (11 - 24 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) - 28 \cdot \frac{N^3}{\rho^3} \cdot (1 - 6 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{N^2}{\rho^2} \cdot (1 - 32 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) - 2 \cdot \frac{N}{\rho} \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi \right] = N \cdot \sin \phi \cdot \cos^5 \phi \cdot k_4 \end{aligned}$$

$$\frac{d^7 f}{d\Phi^7} = N \cdot \cos^7 \phi \cdot [61 - 479 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 179 \cdot \operatorname{tg}^4 \phi - \operatorname{tg}^6 \phi] = N \cdot \cos^7 \phi \cdot k_5$$

$$\frac{d^8 f}{d\Phi^8} = N \cdot \sin \phi \cdot \cos^7 \phi \cdot [1385 - 3111 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 543 \cdot \operatorname{tg}^4 \phi + \operatorname{tg}^6 \phi] = N \cdot \sin \phi \cdot \cos^7 \phi \cdot k_6$$

substituindo nas expressões de x e de y , obtem-se

$$\begin{aligned} y &= \sigma + \frac{\lambda^2}{2} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi + \frac{\lambda^4}{24} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^3 \phi \cdot k_2 + \frac{\lambda^6}{720} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^5 \phi \cdot k_4 \\ &\quad + \frac{\lambda^8}{40320} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^7 \phi \cdot k_6 \\ x &= \lambda \cdot N \cdot \cos \phi + \frac{\lambda^3}{6} \cdot N \cos^3 \phi \cdot k_1 + \frac{\lambda^5}{120} \cdot N \cos^5 \phi \cdot k_3 + \frac{\lambda^7}{5040} \cdot N \cos^7 \phi \cdot k_5 \end{aligned} \tag{5.26}$$

sendo λ a diferença de longitude entre o ponto e o meridiano central da projecção.

5.2.3. Fórmulas de transformação inversa

As fórmulas de transformação inversa são as seguintes

$$\begin{aligned}
\phi = \phi' - \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left(\frac{M^2}{2 \cdot k_0 \cdot N} \right) + \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left(\frac{M^4}{24 \cdot k_0^3 \cdot N^3} \right) \cdot (-4\psi^2 + 9\psi \cdot (1-t^2) + 12t^2) - \\
- \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left(\frac{M^6}{720 \cdot k_0^5 \cdot N^5} \right) \cdot (8\psi^4 \cdot (11-24t^2) - 12\psi^3 \cdot (21-71t^2) + 15\psi^2 \cdot (15-98t^2 + 15t^4) + \\
+ 180\psi \cdot (5t^2 - 3t^4) - 360t^4) + \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left(\frac{M^8}{40320 \cdot k_0^7 \cdot N^7} \right) \cdot (1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6) \\
(\lambda - \lambda_0) \cdot \cos \phi' = \left(\frac{M}{k_0 \cdot N} \right) - \left(\frac{M^3}{6 \cdot k_0^3 \cdot N^3} \right) \cdot (\psi + 2t^2) + \\
+ \left(\frac{M^5}{120 \cdot k_0^5 \cdot N^5} \right) \cdot (-4\psi^3 \cdot (1-6t^2) + \psi^2 \cdot (9-68t^2) + 72\psi t^2 + 24t^4) - \\
- \left(\frac{M^7}{5040 \cdot k_0^7 \cdot N^7} \right) \cdot (61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6)
\end{aligned} \quad (5.27)$$

sendo M a distância à meridiana, $\psi = \frac{N}{\rho}$ (com N e ρ calculados com um valor aproximado para a latitude ϕ') e $t = \tan \phi'$. A determinação de ϕ é feita através de um processo iterativo, o qual é descrito de seguida

- 1) toma-se como ponto de partida um valor aproximado para o arco de meridiano σ_{ap}

$$\sigma_{ap} = \frac{P}{k_0}$$

sendo P a distância à perpendicular;

- 2) com base neste valor calcula-se uma primeira aproximação para ϕ (ϕ_{ap}), a qual é dada por

$$\phi = \phi_0 + \frac{\sigma_{ap}}{A \cdot a \cdot (1 - e^2)}$$

- 3) com este valor aproximado para a latitude recalcula-se o comprimento de arco de meridiano σ usando a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\sigma = a \cdot (1 - e^2) \cdot \left\{ A \cdot (\phi - \phi_0) - \frac{B}{2} \cdot (\sin 2\phi - \sin 2\phi_0) + \frac{C}{4} \cdot (\sin 4\phi - \sin 4\phi_0) - \right. \\
\left. - \frac{D}{6} \cdot (\sin 6\phi - \sin 6\phi_0) + \frac{E}{8} \cdot (\sin 8\phi - \sin 8\phi_0) - \frac{F}{10} \cdot (\sin 10\phi - \sin 10\phi_0) \right\}
\end{aligned}$$

- 4) com este novo valor para σ determina-se a correcção a aplicar a ϕ' através de:

$$\Delta\phi = \frac{(\sigma_{ap} - \sigma)}{\rho}$$

onde

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}}$$

sendo o novo valor da latitude igual a

$$\phi' = \phi + \Delta\phi$$

5) repetem-se as etapas 3), 4) e 5), recalculando σ , ρ e $\Delta\phi$ e o novo valor da ϕ' até que $\Delta\phi$ seja inferior à precisão desejada (10^{-10}).

5.2.4. A deformação linear

O comprimento de um elemento linear ds , no elipsóide, sobre um paralelo de latitude ϕ ($d\phi = 0$) é dado por

$$ds^2 = r^2 \cdot d\lambda^2 \quad (5.28)$$

e o comprimento da sua representação sobre o plano é dado por

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 \quad (5.29)$$

As componentes dx e dy obtêm-se diferenciando as expressões de x e de y em (5.26), obtendo-se as seguintes expressões

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot d\lambda = \left(r + \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot r \cdot \cos^2 \phi \cdot k_1 \right) \cdot d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot d\lambda = \lambda \cdot r \cdot \sin \phi \cdot d\lambda$$

desprezando os termos de ordem igual ou superior a λ^3 . Substituindo estas expressões em (5.29), resulta que

$$ds_1^2 = r^2 \cdot d\lambda^2 + r^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot k_1 \cdot \lambda^2 \cdot d\lambda^2 + \lambda^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2 \phi \cdot d\lambda^2$$

desprezando também os termos iguais ou superiores a λ^3 .

A deformação linear será então

$$k^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = 1 + \cos^2 \phi \cdot k_1 \cdot \lambda^2 + \sin^2 \phi \cdot \lambda^2 \quad (5.30)$$

ou então, substituindo k_1 pela sua expressão, será

$$k^2 = 1 + \cos^2 \phi \cdot \left(\frac{N}{\rho} - \tan^2 \phi \right) \cdot \lambda^2 + \sin^2 \phi \cdot \lambda^2 = 1 + \frac{r^2 \cdot \lambda^2}{\rho \cdot N}$$

e portanto

$$k = \sqrt{1 + \frac{r^2 \cdot \lambda^2}{\rho \cdot N}} \quad (5.31)$$

Fazendo um desenvolvimento em série da expressão (5.31), obtém-se

$$k = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2 \cdot \lambda^2}{\rho \cdot N}$$

atendendo a que

$$x \approx N \cdot \cos \phi \cdot \lambda = r \cdot \lambda$$

pela sua expressão em (5.26), então a deformação linear k em coordenadas rectangulares é dada por

$$k = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho \cdot N} \quad (5.32)$$

ou seja, a deformação linear é unicamente função do quadrado da distância ao meridiano central da projecção dado que o coeficiente $\frac{1}{2 \cdot \rho \cdot N}$ varia pouco com a latitude. Esta é a razão pela qual a projecção de Gauss se adapta bem à representação de regiões alongadas na direcção N-S. Se a zona a representar não for muito extensa na direcção N-S, pode adoptar-se o valor médio correspondente à latitude média ϕ_0 e então tem-se que

$$k = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \quad (5.33)$$

5.2.5. Correção tangente à corda

As representações conformes mantêm o ângulo entre as tangentes, mas o que interessa para a aplicação das fórmulas da geometria plana é o ângulo entre as cordas, surgindo assim a necessidade de aplicar às direcções azimutais elipsoidais a correção tangente à corda β , também designada por redução à corda (Figura 5.2).

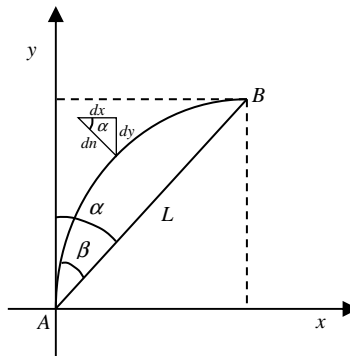


Figura 5.2. Correção tangente à corda (β).

A curvatura geodésica Γ é dada pelo teorema de Schols

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{dn} \quad (5.34)$$

sendo $\frac{dk}{dn}$ a derivada de k segundo a normal à linha, a qual se pode escrever da seguinte forma

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

como no caso da projecção de Gauss k só depende de x , tem-se que

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dx} \cdot \frac{dx}{dn}$$

logo

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{dx} \cdot \frac{dx}{dn}$$

derivando a expressão de k em (5.33) em ordem a x , obtém-se

$$\frac{dk}{dx} = \frac{x}{\rho_0 \cdot N_0}$$

e da figura deduz-se que (sendo α o azimute da linha AB)

$$dx = dn \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{dx}{dn} = \cos \alpha$$

e ainda que

$$\frac{y_B - y_A}{\cos \alpha} = L \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{y_B - y_A}{L}$$

pelo que a expressão da curvatura geodésica Γ passa a escrever-se da seguinte forma

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{x}{\rho_0 \cdot N_0} \cdot \frac{y_B - y_A}{L}$$

sendo L o comprimento da linha AB (corda).

Através da geometria diferencial, sabe-se que a correcção tangente à corda

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \Gamma_{1/3} \cdot L \quad (5.35)$$

onde L é o comprimento de linha AB e $\Gamma_{1/3}$ é a curvatura num ponto a $1/3$ da distância AB . Trata-se de uma fórmula aproximada mas, como a curvatura é muito pequena e o erro desprezável, considera-se suficientemente rigorosa nas aplicações cartográficas. Atendendo a que k é próximo de 1 e fazendo

$$x_{1/3} = x_A + \frac{1}{3} \cdot (x_B - x_A) = \frac{2 \cdot x_A + x_B}{3}$$

tem-se que

$$\Gamma_{1/3} = \frac{(2 \cdot x_A + x_B) \cdot (y_B - y_A)}{3 \cdot \rho_0 \cdot N_0 \cdot L}$$

donde finalmente, se obtém a correcção β

$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0 \cdot \sin 1''} \cdot (2 \cdot x_A + x_B) \cdot (y_B - y_A) \quad (5.36)$$

Nesta expressão o valor de β'' é maior ou menor que zero consoante o sinal que convencionalmente se tenha adoptado para o sentido positivo dos eixos. No caso da projecção de Gauss a transformada de uma geodésica volta sempre a concavidade para o meridiano central.

5.2.6. Correcção de redução dos comprimentos finitos

Esta correcção é aplicada a um comprimento finito elipsóidico para se obter o correspondente comprimento cartográfico. Sendo ds_1 o elemento linear sobre a carta, o elemento correspondente sobre o elipsóide será dado por

$$ds = \frac{ds_1}{k} = \frac{ds_1}{1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0}}$$

desenvolvendo o denominador em série, obtem-se

$$ds = \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \right) \cdot ds_1$$

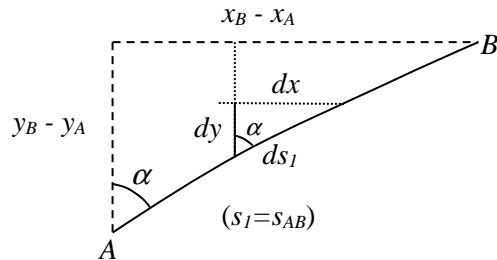


Figura 5.3. Correção de um elemento finito.

Considerando a figura 5.3., deduz-se que

$$ds_1 = \frac{dx}{\sin \alpha}$$

e que

$$s_1 = \frac{x_B - x_A}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{x_B - x_A}{s_1}$$

logo

$$ds = \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \right) \cdot \frac{s_1}{x_B - x_A} \cdot dx$$

Integrando a expressão anterior, obtem-se a seguinte expressão para s

$$\begin{aligned} s &= \frac{s_1}{x_B - x_A} \cdot \int_{x_A}^{x_B} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \right) \cdot dx = \frac{s_1}{x_B - x_A} \cdot \left\{ [x]_{x_A}^{x_B} - \left[\frac{x^3}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \right]_{x_A}^{x_B} \right\} = \dots \\ &= s_1 - \frac{s_1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \cdot (x_B^2 + x_B \cdot x_A + x_A^2) \end{aligned}$$

logo, a correção s_1-s é dada por

$$s_1 - s = \frac{s_1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \cdot (x_B^2 + x_B \cdot x_A + x_A^2) \quad (5.37)$$

Para Portugal continental considerando a latitude do Ponto Central perto do V.G. Melriça ($\phi_0=39^\circ 40'$), as expressões (5.33), (5.36) e (5.37) assumem os seguintes valores

$$k = 1 + 12305 \cdot 10^{-18} \cdot x^2$$

$$\beta'' = 84606 \cdot 10^{-14} \cdot (2 \cdot x_A + x_B) \cdot (y_B - y_A)$$

$$s_1 - s = 41018 \cdot 10^{-19} \cdot s_1 \cdot (x_B^2 + x_B \cdot x_A + x_A^2)$$

5.2.7. Convergência de meridianos

Seja P um ponto sobre o elipsóide e Q o seu homólogo num sistema cartográfico qualquer. Na figura 5.4 está representado o ponto Q , uma recta paralela ao eixo das ordenadas e a transformada de um meridiano. Chama-se ângulo de convergência de meridianos, ou simplesmente convergência de meridianos, ao ângulo γ entre o meridiano cartográfico e o meridiano geodésico num dado ponto Q . Pela figura 5.4 tem-se a seguinte igualdade:

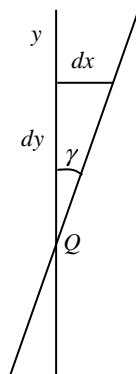


Figura 5.4. Convergência de meridianos

$$\frac{dx}{\sin \gamma} = \frac{dy}{\cos \gamma} \Leftrightarrow \tan \gamma = \frac{dx}{dy}$$

representando $\frac{dx}{dy}$ a derivada calculada a partir da equação $x = f(y)$ da transformada do meridiano.

As seguintes fórmulas de transformação

$$x = x(\phi, \lambda)$$

$$y = y(\phi, \lambda)$$

são, para cada valor fixo de λ , as equações paramétricas (parâmetro ϕ) da transformada do meridiano fixado, donde

$$\tan \gamma = \frac{\frac{dx}{d\phi}}{\frac{dy}{d\phi}} \quad (5.38)$$

No caso da projecção de Gauss as fórmulas de transformação, desprezando os termos iguais ou superiores a λ^2 , são de acordo com as expressões (5.26)

$$\begin{aligned} y &= \sigma \\ x &= \lambda \cdot N \cdot \cos \phi = \lambda \cdot r \end{aligned}$$

donde se obtém

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\phi} &= \rho \\ \frac{dx}{d\phi} &= \lambda \cdot \frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\phi} = -\lambda \cdot \sin \phi \cdot \rho \end{aligned}$$

pelo que a expressão (5.38) passa a escrever-se da seguinte forma

$$\tan \gamma = \frac{-\lambda \cdot \sin \phi \cdot \rho}{\rho} = -\lambda \cdot \sin \phi$$

sendo assim, a convergência de meridianos é dada pela seguinte expressão dado que γ é um ângulo muito pequeno

$$\gamma = -\lambda \cdot \sin \phi$$

sendo λ a diferença de longitude entre o ponto e o meridiano central da projecção. Dado isto, tem-se a seguinte expressão para o cálculo da convergência de meridianos

$$\gamma = -(\lambda - \lambda_0) \cdot \sin \phi \quad (5.39)$$

5.3. Projecção de Mercator

5.3.1. Introdução

A projecção de Mercator é uma projecção cilíndrica conforme. Gerardo Kramer (1512-1591), cartógrafo flamengo, tenta corrigir a representação do Mediterrâneo de Ptolomeu e constrói um Mapa Mundo com base numa projecção matemática, em que os paralelos e os meridianos se projectam num plano perpendiculares entre si.

A projecção de Mercator foi concebida para reduzir os problemas de orientação no decorrer da navegação. O principal problema de um navegador é saber como orientar o navio para que, partindo de um determinado lugar, consiga atingir um destino previamente definido. Combinando o ser uma

projecção conforme com o facto de ter os meridianos e paralelos rectilíneos faz com que as loxodrócias, ou seja as linhas com um rumo constante, sejam representadas por segmentos de recta.

Para sabermos qual o azimute α da loxodrómica que une dois pontos (Figura 5.5), dispendo de uma carta com esta projecção basta unir os dois pontos por uma recta e medir o ângulo α . A formulação existente na projecção de Mercator baseia-se fundamentalmente no elipsóide sobre o qual escolhemos as coordenadas Φ e λ , respectivamente a latitude isométrica e a longitude, e nas coordenadas cartesianas x, y sobre o plano, cuja relação com a latitude isométrica e longitude é obtida por uma função analítica qualquer f que obedece à condição geral das projecções conformes.

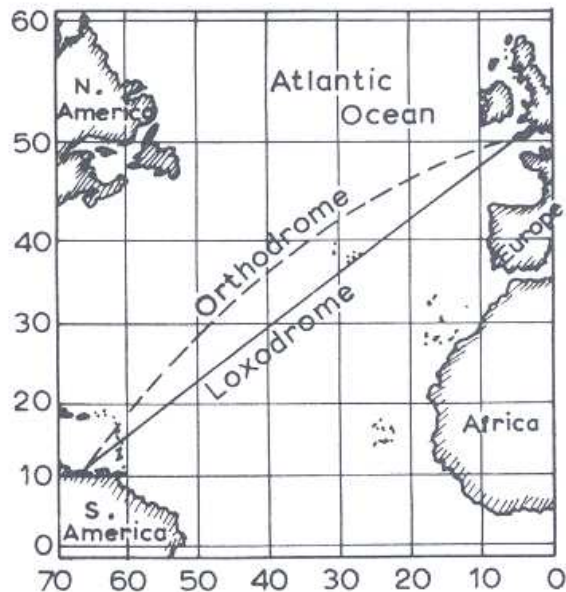


Figura 5.5. Loxodrómica: linha de azimute constante.

A projecção de Mercator é especialmente apropriada para a representação de regiões equatoriais ou, de um modo geral, de regiões com pequeno desenvolvimento em latitude, desde que a latitude seja pequena. A partir dos 60°, a escala aumenta rapidamente, o que leva a que as deformações areais aumentem ainda mais (uma vez que a escala areal varia com o quadrado da escala linear).

5.3.2. Fórmulas de transformação directa

Estabelecendo um sistema cartesiano (x, y) sobre o plano e adoptando um sistema curvilíneo (Φ, λ) no elipsóide, em que Φ é a latitude isométrica, verifica-se, pela expressão (5.20),

$$y + i \cdot x = f(\Phi + i \cdot \lambda)$$

que para $\lambda = 0$ se tem $x = 0$, o que significa que o meridiano central é representado pelo eixo oy das ordenadas, logo os outros meridianos terão de ser representados por rectas paralelas a esse eixo. Sendo assim, para $\lambda = \text{constante}$ tem-se que $x = \text{constante}$.

Desenvolvendo f em série de McLaurin e separando as partes reais das partes imaginárias, obtém-se as expressões (5.25)

$$y = f(\Phi) - \frac{\lambda^2}{2!} \cdot \left(\frac{d^2 f}{d\Phi^2} \right)_{\lambda=0} + \dots$$

$$x = \lambda \cdot \left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^3}{3!} \cdot \left(\frac{d^3 f}{d\Phi^3} \right)_{\lambda=0} + \dots$$

Para que a coordenada x dependa unicamente da longitude é necessário impor que

$$\left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} = C \quad (5.40)$$

onde C é uma constante. Assim, para $\lambda=0$ a função f é dada por

$$f = C \cdot \Phi + C_1 \quad (5.41)$$

e para um qualquer valor da longitude

$$f = C(\Phi + i\lambda) + C_1 \quad (5.42)$$

logo

$$y + ix = C(\Phi + i\lambda) + C_1 \quad (5.43)$$

Desta última equação resultam as fórmulas de transformação da latitude isométrica e longitude em coordenadas cartesianas x e y

$$y = f(\Phi) = C \cdot \Phi + C_1$$

$$x = \lambda \cdot \left(\frac{df}{d\Phi} \right)_{\lambda=0} = \lambda \cdot C \quad (5.44)$$

Para um valor constante da latitude isométrica Φ , obtém-se um valor de y , e conseqüentemente os paralelos são representados por rectas paralelas ao eixo ox , dada a conformidade do sistema. Caso se pretenda que o equador seja representado pelo eixo das abcissas deverá fazer-se $C_1=0$ de modo a obter

$$y = C \cdot \Phi$$

$$x = \lambda \cdot C \quad (5.45)$$

Um elemento linear sobre o equador ($\phi=0$, $d\phi=0$) e o seu correspondente sobre a carta ($y=0$, $dy=0$) serão, respectivamente

$$ds = r \cdot d\lambda = a \cdot d\lambda$$

sendo a o semi-eixo maior do elipsóide

$$ds_1 = dx = C \cdot d\lambda$$

Por outro lado, os elementos lineares, sobre o elipsóide e sobre o plano são

$$ds^2 = r^2 \cdot (d\Phi^2 + d\lambda^2)$$

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 = C^2 \cdot d\lambda^2 + C^2 \cdot d\Phi^2 = C^2 \cdot (d\Phi^2 + d\lambda^2)$$

então o módulo da deformação linear é dado por

$$k = \frac{C}{r} \quad (5.46)$$

Pretendendo que sobre o equador o módulo da deformação linear seja igual a 1, então r é igual a a logo C deverá ser igual a a , sendo a o raio equatorial do elipsóide.

Substituindo o valor de C em (5.45), as fórmulas de transformação escrevem-se

$$\begin{aligned} y &= a \cdot \Phi \\ x &= a \cdot \lambda \end{aligned} \quad (5.47)$$

O módulo da deformação areal na projecção de Mercator é então dado por

$$m = k^2 = \frac{a^2}{r^2} \quad (5.48)$$

Considerando uma esfera de raio a , e atendendo que $r = a \cdot \cos \phi$, tem-se neste caso que

$$m = k^2 = \frac{a^2}{a^2 \cdot \cos^2 \phi} = \frac{1}{\cos^2 \phi} \quad (5.49)$$

Para valores da latitude geodésica de $\phi=0^\circ$, 45° , 60° obtêm-se os seguintes valores de deformação areal de $m=1$, 2 , 4 , respectivamente. Verifica-se que as deformações areais assumem rapidamente valores muito elevados com o afastamento em relação ao equador ou ao paralelo origem da projecção.

Tendo como objectivo a obtenção de uma expressão para a deformação linear que seja função directa do afastamento ao equador, desenvolve-se a fórmula (5.47) em série de Taylor em função do comprimento do arco de meridiano, obtendo-se

$$y = \sigma \cdot \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)_{\sigma=0} + \frac{\sigma^2}{2!} \cdot \left(\frac{d^2 y}{d\sigma^2} \right)_{\sigma=0} + \frac{\sigma^3}{3!} \cdot \left(\frac{d^3 y}{d\sigma^3} \right)_{\sigma=0} + \dots \quad (5.50)$$

As derivadas de y em ordem a σ são dadas por

$$\frac{dy}{d\sigma} = a \cdot \frac{d\Phi}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\sigma} = a \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{a}{r}$$

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} = -\frac{a}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\sigma} = \frac{a \cdot \sin\phi}{r^2}$$

$$\frac{d^3y}{d\sigma^3} = \frac{a \cdot \cos\phi}{r^2} \cdot \frac{1}{\rho} + \dots$$

Fazendo $\phi=0$ e substituindo estas expressões na expressão (5.50) desprezando os termos de grau superior a 3, obtém-se

$$y = \sigma + \frac{\sigma^3}{6a\rho_0} \quad (5.51)$$

O comprimento de um elemento linear ds , no elipsóide, sobre um meridiano de longitude λ ($d\lambda=0$) é dado por

$$ds^2 = \rho^2 \cdot d\phi^2$$

e o comprimento da sua representação sobre o plano (com $dx=0$) é dado por

$$ds_1^2 = dy^2$$

pelo que a deformação linear é dada por

$$k = \frac{dy}{\rho \cdot d\phi} = \frac{dy}{d\sigma} = 1 + \frac{\sigma^2}{2a\rho_0} \quad (5.52)$$

Em que ρ_0 é o raio de curvatura do meridiano num ponto do equador. Esta expressão mostra que k cresce muito rapidamente com a distância ao equador pelo que o sistema é indicado para zonas equatoriais alongadas na direcção EW mas estreitas na direcção NS. Tem-se então, pela expressão (5.51), que

$$y \approx \sigma$$

pelo que

$$k = 1 + \frac{y^2}{2a\rho_0} \quad (5.53)$$

Como as deformações aumentam com a distância ao equador é frequente a utilização de um artifício que se baseia em multiplicar todos os comprimentos da carta por $k_0 < 1$, pelo que as fórmulas de transformação directa (5.47) passam a ser

$$y = k_0 \cdot a \cdot \Phi$$

$$x = k_0 \cdot a \cdot \lambda$$

pelo que a deformação linear é dada por

$$k = \frac{dy}{r \cdot d\Phi} = k_0 \cdot \frac{a}{r} = k_0 \cdot \left(1 + \frac{y^2}{2a\rho_0}\right)$$

Sobre o equador $k=1$, pelo que o valor da ordenada y será

$$1 + \frac{y^2}{2a\rho_0} = \frac{1}{k_0} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{2a\rho_0 \cdot \left(\frac{1}{k_0} - 1\right)} \quad (5.54)$$

5.3.3. Fórmulas de transformação inversa

Partindo das expressões da transformação directa (5.47), facilmente se obtêm as expressões para a transformação inversa

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{y}{a} \\ \lambda &= \frac{x}{a} \end{aligned} \quad (5.55)$$

5.3.4. Correção tangente à corda

As representações conformes mantêm o ângulo entre as tangentes, mas o que interessa para a aplicação das fórmulas da geometria plana é o ângulo entre as cordas, surgindo assim a necessidade de aplicar às direcções azimutais elipsoidais a correção tangente à corda β , também designada por redução à corda (fig. 5.6).

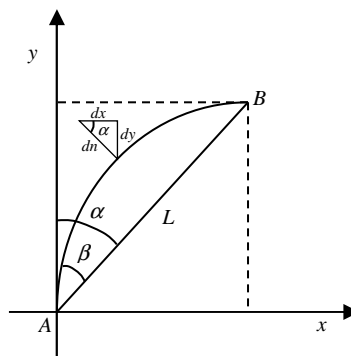


Figura 5.6. Correção tangente à corda (β).

A curvatura geodésica Γ é dada pelo teorema de Schols de acordo com a expressão (5.34)

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{dn}$$

sendo $\frac{dk}{dn}$ a derivada de k segundo a normal à linha, a qual se pode escrever da seguinte forma

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

como no caso da projecção de Mercator k só depende de y , tem-se que

$$\frac{dk}{dn} = \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

logo

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{dy} \cdot \frac{dy}{dn}$$

derivando a expressão de k em (5.53) em ordem a y , obtém-se

$$\frac{dk}{dy} = \frac{y}{a \cdot \rho_0}$$

e da figura deduz-se que (sendo α o azimute da linha AB)

$$dy = dn \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{dy}{dn} = \sin \alpha$$

e ainda que

$$\frac{x_B - x_A}{\sin \alpha} = L \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{x_B - x_A}{L}$$

pelo que a expressão da curvatura geodésica Γ passa a escrever-se da seguinte forma

$$\Gamma = \frac{1}{k} \cdot \frac{y}{a \cdot \rho_0} \cdot \frac{x_B - x_A}{L}$$

sendo L o comprimento da linha AB .

Através da expressão (5.35), sabe-se que a correcção tangente à corda é dada por

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \Gamma_{1/3} \cdot L$$

onde L é o comprimento de linha AB e $\Gamma_{1/3}$ é a curvatura um ponto a $1/3$ da distância AB . Trata-se de uma fórmula aproximada, mas como a curvatura é muito pequena e o erro desprezável considera-se suficientemente rigorosa nas aplicações cartográficas. Atendendo a que k é próximo de 1 e fazendo

$$y_{\frac{1}{3}} = y_A + \frac{1}{3} \cdot (y_B - y_A) = \frac{2 \cdot y_A + y_B}{3}$$

tem-se que

$$\Gamma_{\frac{1}{3}} = \frac{(2 \cdot y_A + y_B) \cdot (x_B - x_A)}{3 \cdot a \cdot \rho_0 \cdot L}$$

donde finalmente, se obtem a correcção β

$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot a \cdot \rho_0 \cdot \sin 1''} \cdot (2 \cdot y_A + y_B) \cdot (x_B - x_A) \quad (5.56)$$

Nesta expressão o valor de β'' é maior ou menor que zero consoante o sinal que convencionalmente se tenha adoptado para o sentido positivo dos eixos.

5.3.5. Correcção de redução dos comprimentos finitos

Esta correcção é aplicada a um comprimento finito elipsóidico para se obter o correspondente comprimento cartográfico. Sendo ds_1 o elemento linear sobre a carta, o elemento correspondente sobre o elipsóide será dado por

$$ds = \frac{ds_1}{k} = \frac{ds_1}{1 + \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}}$$

desenvolvendo o denominador em série, obtem-se

$$ds = \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0} \right) \cdot ds_1$$

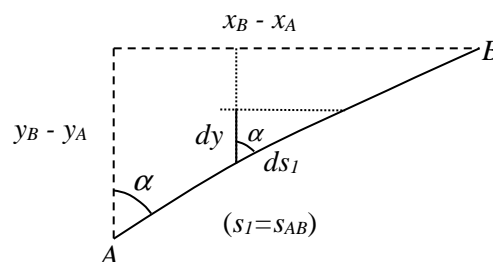


Figura 5.7. Correcção de um elemento finito.

Considerando a fig. 5.7., deduz-se que

$$ds_1 = \frac{dy}{\cos \alpha}$$

e que

$$s_1 = \frac{y_B - y_A}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{y_B - y_A}{s_1}$$

logo

$$ds = \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}\right) \cdot \frac{s_1}{y_B - y_A} \cdot dy$$

Integrando a expressão anterior, obtém-se a seguinte expressão para s

$$\begin{aligned} s &= \frac{s_1}{y_B - y_A} \cdot \int_{y_A}^{y_B} \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot a \cdot \rho_0}\right) \cdot dy = \frac{s_1}{y_B - y_A} \cdot \left\{ [y]_{y_A}^{y_B} - \left[\frac{y^3}{6 \cdot a \cdot \rho_0} \right]_{y_A}^{y_B} \right\} = \dots \\ &= s_1 - \frac{s_1}{6 \cdot a \cdot \rho_0} \cdot (y_B^2 + y_B \cdot y_A + y_A^2) \end{aligned}$$

logo, a correcção s_1-s é dada por

$$s_1 - s = \frac{s_1}{6 \cdot a \cdot \rho_0} \cdot (y_B^2 + y_B \cdot y_A + y_A^2) \quad (5.57)$$

5.3.6. Comprimento de um arco de loxodrómica

Considerando a figura 5.8 e a lei dos senos temos que:

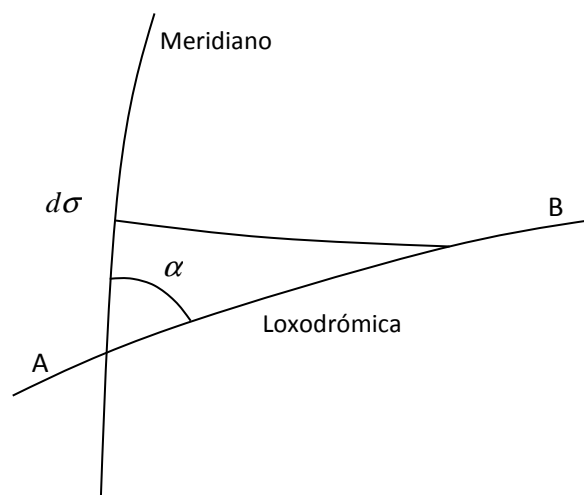


Figura 5.8. A loxodrómica.

$$ds = \frac{1}{\cos \alpha} d\sigma$$

fazendo o integral desta expressão obtém-se a seguinte expressão:

$$s = \frac{1}{\cos \alpha} \int d\sigma = \frac{\sigma}{\cos \alpha} \quad (5.58)$$

que permite determinar o comprimento de um arco de loxodrómica bastando para isso dividir o comprimento do arco de meridiano, entre duas latitudes, pelo coseno do azimute da loxodrómica.

Bibliografia

Catalão, J. (2010). Projecções cartográficas, FCUL-DEGGE, 79 pp.

Gaspar, J. A. (2000). Cartas e projecções cartográficas, 2ª edição, Lidel-Edições Técnicas, Lda., 292 pp.

Goussinsky, B. (1951). On the classification of map projections, *Empire Survey Review*, 11.

Instituto Geográfico e Cadastral (1972). *Cartografia Matemática*, Cadernos Técnicos e de Informação, nº 31, 135 pp.

Maling, D. H. (1992). *Coordinate systems and map projections*, 2nd edition, Pergamon Press, Oxford.

Maling, D.H. (1968). The terminology of map projections, *International Yearbook of Cartography* VIII.

Pagarete, J. (1984). *Transformação de coordenadas em Geodesia e Cartografia*, LNEC.

Richardus, P. and R. K. Adler (1972). *Map projections*, North-Holland Publishing Company, Amesterdam, 174 pp.