DMFCUL ALGA II

2º Semestre de 2016/2017 Exercícios - Folha 5

Salvo indicação expressa ao contrário, ao longo destes exercícios os espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ *da forma* $\mathbb{K}^{n\times 1}$*, onde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, consideram-se munidos do produto interno canónico* $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ *definido por* $(X|Y) = \overline{Y}^T X = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$*, onde* $X = [x_1, \cdots, x_n]^T$ *e* $Y = [y_1, \cdots, y_n]^T$.

29. Seja V espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$. Mostre que se $u, v \in V$ então $(u|0_V) = (0_V|v) = 0_{\mathbb{K}}$.

30. Sejam $u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -i\sqrt{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1}$. Calcule:

(a) $(u|u)$; **(b)** $(v|u)$; **(c)** $\dfrac{(v|u)}{(u|u)}$; **(d)** $w := v - \dfrac{(v|u)}{(u|u)}u$; **(e)** $(w|u)$; **(f)** $\|u\|$, $\|v\|$, $\|w\|$.

31. Considere o espaço vectorial sobre os complexos, $\mathbb{C}^{3\times 1}$. Determine três vectores (distintos) de norma 1 em cada um dos subespaços vectoriais seguintes:

(a) $< \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} > \ \leq \mathbb{C}^{3\times 1}$; **(b)** $< \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} > \ \leq \mathbb{C}^{3\times 1}$.

32. Determine quais dos pares de vectores seguintes são ortogonais:

(a) $\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$; **(b)** $\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$; **(c)** $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 1}$

33. Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ sobre $\mathbb{R}$. Considere a aplicação $[\,\cdot\,|\,\cdot\,] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$[(x_1, x_2)|(y_1, y_2)] = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

(a) Se $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ calcule $[(x_1, x_2)|(x_1, x_2)]$.
(b) Mostre que $[\,\cdot\,|\,\cdot\,]$ é um produto interno de $\mathbb{R}^2$.
(c) Determine as normas dos vectores $(1, 1)$ e $(2, 1)$ e o ângulo dos vectores $(1, 1)$ e $(2, 1)$.
(d) Determine $m \in \mathbb{R}$ por forma que o vector $(m, 1)$ seja ortogonal a $(2, 3)$.

34. Seja V espaço vectorial com produto interno. Mostre que dados $u, v \in V$, se tem
(a) $(\,(u|x) = 0\ \forall x \in V\,) \Rightarrow (\,u = 0\,)$. **(b)** $(\,(u|x) = (v|x)\ \forall x \in V\,) \Rightarrow (\,u = v\,)$.

35. Seja V um espaço vectorial munido de produto interno e sejam $u, v \in V$. Verifique a lei do paralelogramo: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

36. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Mostre que a aplicação $(\,\cdot\,|\,\cdot\,) : \mathbb{C}^{m\times n} \times \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}$ definida por $(A|B) = \mathrm{tr}(\overline{B}^{\mathrm{T}}A)$ é um produto interno em $\mathbb{C}^{m\times n}$.

37. Para o produto interno do Exº 36 exprima $\|A\|$ em função das entradas de $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

38. Determine uma base ortonormada para $\mathbb{C}^{m\times n}$, pelo produto interno do Exº 36.

39. Mostre, em Exº 36, que se $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ então $|\mathrm{tr}(\overline{A}^{\mathrm{T}}B)|^2 \leq \mathrm{tr}(\overline{A}^{\mathrm{T}}A)\mathrm{tr}(\overline{B}^{\mathrm{T}}B)$.

40. Seja $V = \mathbb{C}^{n\times 1}$ munido de produto interno standard $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e seja $x \in V$ tal que $\|x\| = 1$. Mostre que $(x|Ax)(Ax|x) \leq (Ax|Ax)$.

DMFCUL, ALGA II

2º Semestre 2016/2017 Exercícios - Folha 6

41. Considere em $\mathbb{R}^3$, o produto interno canónico e sejam

$$v_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}),\ v_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}),\ v_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$$

(a) Verifique que (v_1, v_2, v_3) é base ortonormada.
(b) Determine as componentes do vector $(5, -3, 2)$ em relação a esta base.

42. Seja V espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munido de produto interno. Seja $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ base ortonormada de V e seja f operador linear de V. Mostre que a entrada (i, j) da matriz $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é $(f(e_j)|e_i)$.

43. Seja V espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ munido de produto interno $(\cdot|\cdot)$. Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Mostre que existem vectores $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in V$ tais que para todo o i e j se tem

$$a_{ij} = (x_i|y_j).$$

44. Para os vectores v e subespaços W que listamos abaixo determine a projecção ortogonal de v sobre W; em cada caso $\mathbb{R}^k$ é munido do produto interno canónico.
(a) $v = (1, -1),\ W = <(2, 3)>,\ W \subseteq \mathbb{R}^2$;
(b) $v = (3, 3, 1),\ W = <(1, 1, 2), (1, 0, 0)>,\ W \subseteq \mathbb{R}^3$;
(c) $v = (1, -1, 2, 1),\ W = <(1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0)>,\ W \subseteq \mathbb{R}^4$.

45. Seja V espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munido de produto interno e seja $(v_1, \cdots, v_n)$ um sistema ortogonal de vectores de V. Mostre que se $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são escalares então $(\lambda_1 v_1, \cdots, \lambda_n v_n)$ é também um sistema ortogonal de vectores de V.

46. Em cada uma das alíneas seguintes consideram-se vectores v e subespaços W de um espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno canónico. Exprima $v = v_W + v_{W^\perp}$ onde $v_W \in W$ e $v_{W^\perp} \in W^\perp$.
(a) $v = (1, 3, 5),\ W = <(1, 3, -2), (6, 4, 2)>$;
(b) $v = (4, 3, 3, -1),\ W = <(1, 1, 0, 1), (0, 4, 1, -1), (-1, 0, 1, 1)>$;
(c) $v = (3, 4, 5, 6),\ W = <(1, 1, 0, -1), (2, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0)>$.

47. Seja $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ uma matriz invertível. Mostre que existe um e um só par (Q, R) de matrizes $Q, R \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $\overline{Q}^{\mathrm{T}} Q = I_3$, e R é triangular superior com entradas diagonais reais e positivas, satisfazendo $A = QR$.

48. Para cada uma das matrizes $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ que listamos em seguida, determine a matriz $Q \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ satisfazendo $\overline{Q}^{\mathrm{T}} Q = I_3$, e a matriz R, triangular superior com entradas diagonais reais e positivas, tais que $A = QR$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; **(c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; **(e)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; **(f)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.