CÁLCULO DE PREDICADOS

FERNANDO FERREIRA

Uma linguagem do *cálculo de predicados* consiste no seguinte:

a. Um conjunto não vazio de *símbolos relacionais*, geralmente denotados por P, Q, R, P' etc. Cada símbolo relacional tem associado um número natural não nulo, denominado de *aridade* do símbolo.
b. Um conjunto, possivelmente vazio, de *símbolos funcionais*, geralmente denotados por f, g, h, f', etc. Cada símbolo funcional tem associado um número natural: a sua *aridade*. Aos símbolos funcionais de aridade zero dá-se o nome de *constantes* e denotamo-los habitualmente pelas as letras c, d, e, etc.
c. Um conjunto numerável de *variáveis*, denotadas por x, y, z, x', etc.
d. Os símbolos lógicos $\neg, \to, \wedge, \vee$, incluindo os *quantificadores* $\forall$ (quantificador universal) e $\exists$ (quantificador existencial).
e. Os parênteses esquerdo e direito, (e).

Descrevemos acima um alfabeto, dando nomes especiais a certos caracteres. Os caracteres em (c), (d) e (e) são comuns a todas as linguagens. As linguagens do cálculo de predicados variam conforme os caracteres que se incluem sob as alíneas (a) e (b). A *cardinalidade* de uma dada linguagem $\mathcal{L}$ é o número de caracteres da linguagem e denota-se por $\|\mathcal{L}\|$. Note-se que a cardinalidade duma linguagem é sempre infinita por causa do número infinito de variáveis e coincide com a cardinalidade das palavras da linguagem. Está subentendido que os caracteres de cada uma das alíneas anteriores são mutuamente distintos.

Definição 1. *Seja dada uma linguagem do cálculo de predicados. Os* termos *da linguagem incluem as variáveis e as constantes e, para além disso, apenas incluem as palavras que se podem obter, num número finito de passos, a partir dum símbolo funcional n-ário ($n \neq 0$) e de termos previamente construídos $t_1, \ldots, t_n$ por meio da concatenação $f(t_1 \cdots t_n)$. Um termo diz-se* fechado *se nele não ocorrem variáveis.*

Uma forma mais rigorosa de definir os termos seria através do conceito de sequência de formação (ver o primeiro capítulo). Porém, vamos ser mais informais de ora em diante. Quando oportuno, usam-se notações há muito estabelecidas. Por exemplo, a *linguagem da aritmética* é constituída por dois símbolos relacionais binários $=$ e $<$, uma constante 0, um símbolo funcional unário S (para o *sucessor*) e dois símbolos funcionais binários $+$ e $\cdot$. A palavra $+(S(0) \cdot (yS(x)))$ é um termo (onde x e y são variáveis). Geralmente não se utiliza esta notação difícil de ler. Ao invés, usa-se a notação *infixa* $S0 + (y \cdot Sx)$, ou mesmo, $0' + yx'$, pondo-se x' em vez de Sx e omitindo o sinal de produto e os parênteses (convencionalmente, dá-se prioridade à operação sucessor sobre as operações binárias e, dentre destas, a multiplicação é prioritária). Os *numerais* são os termos fechados da linguagem da aritmética 0, $0'$, $0''$, $0'''$ etc, frequentemente denotados por $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ etc, respectivamente. Em geral, os numerais definem-se por recursão em n: $\overline{0}$ é 0 e $\overline{n+1}$ é $\overline{n}'$.

Um tratamento rigoroso da sintaxe dos termos – incluindo uma propriedade de unicidade de leitura para termos e correspondentes princípios de indução e recursão – pode fazer-se de modo semelhante ao tratamento que demos da sintaxe do cálculo proposicional. Dispensamo-nos de fazer um tal tratamento pois os métodos não são novos e os detalhes aborrecidos. Adoptamos uma atitude análoga na seguinte definição:

Definição 2. *Seja dada uma linguagem do cálculo proposicional. Uma* fórmula atómica *da linguagem é uma palavra da forma $R(t_1 \cdots t_n)$, onde R é um símbolo relacional n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ são termos. As* fórmulas *da linguagem incluem as fórmulas atómicas e, para além disso, incluem apenas as palavras que se podem obter, num número finito de passos, através dum dos seguintes processos: $\neg\phi$, $(\phi \to \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $\forall x\phi$, $\exists x\phi$ onde ϕ e ψ são fórmulas previamente construídas e x é uma variável.*

Novamente, seguimos o modo de escrever habitual em detrimento da definição formal. Escrevemos $x'' + \overline{1} < y$ em vez de $< (+(S(S(x))S(0))y)$. Para facilitar a leitura, usamos vírgulas a separar os termos nas expressões $f(t_1, \ldots, t_n)$ ou $R(t_1, \ldots, t_n)$. Também omitimos parênteses seguindo as convenções usuais.

Definição 3. *Define-se, por recursão na complexidade das fórmulas, o conjunto $Vl(\phi)$ das* variáveis livres *duma fórmula ϕ. Se ϕ é uma fórmula atómica da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, onde $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $Vl(\phi)$ é o conjunto de todas as variáveis que ocorrem em pelo menos um dos termos $t_1, \ldots, t_n$. Define-se $Vl(\neg\phi)$ como sendo $Vl(\phi)$ e $Vl(\phi\diamondsuit\psi)$ como $Vl(\phi) \cup Vl(\psi)$ (onde $\diamondsuit$ é um dos conectivos proposicionais binários). Finalmente, $Vl(\forall x\phi)$ e $Vl(\exists x\phi)$ são, por definição, $Vl(\phi)\setminus\{x\}$. Uma fórmula ϕ diz-se* fechada *se $Vl(\phi)$ é o conjunto vazio.*

Por exemplo, a fórmula $\forall x\forall y(xy = z \to x = 0 \vee y = 0)$ tem apenas uma variável livre: z. Observe-se que a mesma variável pode ocorrer em vários sítios da mesma fórmula, desempenhando papéis diferentes. É o caso da variável x na fórmula $\exists y(y + y = x) \vee \exists x(x + x = z)$. Esta fórmula tem duas variáveis livres, viz. x e z. Note-se que x ocorre livre em $\exists y(y + y = x)$ mas já não em $\exists x(x + x = z)$. Esta fórmula é perfeitamente legítima mas, na escrita corrente, convém evitar situações semelhantes escrevendo, ao invés, $\exists y(y + y = x) \vee \exists w(w + w = z)$.

Dados termos q e t e dada uma variável x, define-se q^x_t como o resultado de substituir a variável x pelo termo t no termo q. A definição oficial é por recursão na complexidade dos termos q. Se q é uma constante ou uma variável diferente de x, então q^x_t é q. Se q é a variável x, q^x_t é por definição t. Por outro lado, se q é da forma $f(q_1, \ldots, q_n)$ com f um símbolo funcional n-ário e $q_1, \ldots, q_n$ termos então define-se q^x_t como sendo $f((q_1)^x_t, \ldots, (q_n)^x_t)$. Note-se que os parênteses em torno dos termos $q_1, \ldots, q_n$ são parênteses meta-linguísticos. Estamos agora em condições de definir (por recursão na complexidade da fórmula ϕ) a fórmula ϕ^x_t, dada uma fórmula ϕ, uma variável x e um termo t. Se ϕ é uma fórmula atómica da forma $R(q_1, \ldots, q_n)$, com R um símbolo relacional n-ário e $q_1, \ldots, q_n$ termos, então ϕ^x_t é $R((q_1)^x_t, \ldots, (q_n)^x_t)$. Define-se $(\neg\phi)^x_t$ e $(\phi\diamondsuit\psi)^x_t$ como sendo (respectivamente) $\neg\phi^x_t$ e $\phi^x_t\diamondsuit\psi^x_t$ (onde $\diamondsuit$ é um conectivo binário proposicional). Define-se $(\forall z\phi)^x_t$ consoante a variável z é, ou não, x. Se é x, então $(\forall z\phi)^x_t$ mantém-se inalterado, sendo portanto $\forall z\phi$. Se não é x, $(\forall z\phi)^x_t$ é $\forall z\phi^x_t$.

A fórmula ϕ^x_t está sempre definida (para argumentos de tipo correcto) mas, por motivos semânticos facilmente compreensíveis, em determinadas situações é mister evitá-la. E.g., queremos poder concluir ϕ^x_t a partir da fórmula $\forall x\phi$. Considere-se, no entanto, ϕ a fórmula $\exists y(x' = y)$. Certamente que de $\forall x\phi$ não queremos inferir ϕ^x_y, i.e., não queremos concluir $\exists y(y' = y)$. Para evitar estas situações (em que se produzem conflitos de variáveis) introduzimos o seguinte conceito:

Definição 4. *Dada uma fórmula ϕ, um termo t e uma variável x, diz-se que t* está livre para x em ϕ *se se obtém uma das seguintes condições: ϕ é uma fórmula atómica; ϕ é da forma $\neg\psi$ e t está livre para x em ψ; ϕ é da forma $\psi\diamondsuit\rho$, com $\diamondsuit$ um conectivo proposicional binário, e t está livre para x em ψ e em ρ; ϕ é da forma $\forall x\psi$ ou $\exists x\psi$; ou, finalmente, ϕ é da forma $\forall z\psi$ ou $\exists z\psi$, z não é a mesma variável que x, z não ocorre em t e t está livre para x em ψ.*

Deixa-se ao cuidado do leitor a demonstração da seguinte proposição:

Proposição 1. *Fixe-se uma fórmula ϕ, uma variável x e um termo t. Tem-se,*

1. *se $x \notin Vl(\phi)$, então t está livre para x em ϕ e ϕ^x_t é ϕ;*

2. *x está livre para x em ϕ e ϕ^x_x é ϕ;*
3. *se x não ocorre em ϕ, então t está livre para x em ϕ;*
4. *se t é um termo fechado, então t está livre para x em ϕ;*
5. *Se t e q são termos fechados e y é uma variável diferente de x, então $(\phi^x_t)^y_q$ e $(\phi^y_q)^x_t$ são a mesma fórmula.*

No caso de t estar livre para x em ϕ e sempre que não houver ambiguidade, escrevemos $\phi(x)$ e $\phi(t)$ em vez de ϕ e ϕ^x_t. Pela última alínea da proposição anterior, podemos usar a notação $\phi(x, y)$ e $\phi(t, q)$ sem especificar a ordem pela qual se fazem as substituições (desde que t e q sejam termos fechados e x e y sejam variáveis diferentes). Em geral, também escrevemos $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ e $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ em circunstâncias apropriadas.