A DEFINIÇÃO DE VERDADE DE TARSKI

FERNANDO FERREIRA

Definição 1. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem do cálculo de predicados. Uma* interpretação *(ou* estrutura*) $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{L}$ consiste num conjunto não vazio, denominado de domínio de $\mathfrak{M}$ e denotado por $|\mathfrak{M}|$, juntamente com uma aplicação que a cada símbolo relacional R de aridade n ($n \neq 0$) faz corresponder um subconjunto $R^{\mathfrak{M}}$ de $|\mathfrak{M}|^n$, a cada símbolo funcional f de aridade n ($n \neq 0$) faz corresponder uma função $f^{\mathfrak{M}}\neg|\mathfrak{M}|^n \mapsto |\mathfrak{M}|$ e a cada constante c faz corresponder um elemento $c^{\mathfrak{M}}$ de $|\mathfrak{M}|$. A* cardinalidade duma interpretação *é a cardinalidade do seu domínio.*

Dada uma interpretação $\mathfrak{M}$ duma linguagem $\mathcal{L}$, uma *atribuição* de valores às variáveis é uma função s que a cada variável faz corresponder um elemento de $|\mathfrak{M}|$. Nestas condições, a cada termo t da linguagem podemos associar recursivamente um elemento $\tilde{s}(t)$ de $|\mathfrak{M}|$ de acordo com as seguintes especificações: se t é uma constante c, então $\tilde{s}(t)$ é $c^{\mathfrak{M}}$, se t é uma variável x, $\tilde{s}(t)$ é $s(x)$, finalmente, se t é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, com f um símbolo funcional n-ário ($n \neq 0$) e $t_1, \ldots, t_n$ termos, então $\tilde{s}(t)$ é $f^{\mathfrak{M}}(\tilde{s}(t_1), \ldots, \tilde{s}(t_n))$. Vê-se facilmente, por indução na complexidade dos termos, que $\tilde{s}(t) = \tilde{r}(t)$ sempre que as atribuições s e r coincidem nas variáveis que occorrem em t. Em particular, se t é um termo fechado, o valor $\tilde{s}(t)$ não depende de s, neste caso, costuma-se denotar este valor por $t^{\mathfrak{M}}$.

Dada uma atribuição s, uma variável x e um elemento $a \in |\mathfrak{M}|$, s_a^x é a atribuição que coincide com s em todas as variáveis diferentes de x e que em x toma o valor a. Dito doutro modo, $s_a^x(z) = s(z)$ para z variável diferente de x e $s_a^x(x) = a$.

Lema 1. *Considere-se uma linguagem interpretada e sejam s uma atribuição, x uma variável e t e q termos. Então $\tilde{s}(q_t^x) = \widetilde{s^x_{\tilde{s}(t)}}(q)$.*

Demonstração. Argumenta-se por indução na complexidade do termo q. Se q é uma constante ou uma variável diferente de x ambos os membros da equação reduzem-se a $\tilde{s}(q)$. Se q é a variável x, ambos os membros são $\tilde{s}(t)$. O passo de indução é fácil. $\square$

Definição de Verdade de Tarski. *Considere-se uma linguagem $\mathcal{L}$ do cálculo de predicados e $\mathfrak{M}$ uma interpretação de $\mathcal{L}$. Define-se, por recursão na complexidade das fórmulas ϕ, a noção de ϕ* ser satisfeita por uma atribuição s de acordo com a interpretação $\mathfrak{M}$ *(escrevendo-se $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$) da seguinte maneira:*

1. *Se ϕ é a fórmula atómica $R(t_1, \ldots, t_n)$ então $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$ sse $(\tilde{s}(t_1), \ldots, \tilde{s}(t_n)) \in R^{\mathfrak{M}}$,*
2. *Se ϕ é $\neg\psi$, $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$ sse $\not\models_{\mathfrak{M}} \psi\ [s]$,*
3. *Se ϕ é $\psi \to \rho$, $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$ sse $\not\models_{\mathfrak{M}} \psi\ [s]$ ou $\models_{\mathfrak{M}} \rho\ [s]$,*
4. *Se ϕ é da forma $\psi \wedge \rho$, $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$ sse $\models_{\mathfrak{M}} \psi\ [s]$ e $\models_{\mathfrak{M}} \rho\ [s]$,*
5. *Se ϕ é da forma $\psi \vee \rho$, $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$ sse $\models_{\mathfrak{M}} \psi\ [s]$ ou $\models_{\mathfrak{M}} \rho\ [s]$ (ou ambos),*
6. *Se ϕ é da forma $\forall x\psi$, $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$ sse para todo o elemento $a \in |\mathfrak{M}|$ se tem $\models_{\mathfrak{M}} \psi\ [s_a^x]$,*
7. *Se ϕ é da forma $\exists x\psi$, $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$ sse existe pelo menos um elemento $a \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\models_{\mathfrak{M}} \psi\ [s_a^x]$.*

A definição de satisfação acima é a pedra de toque para definir a noção de verdade duma fórmula fechada sob uma determinada interpretação.

Lema 2. *Seja ϕ uma fórmula e s e r atribuições que coincidem nas variáveis livres de ϕ. Então, $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$ sse $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [r]$.*

Demonstração. Argumenta-se por indução na complexidade da fórmula ϕ. O caso atómico é consequência do seguinte facto, já mencionado: sempre que t é um termo e s e r são atribuições que coincidem nas variáveis que ocorrem em t, então $\tilde{s}(t) = \tilde{r}(t)$. Quanto ao passo de indução, o único caso interessante a discutir é o caso dos quantificadores. Seja ϕ da forma $\forall x\psi$ (o caso existencial é análogo) e tomem-se atribuições s e r que coincidem em $Vl(\phi)$, ou seja, em $Vl(\psi)\setminus\{x\}$. Suponhamos que $\models_{\mathfrak{M}} \forall x\psi\ [s]$. Tome-se um elemento $a \in |\mathfrak{M}|$ ao arbítrio. Por suposição, $\models_{\mathfrak{M}} \psi\ [s^x_a]$. Ora, claramente, s^x_a e r^x_a coincidem em $Vl(\psi)$. Logo, por hipótese de indução, $\models_{\mathfrak{M}} \psi\ [r^x_a]$. Pela arbitrariedade de a conclui-se que $\models_{\mathfrak{M}} \forall x\psi\ [r]$. O recíproco é análogo. $\square$

O lema anterior permite-nos, por vezes, usar uma notação mais natural. Se $Vl(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ (com as variáveis distintas duas a duas) e $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$, podemos escrever

$$\models_{\mathfrak{M}} \phi(x_1, \ldots, x_n)\,[a_1, \ldots, a_n]$$

para denotar $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$, onde $s(x_i) = a_i$ para $i < n$. No caso em que $n = 0$ podemos escrever simplesmente $\models_{\mathfrak{M}} \phi$, omitindo de todo a atribuição. Diz-se, neste caso, que a fórmula fechada ϕ é *verdadeira* sob a interpretação $\mathfrak{M}$. No caso contrário, diz-se *falsa*. Por abuso de linguagem, quando $n > 0$, também se diz que a fórmula ϕ com *parâmetros* $a_1, \ldots, a_n$ (para $x_1, \ldots, x_n$) é verdadeira em $\mathfrak{M}$ e escreve-se mesmo $\models_{\mathfrak{M}} \phi(a_1, \ldots, a_n)$.

Definição 2. *Seja Γ um conjunto de fórmulas fechadas duma dada linguagem $\mathcal{L}$. Um* modelo *de Γ é uma interpretação $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{L}$ tal que $\models_{\mathfrak{M}} \phi$, para todo $\phi \in \Gamma$. Um conjunto de fórmulas fechadas diz-se* satisfazível *se tiver um modelo. Uma fórmula diz-se* satisfazível *se existir uma estrutura onde ela é verdadeira.*

Considere-se o seguinte conjunto de fórmulas fechadas da linguagem da aritmética:

(Q1) $\forall x(x' \neq 0)$,
(Q2) $\forall x\forall y(x' = y' \to x = y)$,
(Q3) $\forall x(x + 0 = x)$,
(Q4) $\forall x\forall y(x + y' = (x + y)')$,
(Q5) $\forall x(x \cdot 0 = 0)$,
(Q6) $\forall x\forall y(x \cdot y' = (x \cdot y) + x)$,
(Q7) $\forall x(x \not< 0)$,
(Q8) $\forall x\forall y(x < y' \leftrightarrow x < y \lor x = y)$,
(Q9) $\forall x\forall y(x < y \lor x = y \lor y < x)$.

Acima, $x \neq y$ e $x \not< y$ abreviam, respectivamente, $\neg(x = y)$ e $\neg(x < y)$. O modelo *standard* de (Q1-Q9) tem como domínio o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e interpreta os símbolos da linguagem aritmética da forma usual. Não havendo confusão, denotamos o modelo *standard* por $\mathbb{N}$. Para quem conheça os números ordinais, facilmente se convence que o conjunto ω^ω munido das operações ordinais é, também, modelo de (Q1-Q9). Trata-se dum modelo em que falham muitas leis aritméticas usuais, e.g., falha a lei comutativa para adição: $\forall x\forall y(x + y = y + x)$. Tal não deve surpreender porque em (Q1-Q9) não há nenhum princípio de indução.

Os axiomas da *aritmética de Peano* obtêm-se de (Q1-Q9) adicionando o seguinte esquema de fórmulas fechadas:

$$\forall \underline{z}(\phi(0, \underline{z}) \land \forall x(\phi(x, \underline{z}) \to \phi(x', \underline{z})) \to \forall x\phi(x, \underline{z})),$$

onde $\phi(x, \underline{z})$ é uma fórmula arbitrária da linguagem da aritmética cujas variáveis livres são exactamente x e $z_1, \ldots, z_n$ (que estamos a abreviar por $\underline{z}$). Trata-se do *axioma esquema de indução.* Claro que $\mathbb{N}$ é modelo dos axiomas de Peano. No entanto, a interpretação de domínio ω^ω que mencionámos no parágrafo anterior já não o é. Com efeito, os modelos dos axiomas de Peano obedecem às leis aritméticas mais comuns, de que é exemplo a lei comutativa da adição. Mesmo assim, como veremos mais tarde, existem modelos dos axiomas de Peano que não são isomorfos ao modelo standard.

Definição 3. *Uma fórmula ϕ duma linguagem $\mathcal{L}$ do cálculo de predicados diz-se uma* verdade lógica*, ou* logicamente válida*, se para toda a interpretação $\mathfrak{M}$ e toda a atribuição s de valores às variáveis se tem $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$. Duas fórmulas ϕ e ψ de $\mathcal{L}$ dizem-se* logicamente equivalentes *se, para toda a interpretação $\mathfrak{M}$ e toda a atribuição s de valores às variáveis, se tem $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s]$ se, e somente se, $\models_{\mathfrak{M}} \psi\ [s]$. Neste caso, escreve-se também $\phi \Leftrightarrow \psi$.*

As tautologias do cálculo proposicional dão origem, de modo natural, a verdades lógicas. As seguintes verdades lógicas não advêm de tautologias.

1. $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$,
2. $\phi \to \forall x\phi$, desde que $x \notin Vl(\phi)$,
3. $\forall x\phi \to \phi^x_t$, para t livre para x em ϕ.

As seguintes equivalências lógicas não advêm de equivalências tautológicas:

4. $\forall x\phi \Leftrightarrow \forall y\phi^x_y$ e $\exists x\phi \Leftrightarrow \exists y\phi^x_y$, desde que y não ocorra em ϕ,
5. $\neg\forall x\phi \Leftrightarrow \exists x\neg\phi$ e $\neg\exists x\phi \Leftrightarrow \forall x\neg\phi$,
6. $(\phi \to \forall x\psi) \Leftrightarrow \forall x(\phi \to \psi)$, desde que $x \notin Vl(\phi)$,
7. $(\forall x\phi \to \psi) \Leftrightarrow \exists x(\phi \to \psi)$, desde que $x \notin Vl(\psi)$,
8. $(\phi \to \exists x\psi) \Leftrightarrow \exists x(\phi \to \psi)$, desde que $x \notin Vl(\phi)$,
9. $(\exists x\phi \to \psi) \Leftrightarrow \forall x(\phi \to \psi)$, desde que $x \notin Vl(\psi)$,
10. $(\phi \wedge \forall x\psi) \Leftrightarrow \forall x(\phi \wedge \psi)$, desde que $x \notin Vl(\phi)$,
11. $(\phi \wedge \exists x\psi) \Leftrightarrow \exists x(\phi \wedge \psi)$, desde que $x \notin Vl(\phi)$,
12. $(\phi \vee \forall x\psi) \Leftrightarrow \forall x(\phi \vee \psi)$, desde que $x \notin Vl(\phi)$,
13. $(\phi \vee \exists x\psi) \Leftrightarrow \exists x(\phi \vee \psi)$, desde que $x \notin Vl(\phi)$.

A verificação de cada uma destas verdades lógicas é imediata, com a excepção de (3) e (4), para as quais necessitamos dum lema:

Lema da Substituição. *Seja $\mathfrak{M}$ uma interpretação da linguagem e s uma atribuição de valores às variáveis. Tome-se ϕ uma fórmula, x uma variável e t um termo livre para x em ϕ. Então, $\models_{\mathfrak{M}} \phi^x_t\ [s]$ sse $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s^x_{\tilde{s}(t)}]$.*

Demonstração. Argumenta-se por indução na complexidade de ϕ tendo em conta o primeiro lema deste capítulo. Suponhamos que ϕ é uma fórmula atómica da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$. Vem,

$$\begin{array}{lll} \models_{\mathfrak{M}} (R(t_1, \ldots, t_n))^x_t\ [s] & \text{sse} & \models_{\mathfrak{M}} R((t_1)^x_t, \ldots, (t_n)^x_t)\ [s] \\ & \text{sse} & (\tilde{s}((t_1)^x_t), \ldots, \tilde{s}((t_n)^x_t)) \in R^{\mathfrak{M}} \\ & \text{sse} & (\widetilde{s^x_{\tilde{s}(t)}}(t_1), \ldots, \widetilde{s^x_{\tilde{s}(t)}}(t_n)) \in R^{\mathfrak{M}} \\ & \text{sse} & \models_{\mathfrak{M}} R(t_1, \ldots, t_n)\ [s^x_{\tilde{s}(t)}]. \end{array}$$

O passo de indução é imediato para os conectivos proposicionais. Vamos apenas analisar o caso dos quantificadores. Suponhamos que ϕ é $\forall z\psi$ (o caso existencial é análogo). Se x não ocorre livre em ϕ então s e $s^x_{\tilde{s}(t)}$ coincidem em $Vl(\phi)$. Além disso, ϕ^x_t é a mesma fórmula que ϕ. Tem-se imediatamente a conclusão. Vamos agora estudar o caso em que x ocorre livre em ϕ. *A fortiori*, x e z não são a mesma variável. Sai que ϕ^x_t é $\forall z\psi^x_t$. Visto que t está livre para x em ϕ sabemos que a variável z não ocorre em t (donde se conclui que $\tilde{s}(t) = \tilde{s^z_a}(t)$ para todo elemento $a \in |\mathfrak{M}|$) e que t está livre para x em ψ. Vem sucessivamente:

$$\begin{array}{lll} \models_{\mathfrak{M}} \phi^x_t\ [s] & \text{sse} & \text{para todo } a \in |\mathfrak{M}|, \models_{\mathfrak{M}} \psi^x_t\ [s^z_a] \\ & \text{sse} & \text{para todo } a \in |\mathfrak{M}|, \models_{\mathfrak{M}} \psi\ [(s^z_a)^x_{\tilde{s}(t)}] \text{ (por hipótese de} \\ & & \text{indução e a observação parentética acima)} \\ & \text{sse} & \text{para todo } a \in |\mathfrak{M}|, \models_{\mathfrak{M}} \psi\ [(s^x_{\tilde{s}(t)})^z_a] \\ & \text{sse} & \models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s^x_{\tilde{s}(t)}]. \end{array}$$

$\square$

Com a ajuda deste lema, vamos demonstrar (3). Suponhamos que se tem $\models_{\mathfrak{M}} \forall x\phi\ [s]$. Em particular, $\models_{\mathfrak{M}} \phi\ [s^x_{\tilde{s}(t)}]$. Pelo lema anterior, sai $\models_{\mathfrak{M}} \phi^x_t\ [s]$, como se queria. Deixa-se (4) ao cuidado do leitor.

Aplicando n vezes a proposição anterior, tem-se:

Corolário 1. *Seja $\mathfrak{M}$ uma interpretação da linguagem e ϕ uma fórmula tal que $Vl(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ (variáveis distintas duas a duas). Tomem-se $t_1, \ldots, t_n$ termos fechados da linguagem. Então,*

$$\models_{\mathfrak{M}} \phi(t_1, \ldots, t_n) \quad \textit{se, e somente se,} \quad \models_{\mathfrak{M}} \phi(x_1, \ldots, x_n)\ [t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}].$$

Definição 4. *Uma fórmula diz-se em* forma prenexa *caso seja da forma*

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n\, \psi,$$

onde cada Q_i é um quantificador ($\forall$ ou $\exists$), $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis distintas (duas a duas) e ψ é uma fórmula sem quantificadores.

As equivalências lógicas acima, de (4) a (13), e as leis comutativas da conjunção e da disjunção, permitem concluir o seguinte:

Proposição 1. *Toda a fórmula do cálculo de predicados é logicamente equivalente a uma fórmula em forma prenexa (a que se chama uma* prenexificação *da fórmula dada).*

Segue-se um exemplo:

$$\begin{array}{l}
\forall x((Q(x) \wedge \neg\forall y(R(y) \wedge S(x,y))) \to \exists y(P(y) \wedge T(x,y))) \Leftrightarrow \\
\forall x((Q(x) \wedge \exists y\neg(R(y) \wedge S(x,y))) \to \exists y(P(y) \wedge T(x,y))) \Leftrightarrow \\
\forall x(\exists y(Q(x) \wedge \neg(R(y) \wedge S(x,y))) \to \exists y(P(y) \wedge T(x,y))) \Leftrightarrow \\
\forall x(\exists y(Q(x) \wedge \neg(R(y) \wedge S(x,y))) \to \exists z(P(z) \wedge T(x,z))) \Leftrightarrow \\
\forall x\forall y((Q(x) \wedge \neg(R(y) \wedge S(x,y))) \to \exists z(P(z) \wedge T(x,z))) \Leftrightarrow \\
\forall x\forall y\exists z((C(x) \wedge \neg(R(y) \wedge S(x,y))) \to (D(z) \wedge B(x,z)))
\end{array}$$