# EXERCÍCIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA
# FOLHA F

FERNANDO FERREIRA

MARÇO DE 2017

(1) Considere a linguagem $\mathcal{L}$ do cálculo de predicados apenas com um símbolo relacional unário $P$ e uma constante. Mostre que $\exists x(P(x) \vee \forall y \neg P(y))$ é uma verdade lógica e que não existem termos fechados $t_1, t_2 \ldots, t_n$ de $\mathcal{L}$ tais que $(P(t_1) \vee \forall y \neg P(y)) \vee (P(t_2) \vee \forall y \neg P(y)) \vee \cdots \vee (P(t_n) \vee \forall y \neg P(y))$ é uma verdade lógica.

(2) Seja $\mathcal{L}$ a linguagem de primeira ordem com igualdade com apenas o símbolo relacional binário $R$. Considere a teoria $\mathsf{T}$ cujos axiomas são:

$\forall x R(x,x)$

$\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$

$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$

juntamente com os seguintes dois esquemas ($n$ varia nos naturais):

$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \exists x (\neg R(x_1,x) \wedge \neg R(x_2,x) \wedge \cdots \wedge \neg R(x_n,x))$

$\forall x \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \wedge R(x,x_1) \wedge R(x,x_2) \wedge \cdots \wedge R(x,x_n))$

a) Descreva sucintamente os modelos de $\mathsf{T}$.

b) Mostre que $\mathsf{T}$ é uma teoria completa.

(3) Dado $G$ um conjunto, denota-se por $[G]^2$ o conjunto de subconjuntos de $G$ com exactamente dois elementos. Um *grafo* (não orientado) é um par $(G,A)$, onde $A \subseteq [G]^2$. Aos elementos de $G$ chamam-se os *vértices* do grafo, e aos elementos de $A$ chamam-se as *arestas* do grafo. Dois vértices $g_1$ e $g_2$ dizem-se adjacentes se $\{g_1, g_2\} \in A$. Um grafo $(G,A)$ diz-se *aleatório* se for numerável (i.e., $G$ é um conjunto numerável) e se, dados vértices distintos $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ existe sempre um vértice $c$ que está adjacente a cada um dos $a_i$ e não está adjacente a nenhum dos $b_j$.

(a) Mostre que há grafos aleatórios. [Sugestão. Dado um grafo numerável, obtenha um grafo ainda numerável que expanda o grafo de partida e que tenha a seguinte propriedade: se $X$ e $Y$ são subconjuntos finitos disjuntos do grafo inicial, existe no grafo expandido um vértice que está conectado com todo o vértice de $X$ e não está conectado com nenhum vértice de $Y$. Itere esta construção.]

(b) Mostre que dois grafos aleatórios são isomorfos. [Utilize um argumento de vai-vem.]

(c) Apresente uma teoria completa numa linguagem apropriada que não tenha modelos finitos e cujos modelos numeráveis são exactamente os grafos aleatórios.

rascunho