Folha **M** de exercícios

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
Abril de 2017

1. Mostre que de quatro inteiros consecutivos, pelo menos um deles não é soma de dois quadrados. (Sugestão: considere os quadrados módulo 8.)

2. Seja dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e δ um real positivo. Suponha que a desigualdade
$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{\delta}{b^n}$$
não tem soluções racionais $\frac{a}{b}$. Então, se ε é um número real positivo, a desigualdade
$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^{n+\varepsilon}}$$
tem apenas um número finito de soluções racionais $\frac{a}{b}$.

3. Encontrar o número racional representado sob forma de fração continuada de cada item a seguir (apresente a resposta em fração reduzida): $[3,1]$, $[1,1,1]$, $[0,6,5]$, $[1,2,3,4]$ e $[3,7,15,1]$.

4. Exprima os seguintes números racionais sob a forma de fração continuada simples: $11/7$, $-37/5$, $114/235$ e $-51/23$.

5. Este exercício tem por objetivo mostrar que cada número racional pode ser representado exatamente de duas maneiras por uma fração continuada simples (finita). (No que se segue, as frações continuadas são simples.)

   (a) Para cada fração continuada simples do primeiro Exercício 3 desta página, exiba outra fração continuada que represente o mesmo racional. (P. ex., $[3,1] = [4]$.)

   (b) Mostre que $[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + 1] = [a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m, 1]$.

   (c) Mostre que se $m \geq 2$ então $\lfloor [a_0, a_1, a_2 \ldots, a_m] \rfloor = a_0$.

   (d) Mostre que se $[a_0, a_1, \ldots, a_m, 1] = [b_0, b_1, \ldots, b_n, 1] \neq 1$, então $m = n$ e $a_i = b_i$ para todo $0 \leq i \leq n$.

   (e) Conclua que cada número racional tem exatamente duas representação como fração continuada simples.

6. Seja dada uma fração continuada $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, com $a_0 > 0$. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$ e $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.