Folha **N** de exercícios

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
Abril de 2017

1. Na notação da aula teórica, mostre que

$$p_n = \det \begin{bmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{bmatrix}$$

   (Sugestão: desenvolva o determinante através da última coluna.) Mostre também que, omitindo-se a primeira linha e a primeira coluna, se obtém uma fórmula para q_n.

2. A representação do número de Napier e em fração continuada infinita simples é: $[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \dots]$. Encontre os primeiros seis convergentes desta fração continuada.

3. Calcule os irracionais quadráticos dados por $[\overline{1}]$, $[2, \overline{1, 2, 1}]$ e $[4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$.

4. Determine as frações continuadas simples infinitas que representam os números irracionais: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$ e $\sqrt{17}$, $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

5. Tome-se d um número natural que não seja um quadrado perfeito. A equação de Pell é a equação $x^2 - dy^2 = 1$. A solução trivial da equação nos inteiros não negativos é $x = 1$ e $y = 0$. Neste exercício vamos ver que a equação de Pell tem solução não trivial (de facto, tem uma infinidade delas) e daremos uma método para a(s) calcular.

   Admita-se que $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_h}]$ ($h \in \mathbb{N}$) e seja $\theta_1 = [\overline{a_1, \dots, a_h}]$. Tome-se n *ímpar* da forma $kh - 1$, onde $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que $p_n = q_{n+1} - a_0 q_n$ e $p_{n+1} - a_0 p_n = q_n d$. [Sugestão: note que $\sqrt{d} = (p_{n+1}\theta_1 + p_n)/(q_{n+1}\theta_1 + q_n)$.]

   (b) Mostre que $p_n^2 - q_n^2 d = 1$. [Sugestão: elimine a_0.]

   (c) Encontre duas soluções não triviais para $x^2 - 5y^2 = 1$ e $x^2 - 6y^2 = 1$.

   (d) Encontre uma solução não trivial para $x^2 - 10y^2 = 1$, $x^2 - 13y^2 = 1$, $x^2 - 14y^2 = 1$, $x^2 - 17y^2 = 1$ e $x^2 - 19y^2 = 1$.