PRIMEIRO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL

FERNANDO FERREIRA

Neste capítulo vamos enunciar e demonstrar a versão original do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel. O interesse da versão original está na sua demonstração, mais especificamente na demonstração da sua primeira parte. Como veremos no próximo capítulo, a formalização adequada desta demonstração dá origem ao Segundo Teorema da Incompletude de Gödel.

Dada uma fórmula α da linguagem da aritmética denotamos por $\ulcorner\alpha\urcorner$ o numeral $\overline{\#(\alpha)}$. A *diagonalização* duma fórmula α é a fórmula $\alpha_{\ulcorner\alpha\urcorner}^{v_0}$ que resulta de α substituindo a variável v_0 pelo numeral $\ulcorner\alpha\urcorner$. A função *diag* que a cada número de Gödel duma fórmula α faz corresponder o número de Gödel da sua diagonalização é, claramente, uma função recursiva (tese de Church). Logo, existe uma fórmula $\delta(x,y)$ que representa esta função em Q, i.e., tal que se $diag(n) = m$ então $\mathsf{Q} \vdash \forall y(\delta(\overline{n}, y) \leftrightarrow y = \overline{m})$.

No próximo lema, supomos que $\psi(y)$ é uma fórmula com uma única variável livre (diferente de v_0).

Lema da Diagonalização. *Para toda a fórmula $\psi(y)$ da linguagem da aritmética existe uma fórmula fechada ϕ tal que $\mathsf{Q} \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\ulcorner\phi\urcorner)$.*

Demonstração. Seja α a fórmula $\exists y(\delta(v_0, y) \wedge \psi(y))$ e tome-se ϕ a fórmula $\alpha_{\ulcorner\alpha\urcorner}^{v_0}$, i.e., a fórmula $\exists y(\delta(\ulcorner\alpha\urcorner, y) \wedge \psi(y))$. Note-se que se tem $diag(\#(\alpha)) = \#(\phi)$. Assim, $\mathsf{Q} \vdash \forall y(\delta(\ulcorner\alpha\urcorner, y) \leftrightarrow y = \ulcorner\phi\urcorner)$.

Vejamos que se tem $\mathsf{Q} \vdash \phi \to \psi(\ulcorner\phi\urcorner)$. Isto advém do facto de se poder deduzir formalmente a seguinte verdade lógica: $[\exists y(\delta(\ulcorner\alpha\urcorner, y) \wedge \psi(y)) \wedge \forall y(\delta(\ulcorner\alpha\urcorner, y) \to y = \ulcorner\phi\urcorner)] \to \psi(\ulcorner\phi\urcorner)$. Para ver o recíproco, note-se que temos $\mathsf{Q} \vdash \delta(\ulcorner\alpha\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner)$. Portanto, $\mathsf{Q} \cup \{\psi(\ulcorner\phi\urcorner)\} \vdash \delta(\ulcorner\alpha\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner) \wedge \psi(\ulcorner\phi\urcorner)$. Logo, $\mathsf{Q} \cup \{\psi(\ulcorner\phi\urcorner)\} \vdash \exists y(\delta(\ulcorner\alpha\urcorner, y) \wedge \psi(y))$ e, pelo teorema da dedução, sai $\mathsf{Q} \vdash \psi(\ulcorner\phi\urcorner) \to \phi$. $\square$

Com este lema podemos dar uma nova demonstração do teorema da indefinibilidade de Tarski. Suponhamos, com vista a um absurdo, que o conjunto dos números de Gödel das fórmulas verdadeiras (em $\mathbb{N}$) é aritmeticamente definível. Seja, então, $V(y)$ uma fórmula com a única variável livre y tal que, para toda a fórmula fechada θ, $\models_{\mathbb{N}} \theta$ sse $\models_{\mathbb{N}} V(\ulcorner\theta\urcorner)$. Pelo lema da diagonalização aplicado à fórmula $\neg V(y)$, seja λ tal que $\mathsf{Q} \vdash \lambda \leftrightarrow \neg V(\ulcorner\lambda\urcorner)$ (trata-se da "frase do mentiroso", que diz de si própria que é falsa). Visto que Q é uma teoria verdadeira, tem-se $\models_{\mathbb{N}} \lambda$ sse $\models_{\mathbb{N}} \neg V(\ulcorner\lambda\urcorner)$. Sai, $\models_{\mathbb{N}} \lambda$ sse $\models_{\mathbb{N}} \neg V(\ulcorner\lambda\urcorner)$ sse $\not\models_{\mathbb{N}} V(\ulcorner\lambda\urcorner)$ sse $\not\models_{\mathbb{N}} \lambda$, o que é absurdo.

O argumento original de Gödel para o seu primeiro teorema da incompletude baseia-se no raciocínio acima, porém aplicado à noção de fórmula dedutível numa determinada teoria recursivamente axiomatizável. Note que esta noção é (ao contrário da noção de verdade) aritmeticamente definível (pois é uma noção Σ_1).

A seguinte noção, de interesse essencialmente histórico (pois não é optimal nem desempenha nenhum papel na demonstração do Segundo Teorema da Incompletude) deve-se a Gödel:

Definição 1. *Uma teoria aritmética* T *que contenha* Q *diz-se* ω-consistente *se as seguintes duas condições não ocorrem simultaneamente:*

1. $\mathsf{T} \vdash \exists x\, \alpha(x)$.
2. $\mathsf{T} \vdash \neg\alpha(\overline{0})$, $\mathsf{T} \vdash \neg\alpha(\overline{1})$, $\mathsf{T} \vdash \neg\alpha(\overline{2})$, ...

para nenhuma fórmula $\alpha(x)$ com uma única variável livre x.

Note-se que as teorias Q e PA são ω-consistentes. Em geral, uma teoria aritmética verdadeira (i.e., constituída apenas por verdades aritméticas) que contenha Q é ω-consistente. Como se verá pelos argumentos que se seguem, basta apenas exigir que a teoria seja Σ_1-*fiel*, i.e., que todo o teorema $\exists$-rudimentar da teoria seja verdadeiro. Tal requisito chama-se 1-*consistência* e é equivalente a restringir a noção de ω-consistência a fórmulas $\exists$-rudimentares α.

Proposição 1. *Se T é ω-consistente então é consistente.*

Demonstração. Como $\mathsf{T} \vdash \exists x(x = x)$, por ω-consistência conclui-se que há pelo menos uma fórmula do tipo $\neg(\overline{k} = \overline{k})$ que não se deduz formalmente de T. Logo T é consistente. $\square$

Lema 1. *Seja T uma teoria recursivamente axiomatizável que contenha Q. Então existe uma fórmula aritmética $Ded_{\mathsf{T}}(x)$ tal que, para toda a fórmula fechada ϕ, se tem:*

1. *Se $\mathsf{T} \vdash \phi$ então $\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \phi \urcorner)$;*
2. *Se T é ω-consistente e $\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \phi \urcorner)$ então $\mathsf{T} \vdash \phi$.*

Demonstração. Como sabemos, existe um predicado binário recursivo R tal que, para toda a fórmula fechada ϕ, se tem: $\mathsf{T} \vdash \phi$ se, e somente se, $\exists k\, R(\#(\phi), k)$. Seja $D(x, y)$ uma fórmula que represente R, i.e., (a) se $R(n, k)$ então $\mathsf{Q} \vdash D(\overline{n}, \overline{k})$; e (b) se $\neg R(n, k)$ então $\mathsf{Q} \vdash \neg D(\overline{n}, \overline{k})$. Tome-se para $Ded_{\mathsf{T}}(x)$ a fórmula $\exists y\, D(x, y)$.

Suponhamos que $\mathsf{T} \vdash \phi$. Então existe k tal que $R(\#(\phi), k)$ e, por (a), infere-se $\mathsf{Q} \vdash D(\ulcorner \phi \urcorner, \overline{k})$. Logo, $\mathsf{Q} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \phi \urcorner)$ e, *a fortiori*, $\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \phi \urcorner)$.

Suponhamos que T é ω-consistente e que $\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \phi \urcorner)$, i.e., $\mathsf{T} \vdash \exists y\, D(\ulcorner \phi \urcorner, y)$. Por ω-consistência, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathsf{T} \nvdash \neg D(\ulcorner \phi \urcorner, \overline{k})$. Por (b) acima, não se pode ter $\neg R(\#(\phi), k)$. Assim, tem-se $R(\#(\phi), k)$ e, portanto, $\mathsf{T} \vdash \phi$. $\square$

Damos, de seguida, a versão original de Gödel do Primeiro Teorema da Incompletude. Como já foi mencionado, a primeira parte é importante para o Segundo Teorema da Incompletude de Gödel:

Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel (versão dedutiva). *Seja T uma teoria recursivamente axiomatizável que contenha Q. Então existe uma fórmula fechada G_{T} tal que:*

1. *Se T é consistente, $\mathsf{T} \nvdash G_{\mathsf{T}}$;*
2. *Se T é ω-consistente, $\mathsf{T} \nvdash \neg G_{\mathsf{T}}$.*

Demonstração. Tome-se $Ded_{\mathsf{T}}(x)$ uma fórmula de acordo com as especificações do lema anterior. Pelo Lema de Diagonalização aplicado à fórmula $\neg Ded_{\mathsf{T}}(x)$, existe uma fórmula fechada G_{T} tal que $(\star)$ $\mathsf{Q} \vdash G_{\mathsf{T}} \leftrightarrow \neg Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner)$.

Suponhamos que T é consistente e, com vista a uma contradição, que $\mathsf{T} \vdash G_{\mathsf{T}}$. Por (1) do Lema anterior vem $\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner)$ e, por $(\star)$, $\mathsf{T} \vdash \neg G_{\mathsf{T}}$. Isto contradiz a consistência de T.

Suponhamos agora que T é ω-consistente e, com vista a uma contradição, que $\mathsf{T} \vdash \neg G_{\mathsf{T}}$. Por $(\star)$, infere-se $\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner)$ e, por (2) do Lema anterior, $\mathsf{T} \vdash G_{\mathsf{T}}$. Isto contradiz novamente a consistência de T (a qual, como vimos, infere-se de T ser ω-consistente). $\square$

Para fixar ideias, vamos aplicar o teorema anterior à teoria PA. Intuitivamente, a fórmula G_{PA} diz de si própria que não se deduz formalmente a partir de PA. E, como se argumentou, não é mesmo formalmente dedutível a partir de PA. Assim, G_{PA} é um exemplo *concreto* duma verdade aritmética que não se deduz formalmente de PA. Esta discussão pode ser refinada. Dado que $\mathsf{PA} \nvdash G_{\mathsf{PA}}$, a teoria $\mathsf{PA} \cup \{\neg G_{\mathsf{PA}}\}$ é consistente. Não é, porém, Σ_1-fiel. Para ver isto, observe-se que a fórmula '$\neg G_{\mathsf{PA}}$' é falsa e é equivalente (sobre Q) a uma fórmula $\exists$-rudimentar.