SEGUNDO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL

FERNANDO FERREIRA

Definição 1. *Seja* T *uma teoria que contenha* Q. *Uma fórmula* $Ded_{\mathsf{T}}(x)$ *satisfaz as* condições de dedutibilidade *de Hilbert-Bernays se, para todas as fórmulas fechadas* α *e* β*,*

1. *Se* $\mathsf{T} \vdash \alpha$ *então* $\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \alpha \urcorner)$.
2. $\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \alpha \to \beta \urcorner) \to (Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \alpha \urcorner) \to Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \beta \urcorner))$.
3. $\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \alpha \urcorner) \to Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \alpha \urcorner) \urcorner)$.

Lema 1. *Considere-se* T *uma teoria que contenha* Q *e* $Ded_{\mathsf{T}}(x)$ *uma fórmula que satisfaça as condições de dedutibilidade de Hilbert-Bernays para* T. *Seja* α *uma fórmula fechada. Então,*

$$\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \alpha \urcorner) \to (Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \neg\alpha \urcorner) \to Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \overline{0} = \overline{1} \urcorner)).$$

Demonstração. Como $\mathsf{T} \vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \overline{0} = \overline{1})$, pela primeira condição de dedutibilidade tem-se,

$$\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \alpha \to (\neg\alpha \to \overline{0} = \overline{1}) \urcorner).$$

O resultado sai agora utilizando a segunda condição de dedutibilidade duas vezes. □

Segundo Teorema da Incompletude de Gödel. *Seja* T *uma teoria consistente que contenha* Q *e* $Ded_{\mathsf{T}}(x)$ *uma fórmula que satisfaça as condições de dedutibilidade de Hilbert-Bernays para* T. *Então,*

$$\mathsf{T} \nvdash Cons_{\mathsf{T}},$$

onde $Cons_{\mathsf{T}}$ *é a fórmula* $\neg Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \overline{0} = \overline{1} \urcorner)$.

Demonstração. Pelo Lema da diagonalização, seja G_{T} uma fórmula fechada tal que $\mathsf{Q} \vdash G_{\mathsf{T}} \leftrightarrow \neg Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner)$. Vamos mostrar que

$$\mathsf{T} \vdash Cons_{\mathsf{T}} \to \neg Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner).$$

O teorema sai deste resultado. Com efeito, se se tivesse $\mathsf{T} \vdash Cons_{\mathsf{T}}$ concluir-se-ia $\mathsf{T} \vdash \neg Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner)$ e, portanto, $\mathsf{T} \vdash G_{\mathsf{T}}$. Pela primeira condição de dedutibilidade ter-se-ia $\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner)$, o que contradiz a consistência de T.

Resta provar o resultado (o seguinte argumento é a formalização do argumento de (1) da versão original do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel). Em primeiro lugar, observamos que

$$\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner) \to \neg G_{\mathsf{T}} \urcorner),$$

é consequência da primeira condição de dedutibilidade. Pela terceira condição de dedutibilidade, tem-se $\mathsf{T} \cup \{Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner)\} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner) \urcorner)$. Ora, pela observação acima e a segunda condição de dedutibilidade, pode concluir-se $\mathsf{T} \cup \{Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner)\} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \neg G_{\mathsf{T}} \urcorner)$. Logo, pelo lema anterior, vem $\mathsf{T} \cup \{Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner)\} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \overline{0} = \overline{1} \urcorner)$ e, portanto,

$$\mathsf{T} \vdash Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner G_{\mathsf{T}} \urcorner) \to Ded_{\mathsf{T}}(\ulcorner \overline{0} = \overline{1} \urcorner).$$

O resultado desejado é o contra-recíproco deste. □

As condições de dedutibilidade desempenham um papel importante na demonstração do segundo teorema da incompletude de Gödel. Considere-se, por exemplo, a teoria PA. Para mostrar que $\mathsf{PA} \nvdash \neg Ded_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \overline{0} = \overline{1} \urcorner)$ não basta considerar uma qualquer fórmula Ded_{PA} que defina aritmeticamente a noção de dedutibilidade formal duma fórmula fechada a partir de PA. Vejamos porquê. Seja $D(x, y)$ uma fórmula que represente em Q a relação R que vale entre números n e k exactamente quando k é o número de Gödel duma dedução formal (a partir de PA) da fórmula fechada cujo número de Gödel é n. Considere-se a fórmula $Ded_{\mathsf{PA}}(x)$ dada por $\exists y(D(x,y) \wedge x \neq \ulcorner \overline{0} = \overline{1} \urcorner)$. Esta fórmula também define aritmeticamente a noção de dedutibilidade formal duma fórmula fechada a partir de PA: α deduz-se formalmente a partir dos axiomas de PA se, e somente se, $Ded_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \alpha \urcorner)$ é verdadeira no modelo *standard* $\mathbb{N}$ (estamos, é claro, a usar o facto de que PA é consistente). Extensionalmente, $Ded_{\mathsf{PA}}(x)$ e $\exists y\, D(x,y)$ definem o mesmo subconjunto de números naturais. Porém, por construção, $\mathsf{PA} \vdash \neg Ded_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \overline{0} = \overline{1} \urcorner)$. A fórmula '$Ded_{\mathsf{PA}}$' em discussão expressa "desonestamente" a noção de dedutibilidade: esta fórmula não pode estar nas condições das hipóteses do segundo teorema da incompletude (ela, de facto, não satisfaz a segunda condição de dedutibilidade de Hilbert-Bernays). Para ver que a formalização "natural" da noção de "ser dedutível" satisfaz as condições de dedutibilidade de Hilbert-Bernays é necessário alguma indução. A teoria PA é certamente suficiente (ainda que os detalhes a verificar sejam bastantes e aborrecidos), mas não é necessária toda a indução aritmética. Um bom substracto para o segundo teorema da incompletude de Gödel é a restrição da teoria PA à indução para fórmulas $\exists$-rudimentares.

O segundo teorema da incompletude de Gödel mostra que a teoria $\mathsf{PA} \cup \{\neg Con_{\mathsf{PA}}\}$ é consistente. Este é mais um exemplo duma teoria consistente que não é Σ_1-fiel.