$\boxed{1.9.11}$

(1) Seja $X \neq \emptyset$ recursivamente enumerável. Fixe-se $m \in X$. Como sabem, existe R uma relação recursiva primitiva tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \in X \iff \exists y\, R(n,y)$.

Define-se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$f(n) = \begin{cases} (n)_0 & \text{se } R((n)_0, (n)_1) \\ m & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Claro que f é recursiva primitiva e é fácil de ver que $X = \operatorname{Im} f$.

(2) Este exercício é mais difícil. A solução que damos baseia-se nalgumas

propriedades da função de Ackermann. Vejam-se a definição 1.2.1 e o exercício

1.2.2. das folhas. Por alguma razão, na solução de 1.2.2 mas é apresentado

que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $x \mapsto A_n(x)$ é primitiva recursiva.

Isto mostra-se por indução em n. É claro que A_0 é primitiva recursiva, pois

$A_0(x) = 2x$. Admitindo que A_n é primitiva recursiva, tem-se

$$A_{n+1}(0) = 1$$

$$A_{n+1}(x+1) = A_n(A_{n+1}(x))$$

o que mostra que A_{n+1} se define por recursão primitiva a partir de A_n e, portanto, é primitiva recursiva.

A função de Ackermann é a função de duas variáveis

$$(n,x) \mapsto A_n(x)$$

e mostra-se que não é recursiva primitiva (mas é recursiva, como uma na teórica usando o teorema da recursão). De facto, já que $A_n(x)$ não é recursiva primitiva.

$\boxed{1.9.11}$ (primeira condição)

Pelo exercício 1.2.2(5), o gráfico da função de Ackermann é (porém) uma relação primitiva recursiva. Seja

$$G = \{ z \in \mathbb{N} : \underbrace{\exists x \le z \ \underbrace{(z = A_x(x))}_{\text{prim. rec.}}}_{\text{prim. rec.}} \}$$

G é um conjunto primitivo recursivo. Além disso é infinito. Vamos mesmo mostrar que $A_x(x) < A_{x+1}(x+1)$, para todo $x \in \mathbb{N}$. Como consequência, $x \le A_x(x)$ e a infinitude de G sai claramente.

Para ver que $A_x(x) < A_{x+1}(x+1)$, verificamos que $A_0(0) = 0$, $A_1(1) = 2$, $A_2(2) = 4$, $A_3(3) = A_2(A_2(A_2(1))) = A_2(A_2(2)) = A_2(4) = 2^{2^{2^{2}}} = 2^{16}$ e,

para $x \ge 3$

$$A_x(x) \underset{1.2.2(2a)}{<} A_x(x+1) \underset{1.2.2(2b)}{\le} A_{x+1}(x) \underset{1.2.2(2a)}{<} A_{x+1}(x+1)$$

Suponhamos, por absurdo, que G é a imagem duma função injectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que é primitiva recursiva. Definimos

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$g(0) = f(0)$$

$$g(n+1) = f\Big(\underbrace{\text{menor } i \le 1 + g(n) \text{ tal que } f(i) > g(n)}_{\text{minimização limitada}}\Big)$$

$\boxed{1.9.11}$ (segunda continuação)

g está bem definida. Com efeito, dado $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\{f(0), f(1), \dots, f(g(n)), f(1+g(n))\}$$

tem $2+g(n)$ elementos (pois f é injetiva). Logo, pelo menos um deles não está no conjunto $\{0, 1, \dots, g(n)\}$ que tem $1+g(n)$ elementos. Assim, existe $i \leq 1+g(n)$ com $f(i) > g(n)$.

Por definição g é primitiva recursiva e, por construção, $g(n) < g(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note-se que daqui sai que g é estritamente crescente e, portanto, $n \leq g(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos que $f(n) \leq g(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto vê-se por indução em n. O caso $n=0$ é trivial. Suponhamos, por hipótese de indução completa, que $\forall i \leq n \, (f(i) \leq g(i))$. Assim $\forall i \leq n \, (f(i) \leq g(n))$. Agora, se $f(n+1) > g(n)$ sai, por definição de $g(n+1)$, que $g(n+1) = f(n+1)$ (note-se que $n+1 \leq 1+g(n)$). Se $f(n+1) \leq g(n)$ vem $g(n+1) > g(n) \geq f(n+1)$. Como se queria.

Finalmente, vamos ver que $A_x(x) \leq g(x)$, para todo $x \in \mathbb{N}$. Isto seria absurdo pois então $A_x(x) =$ menor $z \leq g(x)$ (tal que $z = A_x(x)$). Viria que $x \mapsto A_x(x)$ seria primitiva recursiva, o que não é o caso.

Dado $x \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{f(0), \dots, f(x)\}$ tem $(x+1)$-elementos pois f é injetiva. Por sua vez o conjunto $\{A_0(0), \dots, A_{x-1}(x-1)\}$ tem x elementos. Seja, pois, $0 \leq i \leq x$ com $f(i) \notin \{A_0(0), \dots, A_{x-1}(x-1)\}$. Dado que $f(i) \in \operatorname{im} f = G$ vem $f(i) = A_z(z)$ para certo $z \geq x$. Sai:

$$g(x) \underset{\text{pois } i \leq x}{\geq} g(i) \geq f(i) = A_z(z) \underset{\text{pois } z \geq x}{\geq} A_x(x).$$

//