

G(1)

(a) $W_e = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_e^{(1)}(x) \downarrow\} = \{x \in \mathbb{N} : \underbrace{\text{Program}(e)}_{\substack{\text{prim. rec.} \\ \text{rec. env.}}} \wedge \underbrace{\exists m ((\text{State}(e, x, m))_0 = 0)}_{\substack{\text{prim. rec.} \\ \text{rec. env.}}}\}$

(b) Seja $g(x, y, z) = \varphi_x^{(1)}(z) + \varphi_y^{(1)}(z)$. Este funç. é recursiva parcial.
 Pelo teorema de parametrização existe uma funç. total recursiva $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

tal que:

$$\varphi_{f(x,y)}^{(1)}(z) = \varphi_x^{(1)}(z) + \varphi_y^{(1)}(z)$$

Ver: $z \in W_{f(x,y)} \iff \varphi_x^{(1)}(z) \downarrow \wedge \varphi_y^{(1)}(z) \downarrow \iff z \in W_x \wedge z \in W_y \iff z \in W_x \cap W_y$

Para a união tem que proceder de forma diferente. Como sabemos, existe R recursivo tal que $z \in W_x \iff \exists u R(x, z, u)$. Assim:

R recursivo tal que $g(x, y, z) = \text{menor } u \in \mathbb{N} \text{ tal que } (R(x, z, u) \vee R(y, z, u))$

Pelo teorema de parametrização, seja $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ recursiva total tal que

$$\varphi_{f(x,y)}^{(1)}(z) = g(x, y, z)$$

Ver: $z \in W_{f(x,y)} \iff \exists u (R(x, z, u) \vee R(y, z, u)) \iff \exists u R(x, z, u) \vee \exists u R(y, z, u)$

$\iff z \in W_x \vee z \in W_y \iff z \in W_x \cup W_y$

***** $\{(x, z) \in \mathbb{N}^2 : z \in W_x\} = \{(x, z) \in \mathbb{N}^2 : \underbrace{\text{Program}(x)}_{\Sigma^0_1} \wedge \exists m ((\text{State}(x, z, m))_0 = 0)\}$