Ciências ULisboa

CARTOGRAFIA
ENGENHARIA GEOESPACIAL

PROJEÇÃO CÓNICA CONFORME DE LAMBERT

17/05/2017

Elaborado: Gonçalo Nunes
João Ferreira

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Agenda

- Enquadramento Histórico;
- Projeções Cartográficas;
- Características da Projeção Cónica Conforme de Lambert;
- Formulação Matemática;
- Considerações Finais.

Johann Heinrich Lambert

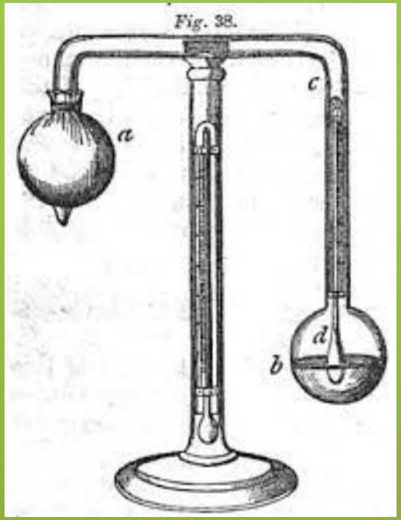
- Mulhouse, 26 de agosto de 1728 Berlim, 25 de setembro de 1777;

- Matemático, contribui para diversas áreas do saber.

(Fonte:https://alchetron.com)

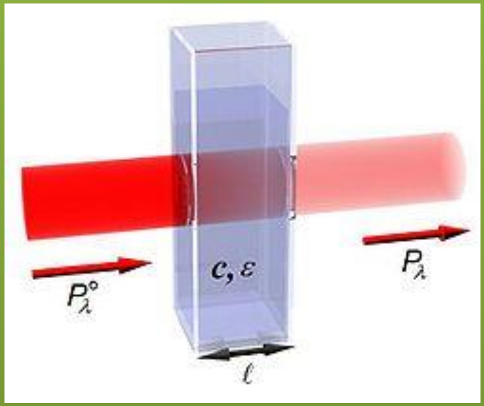
Johann Heinrich Lambert

- No domínio da Física, inventou o Higrómetro (1760);



- Foi o primeiro Matemático a provar que π é um número irracional (1768);

- Na Ótica ficou conhecido pela Lei de Beer-Lambert.



Johann Heinrich Lambert

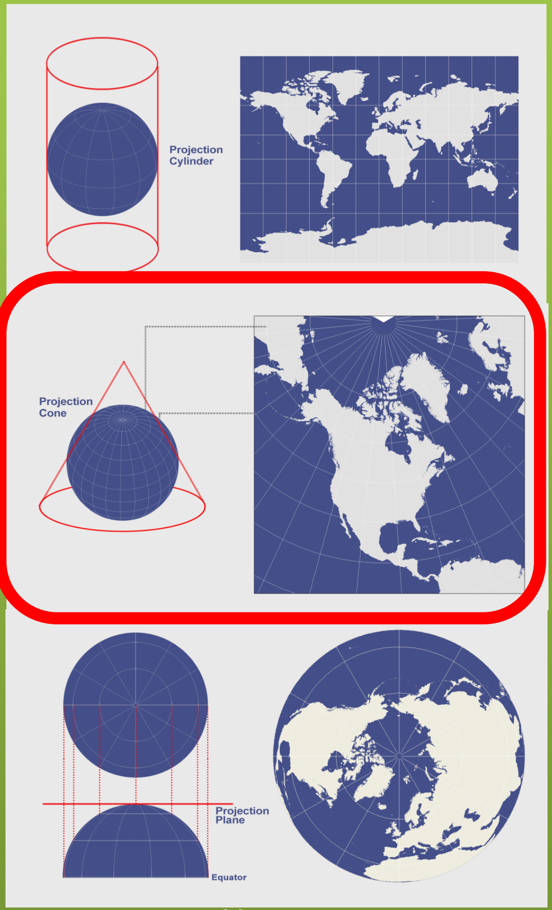
Em 1772 publica *Notes and Comments on the Composition of Terrestrial and Celestial Maps:*

- *Projeção Cónica Conforme de Lambert;*
- *Transversa de Mercator;*
- *Projeção Azimutal de Lambert;*
- *Projeção de Lagrange;*
- *Projeção cilíndrica de Lambert;*
- *Transversa cilíndrica ;*
- *Projeção Cónica de Lambert.*

Projeções cartográficas

Superfície de projeção:

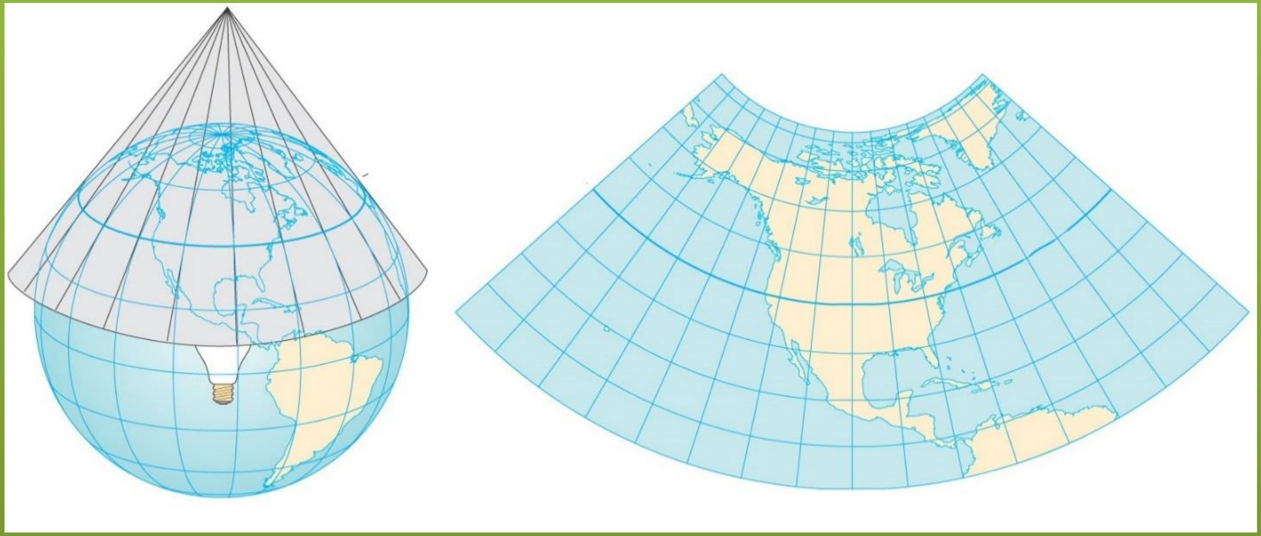
- Cilíndricas;
- Cónicas;
- Planas.



(Fonte:http://gisgeography.com)

Projeções Cónicas

- Representação da superfície terrestre sobre um cone imaginário;
- Aumento da distorção proporcional ao afastamento do(s) paralelo(s) de contacto.



(Fonte: http://www.learnnc.org)

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

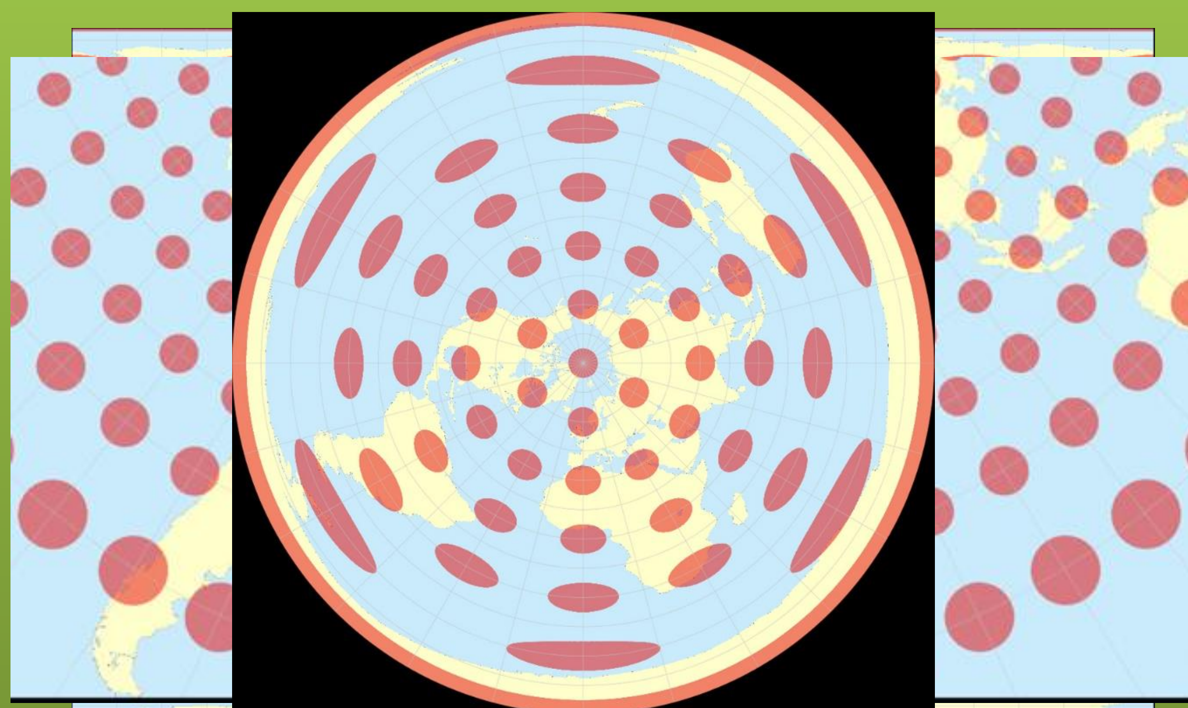
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Projeções cartográficas

Propriedades cartográficas:

Equidistantes

Conformes



(Fonte:http://mapprojections.net)

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

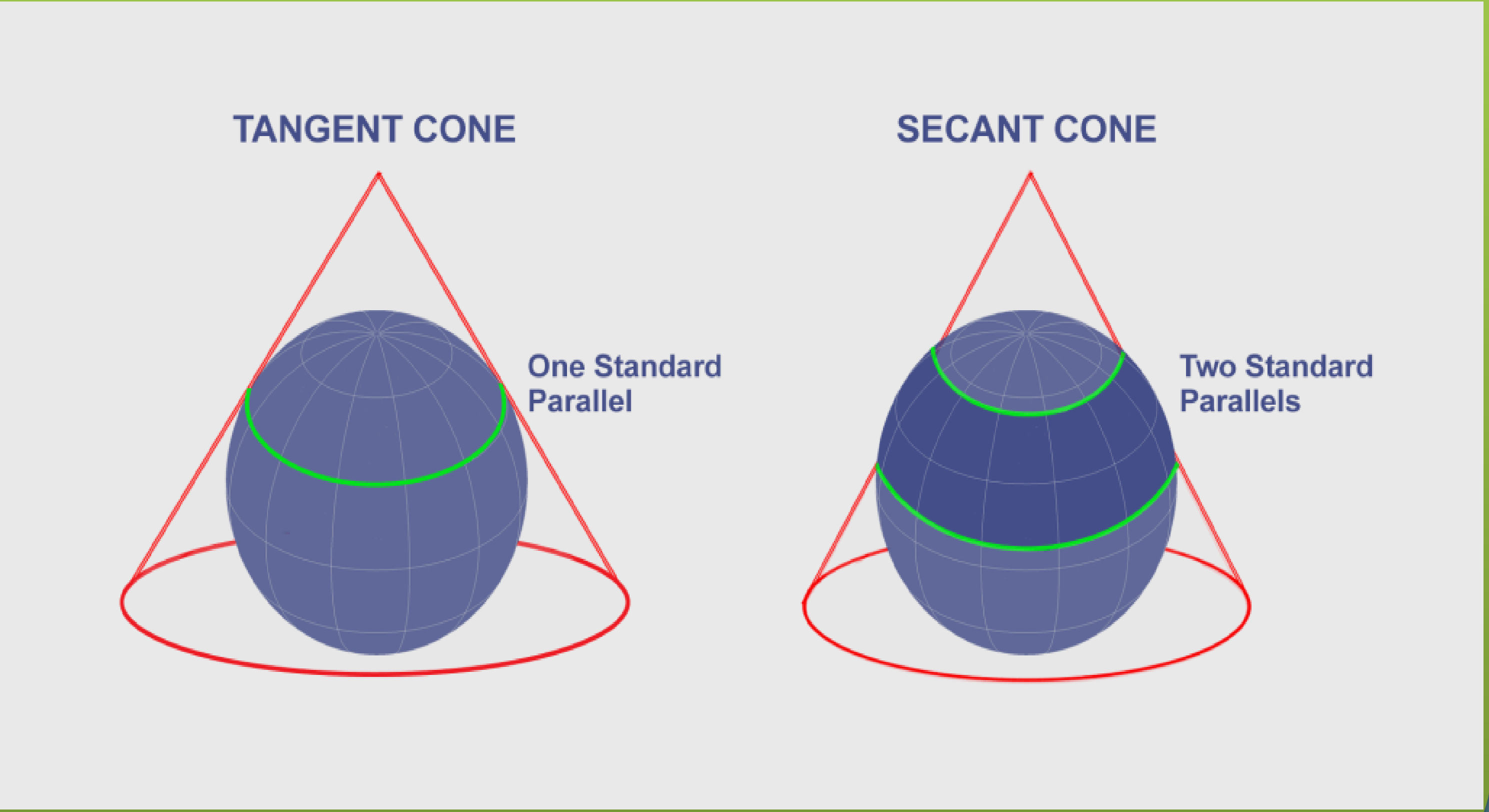
TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Projeção cartográficas

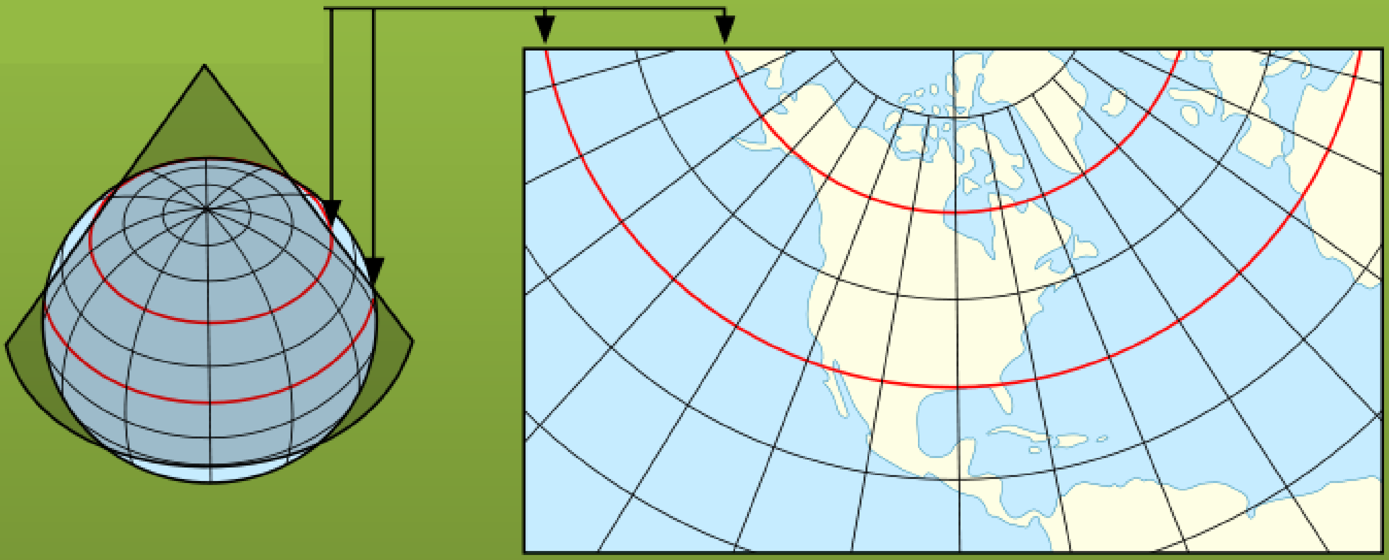
Coincidência:



(Fonte: http://http://gisgeography.com)

Projeção Cónica de Lambert

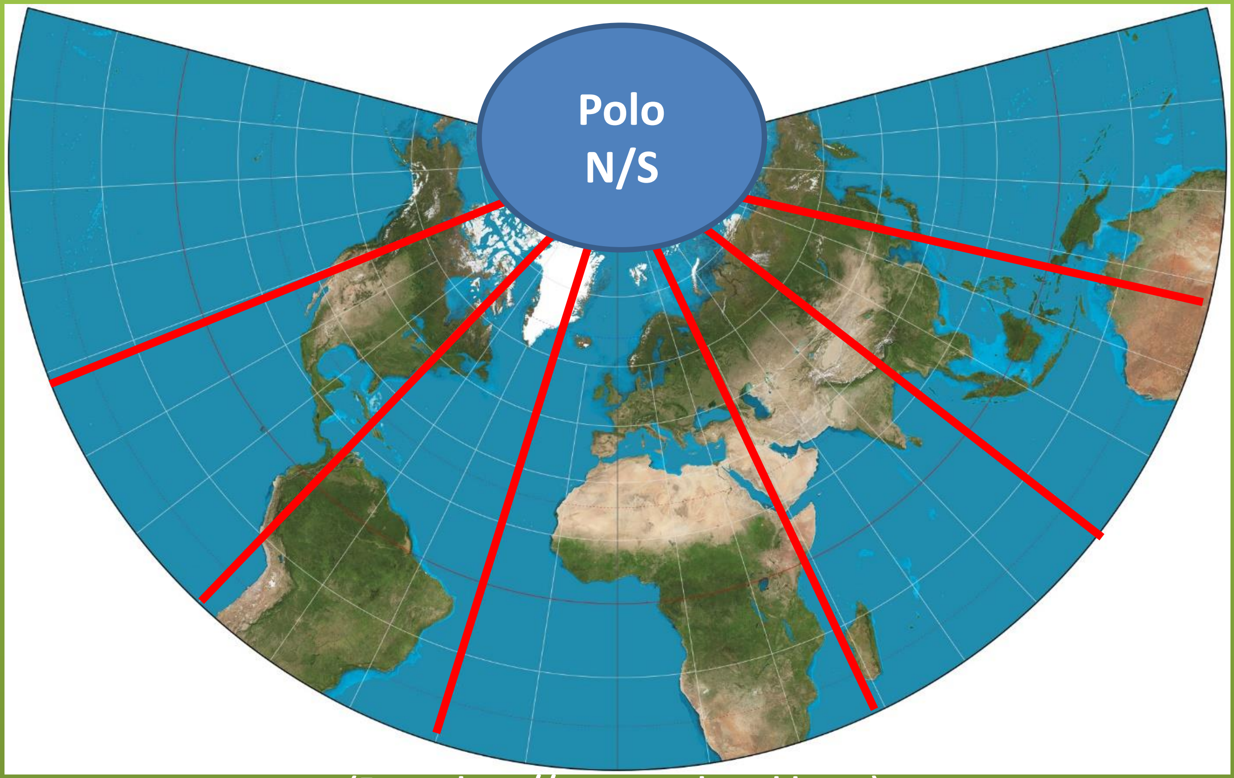
- Cone secante que interseta a superfície terrestre, em dois paralelos de referência;
- Espaçamento entre paralelos, garante a conformidade.



(Fonte: http://www.canadianpplexam.com)

Características da Projeção

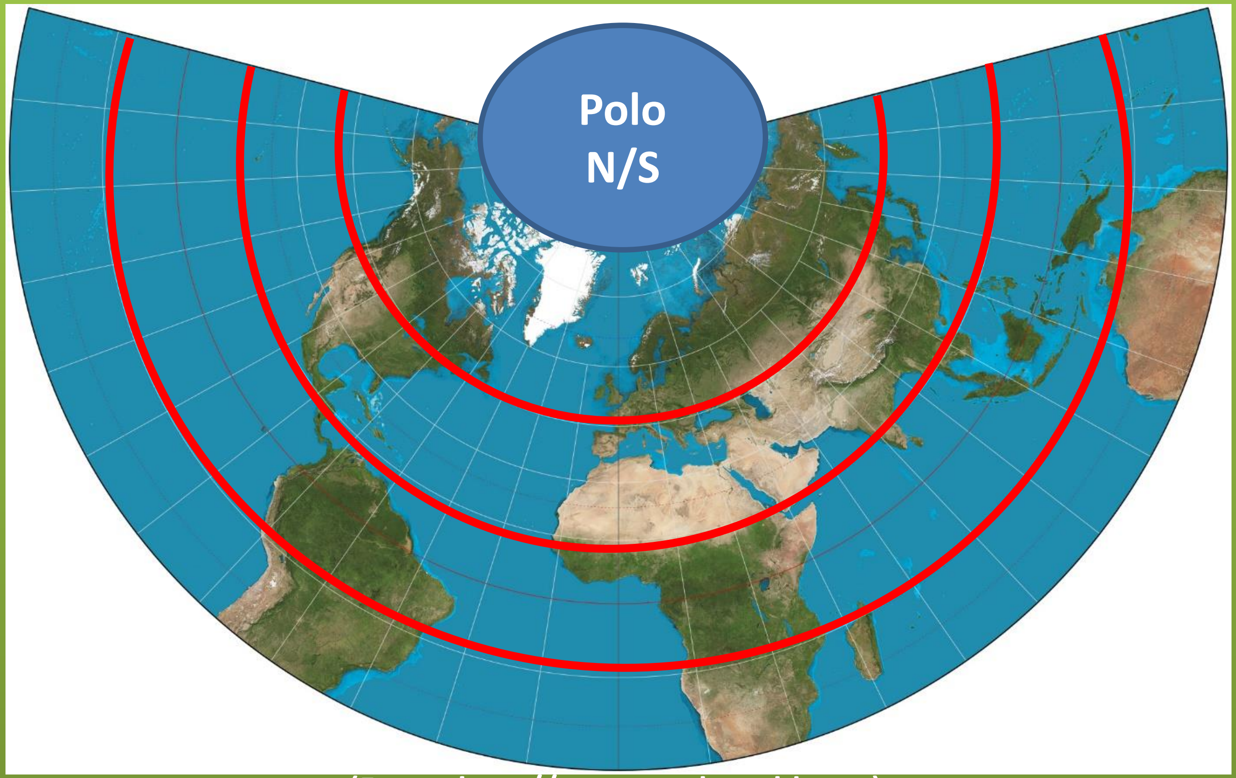
- **Meridianos**, formados por linhas retas que convergem para o mesmo ponto.



(Fonte: http://www.mathworld.com)

Características da Projeção

- **Paralelos**, círculos concêntricos que partilham o mesmo ponto central.



(Fonte: http://www.mathworld.com)

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

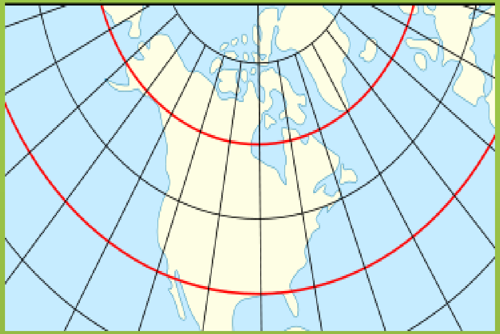
TRANSFORMAÇÃO DIRETA

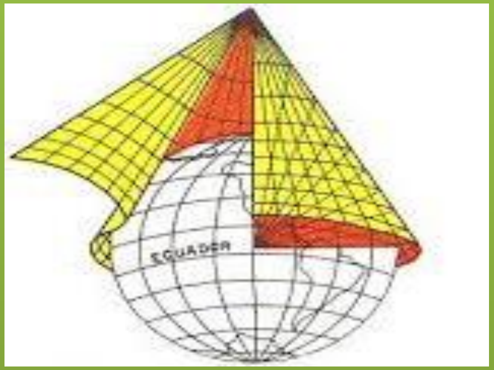
TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Características da Projeção

- Distorção mínima ao longo dos paralelos de referência;
- Normal;
- Utilização em regiões de maior comprimento no sentido Este-Oeste.



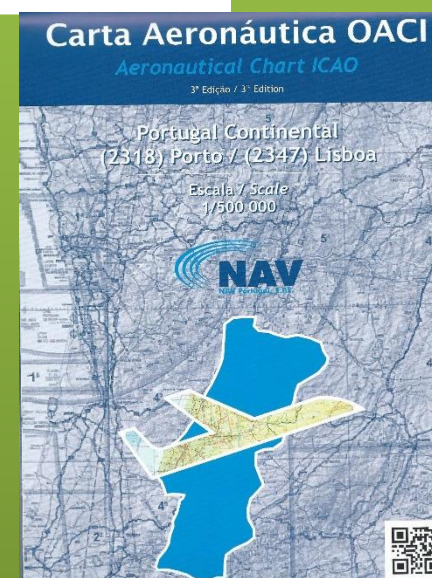


Características da Projeção

Utilizações:

- Aeronáutica.

ICAO



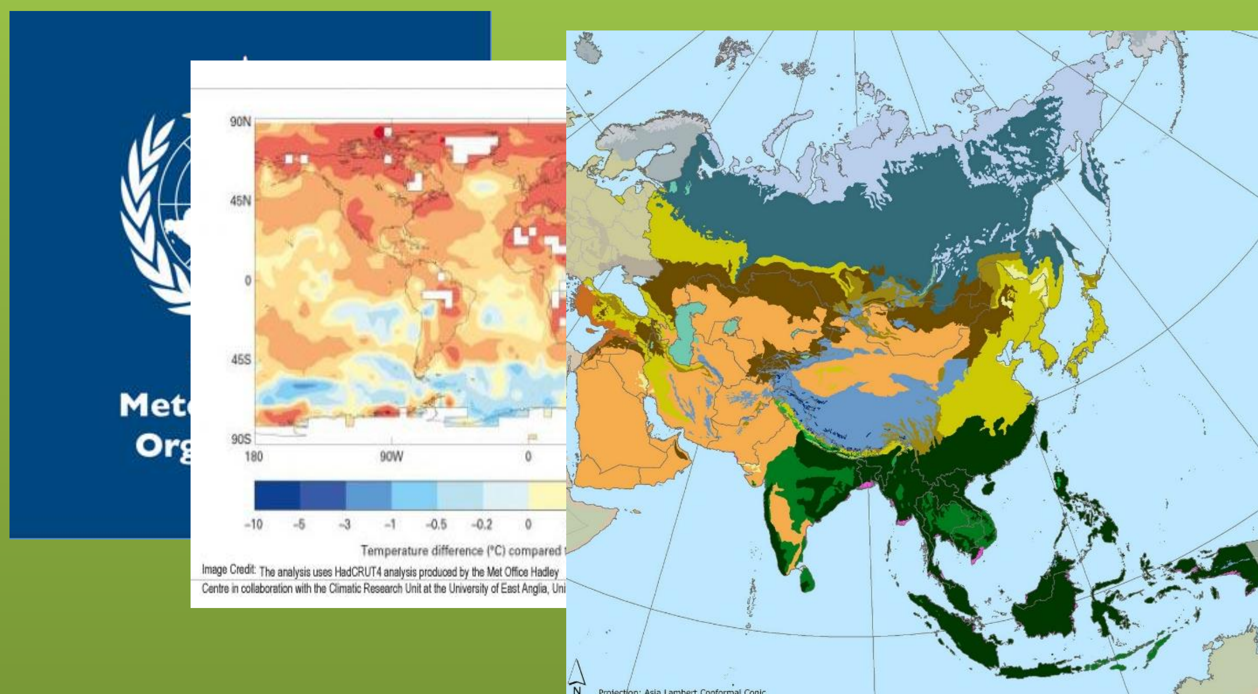
(Fonte: http://www.icao.int)

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO
PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS
CARACTERISTICAS
FORMULAÇÃO MATEMÁTICA
TRANSFORMAÇÃO DIRETA
TRANSFORMAÇÃO INVERSA
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Características da Projeção

Utilizações:

- Organização Mundial de Meteorologia.



(Fonte: http://www.wmo.int)

“Projeção Cónica Conforme de Lambert”

Ciências ULisboa

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÃO DIRETA

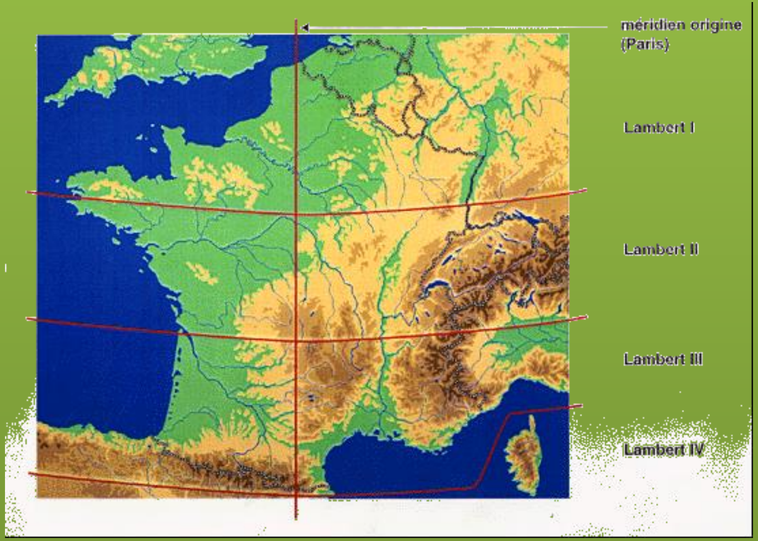
TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Características da Projeção

Utilizações:

- França, 4 sistemas diferentes;
- EUA.



(Fonte: http://www.e-education.psu.edu)

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Características da Projeção

Projeção Cónica de Lambert:

- Natureza → Cónica
- Coincidência → Secante
- Posição → Normal
- Propriedades → Conforme

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Formulação Matemática

Transformação Direta:

$$\begin{matrix} \Phi \\ \lambda \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \theta \\ R \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$$

(Elipsóide) (plano) (Plano)

Transformação Inversa:

$$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \Phi \\ \lambda \end{matrix}$$

(Plano) (Elipsóide)

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Transformação Direta

- **C. Elipsoidais (Φ, λ)-> C. Polares (θ,R)**

Tomando sobre o elipsóide as coordenadas Φ e λ, latitude e longitude isométricas, e sobre o plano as coordenadas polares isométricas μ e θ, impondo a condição de conformidade:

$$\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{i\theta} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{i\lambda})$$

para λ =0 obtém-se θ =0 o que mostra que o meridiano origem das longitudes é representado pelo eixo polar; por outro lado pretende-se que seja θ =const. para λ =const.

Ora tem-se:

$$\mu = (f(\Phi))_{\lambda=0} - \frac{\lambda^2}{2!}\left(\frac{d^2 f}{d\Phi^2}\right)_{\lambda=0} + \cdots$$

$$\theta = \lambda\left(\frac{df}{d\Phi}\right)_{\lambda=0} - \frac{\lambda^3}{3!}\left(\frac{d^3 f}{d\Phi^3}\right)_{\lambda=0} + \cdot\cdot$$

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO
PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS
CARACTERISTICAS
FORMULAÇÃO MATEMÁTICA
TRANSFORMAÇÃO DIRETA
TRANSFORMAÇÃO INVERSA
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Transformação Direta

Não devendo q depender de Φ tem-se:

$$\left(\frac{df}{d\Phi}\right)_{\lambda=0} = h \Rightarrow \text{h=const}$$

e portanto, para λ =0, f = hΦ , df = h dΦ, e para λ qualquer f = h(Φ + iλ) , donde:

$$\mu = h\Phi$$

$$\theta = h\lambda$$

A coordenada R está relacionada com a coordenada isométrica μ pela expressão R = pe^{μ}

Substituindo o valor da coordenada m pela expressão anterior obtemos R = p$e^{h\Phi}$

Seja Φ_0 a latitude do paralelo central da região e R_0 (a determinar) o raio do arco de circunferência representativo daquele paralelo; será:

$$R_0 = pe^{h\Phi_0}$$

e eliminando p resultam as seguintes fórmulas de transformação:

Transformação Direta

- C. Elipsoidais (Φ, λ)-> C. Polares (θ,R)

$$R = R_0 e^{h(\Phi - \Phi_0)}$$

$$\theta = h\lambda$$

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Transformação Direta

- **C. Elipsoidais (Φ, λ)-> C. Polares (θ,R)**

Sobre o elipsóide e sobre o plano, respectivamente:

$$ds_1{}^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 = h^2 R_0{}^2 e^{2h(\Phi-\Phi_0)}(d\Phi^2 + d\lambda^2)$$

donde o módulo linear

$$k = \frac{ds_1}{ds}$$

$$k = \frac{|h| R_0 e^{h(\Phi-\Phi_0)}}{r}$$

Ficará apenas a faltar algumas verificações de casos específicos como valores negativos de algumas constantes em algumas posições do planeta.

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

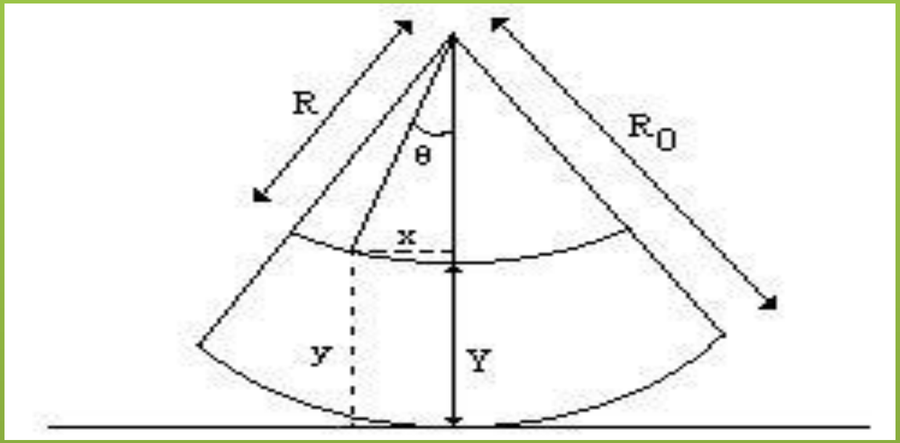
TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Transformação Direta

- C. Polares (θ,R)-> C. Cartesianas (X,Y)



Atendendo à figura obtêm-se as fórmulas de transformação em coordenadas cartesianas

$$x = (R_0 - Y)\sin\theta$$

$$y = R_0 - (R_0 - Y)\cos\theta$$

$$\theta = -\sin\Phi_0 . \lambda$$

$$R_0 = N_0 |\cot\Phi_0|$$

Transformação Direta

- **Factor de escala**

Como é k = dy / ds vem:

$$k = 1 + \frac{\sigma^2}{2\rho_0 N_0} + \cdots$$

Visto $\sigma \approx y$

$$k = 1 + \frac{y^2}{2\rho_0 N_0}$$

Sobre o paralelo central $k_0 = 1$; k cresce rapidamente com o afastamento ao paralelo central o que significa que o sistema é conveniente para zonas alongadas na direcção EW mas estreitas na direcção NS.

No caso de a Projecção ser tangente/secante:

$$y = k_0\left(\sigma + \frac{\sigma^3}{6\rho_0 N_0} + \cdots\right)$$

$$k = k_0\left(1 + \frac{y^2}{2\rho_0 N_0} + \cdots\right)$$

Transformação Inversa

- **C. Cartesianas (X,Y)-> C. Elipsoidais (Φ, λ)**
  - Longitude(λ)

É determinada pela inversão directa das seguintes equações:

$$\tan\theta = \frac{x}{R_0 - y}$$

$$Y = R_0 - R$$

$$R = \frac{x}{\sin\theta}$$

$$\lambda = \frac{\theta}{\sin\Phi_0}$$

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Transformação Inversa

- **C. Cartesianas (X,Y)-> C. Elipsoidais (Φ, λ)**
  - **Latitude (Φ)**

É determinada por um processo iterativo em 5 passos:

1º - Calcula-se o valor do comprimento de arco meridiano aproximado entre R_0 e R a partir da expressão:

$$\sigma_{ap} = \frac{R_0 - R}{k_0} = \frac{Y}{k_0}$$

2º - Cálculo da primeira aproximação da latitude Φ_1 :

$$\Phi_1 = \Phi_0 + \frac{\sigma_{ap}}{a(1-e^2)k_0}$$

Esta expressão obtém-se da inversão da aproximação linear do comprimento de arco meridiano:

$$\sigma_{ap} = a(1-e^2)[A(\Phi_1 - \Phi_0)]$$

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Transformação Inversa

- **C. Cartesianas (X,Y)-> C. Elipsoidais (Φ, λ)**
  - **Latitude (Φ)**

3º - Com o valor de Φ_1 é calculado um novo valor do comprimento do arco meridiano usando a expressão de Rapp (1984):

$$\sigma = a(1-e^2)\left\{A(\Phi_1-\Phi_0)-\frac{B}{2}(\sin 2\Phi_1-\sin 2\Phi_0)+\frac{C}{4}(\sin 4\Phi_1-\sin 4\Phi_0)-\right.$$

$$\left.-\frac{D}{6}(\sin 6\Phi_1-\sin 6\Phi_0)+\frac{E}{8}(\sin 8\Phi_1-\sin 8\Phi_0)-\frac{F}{10}(\sin 10\Phi_1-\sin 10\Phi_0)+\cdots\right.$$

Onde A,B,C,D,E,F são constantes calculadas a partir da excentricidade (e).

Transformação Inversa

4º - Com o novo valor de σ’ estamos em condições de determinar a correcção a aplicar à latitude aproximada inicial (Φ_1) :

$$\Delta\Phi = \frac{\sigma_1 - \sigma'}{\rho_1}$$

Em que ρ_1 é raio do meridiano no ponto P_1 e é dado por:

$$\rho_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 sin^2 \Phi_1)^{\frac{3}{2}}}$$

5º - Calcula-se um novo valor para a latitude:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Delta\Phi$$

Os passos 3,4 e 5 devem ser repetidos até que dF seja tão pequeno quanto possível (p.e. 10^{-10}).

Transformação Inversa

- **C. Cartesianas (X,Y)-> C. Elipsoidais (Φ, λ)**

  - Correcção de redução à corda (β) :

    $$\beta = \frac{1}{6\rho_0 N_0 \sin 1''}(2y_A + y_B)(x_B - x_A)$$

  - Correcção a aplicar a um comprimento finito elipsóidico para se obter o comprimento cartográfico ($s_1 - s$) :

    $$s_1 - s = \frac{1}{6\rho_0 N_0}\,({y^2}_A + y_A y_B + {y^2}_B)$$

ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

CARACTERISTICAS

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÃO DIRETA

TRANSFORMAÇÃO INVERSA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerações Finais

Escala:

- Verdadeira – Ao longo de um dos paralelos de referência seleccionados
- Constante – Ao longo de qualquer paralelo
- Igual - Em todas as direcções de qualquer ponto

Distorção:

- Sem distorção – ao longo dos paralelos de referência
- Constante – ao longo de qualquer outro paralelo

Considerações Finais

Principal uso

- Trafego aéreo:
  - ✓ Linha recta = à distância real entre pontos
  - ✓ Distância mais curta = arcos de círculo distendidos
  - ✓ Mantêm os ângulos medidos, intactos
- Representação de áreas pouco extensas, preferencialmente estendidas sobre este-oeste

Ciências ULisboa

CARTOGRAFIA
ENGENHARIA GEOESPACIAL

PROJEÇÃO CÓNICA CONFORME DE LAMBERT

17/05/2017

Elaborado: Gonçalo Nunes
João Ferreira