1. Camada limite atmosférica

Equações da dinâmica

Num referencial em rotação, a atmosfera satisfaz as ***equações de Navier-Stokes*** para um ***fluido newtoniano***:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + fv + \nu\nabla^2 u \tag{1-1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - fu + \nu\nabla^2 v \tag{1-2}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g + \nu\nabla^2 w \tag{1-3}$$

onde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ é o operador laplaciano, f é o parâmetro de Coriolis, ν é a viscosidade cinemática do ar. As equações anteriores incluem 5 variáveis (u, v, w, ρ, P), pelo que não constituem um sistema fechado. A estas equações pode acrescentar-se a equação termodinâmica

$$\frac{ds}{dt} = c_p\frac{d\ln\theta}{dt} = \frac{\dot{Q}}{\rho T} \tag{1-4}$$

onde $\dot{Q}$ é a taxa de aquecimento por unidade de volume, a equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla.\rho\vec{v} = -\frac{\partial\rho u}{\partial x} - \frac{\partial\rho v}{\partial y} - \frac{\partial\rho w}{\partial z} \tag{1-5}$$

a equação de estado

$$p = R_d\rho\, T \tag{1-6}$$

e a definição de temperatura potencial

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_{00}}\right)^{R_d/c_p} \tag{1-7}$$

O sistema total de 7 equações inclui exactamente 7 incógnitas $(u, v, w, P, \rho, T, \theta)$, constituindo portanto um sistema fechado passível de solução, se forem conhecidos os forçamentos $(\dot{Q})$, os parâmetros (f, g, ν) e as condições fronteira.

Equações de Reynolds e turbulência

As equações da dinâmica de fluidos (equações de Navier-Stokes no caso geral) representam o fluido como um "meio contínuo", i.e., referem-se às diferentes variáveis como funções contínuas do espaço e do tempo. No mundo real não é possível "ver" os fluidos com o detalhe infinito inerente a essa distribuição contínua. Qualquer sistema de observação realiza necessariamente operações de média (no espaço e no tempo) e limita-se a observar os valores médios resultantes.

Se as variáveis características do fluido (temperatura, velocidade, densidade, etc.) variarem "lentamente" de ponto para ponto, a observação de valores médios numa rede de pontos será suficiente para reconstruir a campo contínuo sem perda de informação. Se não for esse o caso, haverá perda. Em qualquer caso, podemos obter uma equação para a evolução das propriedades médias do fluido, a partir das equações de Euler . Para o efeito, vamos definir a operação de média $(\bar{\ })$ com as seguintes propriedades:

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} \tag{1-8}$$

$$\overline{\alpha a} = \alpha \bar{a} \tag{1-9}$$

$$\overline{a'} = 0 \tag{1-10}$$

Em que:

$$a = \bar{a} + a' \tag{1-11}$$

a e b são funções contínuas, α é uma constante. A expressão (1-11) define a variável contínua num ponto genérico como a soma do seu valor médio com uma perturbação. As propriedades (1-8) e (1-9) definem a média como um operador linear.

Considere-se então uma das equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv + \nu\nabla^2 u \tag{1-12}$$

Aplicando o operador de média, obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} - \overline{v\frac{\partial u}{\partial y}} - \overline{w\frac{\partial u}{\partial z}} - \overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} + f\bar{v} + \nu\nabla^2\bar{u} \tag{1-13}$$

No primeiro membro utilizou-se a condição de linearidade para permutar o operador de média com a derivação parcial (também uma operação linear). No último termo considerou-se $f = const$. Os termos restantes oferecem mais dificuldade, dado que não são lineares. Vamos considerar o primeiro termo advectivo:

$$\begin{aligned} -\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} &= -\overline{(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}} = -\overline{(\bar{u})\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}} - \overline{(u')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}} - \overline{(\bar{u})\frac{\partial(u')}{\partial x}} - \overline{(u')\frac{\partial(u')}{\partial x}} \\ &= -\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} \end{aligned} \tag{1-14}$$

Se repetirmos o procedimento anterior para os outros termos não lineares, obtemos a ***equação de Reynolds***:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} - \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} - \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} - \overline{\left(\frac{1}{\rho}\right)}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \overline{\left(\frac{1}{\rho}\right)'\frac{\partial p'}{\partial x}} + f\bar{v} \\ + \nu\nabla^2\bar{u} \end{aligned} \tag{1-15}$$

Donde se conclui que a evolução dos campos médios ($\overline{\ }$) depende dos campos perturbados, por intermédio de médias dos produtos de perturbações, i.e. de covariâncias. As pequenas escalas (turbulência) actuam sobre as escalas maiores, e vice-versa. A presença de turbulência tem efeito qualitativo sobre as equações da dinâmica, visto implicar a introdução de variáveis adicionais, transformando o sistema de Navier-Stokes (1-1)-(1-7) num sistema aberto, com um número de incógnitas superior ao número de equações. O “problema do fecho” das equações de Reynolds consiste na obtenção de novas equações, independentes das anteriores, que compensar as variáveis (turbulentas) extra.

Não existe uma solução geral satisfatória para o problema do fecho. A solução mais simples obtém-se no caso de um fluido incompressível, i.e. que satisfaz a equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1-16}$$

e para o qual $\rho = const$. Nesse caso pode escrever-se:

$$-\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} - \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} - \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'u'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'u'}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'u'}\right) \tag{1-17}$$

o mostra que a turbulência está associada a fluxos perturbados de momento linear, sendo o seu impacto sobre o escoamento médio dado pela convergência desses fluxos. Perto da superfície o termo de fluxo vertical ($\overline{w'u'}$) é, em geral, dominante. É usual admitir que os fluxos turbulentos são proporcionais ao gradiente do vento médio:

$$\left(\overline{w'u'}\right) = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{1-18}$$

Introduzindo o fecho (de primeira ordem) anterior, obtém-se a equação de Euler modificada:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial}{\partial z}\left(-K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) + \nu \nabla^2 \bar{u} \tag{1-19}$$

e ainda, na direcção y,

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial}{\partial z}\left(-K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) + \nu \nabla^2 \bar{v} \tag{1-20}$$

Nesta aproximação, a turbulência afecta o escoamento médio de forma em tudo semelhante à viscosidade, tomando o parâmetro K (difusividade turbulenta) o papel da viscosidade cinemática (ν). No caso do ar, K é várias ordens de grandeza maior que a viscosidade cinemática, excepto na região imediatamente vizinha da superfície (e.g. o primeiro mm). Note-se que K não é uma constante.

Espiral de Ekman

As equações de Reynolds, mesmo na aproximação do fecho de primeira ordem e sendo difusividade turbulenta especificada, não têm solução analítica. É, no entanto, possível obter uma solução analítica para o caso, muito especial, em que se admite existir estacionaridade (solução independente do tempo), homogeneidade horizontal (solução independente da posição horizontal, mas a homogeneidade horizontal não se estende ao campo da pressão médio) e difusividade turbulenta constante e muito maior que a viscosidade cinemática. Nesse caso, as equações do movimento horizontal escrevem-se:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial}{\partial z}\left(-K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = 0 \tag{1-21}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial}{\partial z}\left(-K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) = 0 \tag{1-22}$$

ou, introduzindo a definição do vento geostrófico e notando que K_m é constante e que z é a única variável independente:

$$f(\bar{v} - v_g) + K_m \frac{d^2\bar{u}}{dz^2} = 0 \tag{1-23}$$

$$-f(\bar{u} - u_g) + K_m \frac{d^2\bar{v}}{dz^2} = 0 \tag{1-24}$$

Definindo:

$$\begin{cases} c = \bar{u} + i\bar{v} \\ c_g = u_g + iv_g \end{cases} \tag{1-25}$$

onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, multiplicando (1-23) por i e subtraindo (1-24) obtém-se uma única equação para o vento (complexo) na camada limite (estacionária, homogénea de difusividade turbulenta constante):

$$iK_m \frac{d^2c}{dz^2} + f(c - c_g) = 0 \tag{1-26}$$

A equação (1-26) é uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes, facilmente resolúvel no caso em que o vento geostrófico (c_g) é constante (i.e. independente de z). Sendo o vento geostrófico constante é conveniente definir um sistema de coordenadas com o eixo x alinhado com o vento geostrófico, i.e. paralelo às isóbaras. Nesse caso será $c_g = u_g$ e pode escrever-se

$$K_m \frac{d^2(c - c_g)}{dz^2} - if(c - c_g) = 0 \tag{1-27}$$

A equação (1-27) é uma equação homogénea. A sua equação característica é:

$$K_m\lambda^2 - if = 0 \tag{1-28}$$

com soluções:

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{if}{K_m}} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{f}{K_m}} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{f}{2K_m}} = \pm(1+i)\gamma \tag{1-29}$$

Assim a solução geral será:

$$(c - c_g) = Ae^{\gamma z}e^{i\gamma z} + Be^{-\gamma z}e^{-i\gamma z} \tag{1-30}$$

onde A e B são constantes de integração. Impondo as condições fronteira:

$$\begin{cases} \lim_{z\to\infty} u = u_g \\ \lim_{z\to\infty} v = 0 \\ u(z=0) = v(z=0) = 0 \end{cases} \tag{1-31}$$

vem

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = -u_g \end{cases} \tag{1-32}$$

$$\left(u + iv - u_g\right) = -u_g e^{-\gamma z}(\cos\gamma z - i\sin\gamma z) \tag{1-33}$$

Logo, a solução de (1-26) vem:

$$\begin{cases} u = u_g(1 - e^{-\gamma z}\cos\gamma z) \\ v = u_g e^{-\gamma z}\sin\gamma z \end{cases} \tag{1-34}$$

constituindo a ***espiral de Ekman***. Em (1-34) $\gamma = \sqrt{\frac{f}{2K_m}}$ define a escala vertical da camada limite planetária.

Exercício 1-1. Calcule o ângulo entre o vento e as isóbaras junto da superfície, na espiral de Ekman.

O ângulo será definido por:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$$

Em $z = 0$, tem-se $u = v = 0$ o que implicaria um ângulo indeterminado. No entanto é possível fazer o cálculo, levantando a indeterminação (utilizando a regra de l'Hôpital):

$$\tan\alpha = \lim_{z\to 0}\left(\frac{u_g(1-e^{-\gamma z}\cos(\gamma z))}{u_g e^{-\gamma z}\sin(\gamma z)}\right) = 1$$

ou seja, junto da superfície o ângulo vale $45°$.

Exercício 1-2. Numa espiral de Ekman aos 40N o vento torna-se paralelo às isóbaras aos 1000 m. Calcule o valor do coeficiente de difusividade turbulenta K_m. Compare com o valor da viscosidade cinemática do ar.

O vento será paralelo às isóbaras quando $v = 0$ e $z > 0$. O primeiro valor de $z = h$ em que se verifica essa condição será dado por:

$$z = h = \frac{\pi}{\gamma}$$

Logo

$$h = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{f}{2K_m}}} \Longrightarrow K_m = \frac{fh^2}{2\pi^2} \approx 4.75\ m^2 s^{-1} \gg \nu$$

Camada limite de superfície

A aproximação $K = const$ utilizada na solução de Ekman não pode ser válida perto da superfície, visto que a dimensão dos turbilhões é limitada nas proximidades da superfície, implicando que $\lim_{z\to 0} K = 0$.

Se nos colocarmos perto da superfície mas ainda fora da camada viscosa,

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(-K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = 0 \tag{1-35}$$

ou

$$\left(-K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = const \tag{1-36}$$

Se admitirmos que K_m é proporcional a z junto da superfície, o que satisfaz a condição $\lim_{z\to 0} K = 0$, fica:

$$kz\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_* \tag{1-37}$$

onde $k \approx 0.4$ é a constante de von Karman, e u_* é a ***velocidade de atrito***. Note-se que a equação (1-37) não pode ser válida na vizinhança da superfície, visto que nessa região a viscosidade se torna relevante. Integrando (1-37) obtém-se:

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \tag{1-38}$$

onde z_0 representa o nível inferior de validade desta teoria, no qual a velocidade média se anula, e é designado por ***comprimento de rugosidade***. Em primeira aproximação o comprimento de rugosidade é uma fracção da altura dos elementos de rugosidade, existindo tabelas empíricas que permitem estabelecer o seu valor para superfícies homogéneas típicas.

Exercício 1-3. Numa superfície homogénea coberta de relva com $z_0 = 3\ mm$, mediu-se um vento aos 10m de 10 ms^{-1}. Estime o vento aos 80 m.

Utiliza-se (1-38) aos dois níveis referidos (10 e 80):

$$u_{10} = \frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{10}{z_0}\right)$$

$$u_{80} = \frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{80}{z0}\right)$$

Da primeira equação retira-se:

$$u_* = \frac{ku_{10}}{\ln\left(\frac{10}{z_0}\right)} \approx 0.49\ ms^{-1}$$

Logo: $$u_{80} = \frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{80}{z0}\right) \approx 12.5\ ms^{-1}$$

Exercício 1-4. Numa superfície homogénea mediu-se um vento a dois níveis obtendo-se $\boldsymbol{u(z = 10m) = 10ms^{-1}}$, $\boldsymbol{u(z = 30m) = 12ms^{-1}}$. Calcule o vento aos 80m.

Tem-se:

$$u_{10} = \frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{10}{z_0}\right)$$

$$u_{30} = \frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{30}{z_0}\right)$$

Subtraindo:

$$u_{30} - u_{10} = \frac{u_*}{k}\left[\ln\left(\frac{30}{z_0}\right) - \ln\left(\frac{10}{z_0}\right)\right] = \frac{u_*}{k}\ln 3 \Longrightarrow u_* = k\,\frac{u_{30}-u_{10}}{\ln 3} \approx 0.73\ ms^{-1}$$

Substituindo:

$$z_0 = 10\ e^{-ku_{10}/u_*} \approx 0.04\ m$$

E finalmente:

$$u_{80} = \frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{80}{z_0}\right) \approx 13.8\ ms^{-1}$$