Ciências ULisboa

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

# PRÁTICAS DE CARTOGRAFIA

DEGGE – LICENCIATURA EM ENGENHARIA GEOESPACIAL

2018/2019

## ALGUNS CONCEITOS

### SISTEMAS DE REFERÊNCIA ADOTADOS EM PORTUGAL

**Direção-Geral do Território (DGT)**

http://www.dgterritorio.pt/cartografia_e_geodesia/geodesia/sistemas_de_referencia/

| Portugal Continental | |
|---|---|
| **ED50 - European Datum 1950** (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89)<br>**Bessel Datum Lisboa** (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89)<br>**Datum Lisboa** (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89)<br>**Datum 73** (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89) | **PT-TM06/ETRS89** - European Terrestrial Reference System 1989 |

| Arquipélago dos Açores | Arquipélago da Madeira | Regiões Autónomas |
|---|---|---|
| **Datum S. Braz - S. Miguel** (Grupo Oriental do Arquipélago dos Açores)<br>**Datum Base SW - Graciosa** (Grupo Central do Arquipélago dos Açores)<br>**Datum Observatório** - Flores (Grupo Ocidental do Arquipélago dos Açores) | **Datum Base SE** - Porto Santo (Arquipélago da Madeira) | **PTRA08-UTM/ITRF93** - realização do International Terrestrial Reference Frame 1993 |

**Centro de Informação Geoespacial do Exército (CIGeoE)**

https://www.igeoe.pt/index.php?id=38&cat=3

| Portugal Continental | |
|---|---|
| **Datum Lisboa militares** (Obsoleto - Substituído pelo sistema TM/WGS84) | **WGS84 / TM (Gauss-Kruger)** |

| Regiões Autónomas |
|---|
| **WGS 84 / UTM** |

## TIPOS DE COORDENADAS

| Coordenadas | V.G. Aboboreira (Beja)<br>PT-TM06-ETRS89 |
|---|---|
| **Cartesianas (*X*, *Y*, *Z*)** | $X$= 4993821.5571 m<br>$Y$= -676850.4038 m<br>$Z$= 3896819.7516 m |
| **Geodésicas ou geográficas ($\phi$, $\lambda$, $h$)** | $\phi$= 37° 53’ 58,7635” N<br>$\lambda$= 07° 43’ 07,2999” W Gr<br>$h$= 257,85 m |
| **Retangulares (*M*, *P*)** | $M$= 36 448,61 m<br>$P$= -196 253,96 m |

## TRANSFORMAÇÃO ENTRE COORDENADAS

### TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS NUM MESMO *DATUM*

COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS CARTESIANAS ($X$, $Y$, $Z$) ⟷ COORDENADAS GEODÉSICAS ($\phi$, $\lambda$, $h$) ⟷ COORDENADAS RETANGULARES ($M$, $P$, $H$)

### TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ENTRE DIFERENTES *DATA*

| DATUM ORIGEM | | DATUM DESTINO |
|---|---|---|
| COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS CARTESIANAS ($X_i$, $Y_i$, $Z_i$) | *Transformação de Helmert*<br>*Fórmulas de Bursa-Wolf* ⟶ | COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS CARTESIANAS ($X_f$, $Y_f$, $Z_f$) |
| COORDENADAS GEODÉSICAS ($\phi_i$, $\lambda_i$, $h_i$) | *Fórmulas de Molodensky* ⟶ | COORDENADAS GEODÉSICAS ($\phi_f$, $\lambda_f$, $h_f$) |
| COORDENADAS RETANGULARES ($M_i$, $P_i$) | *Transformação Polinomial* ⟶ | COORDENADAS RETANGULARES ($M_f$, $P_f$) |

## EXERCÍCIO 1

**Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação direta das coordenadas geodésicas ($\phi$, $\lambda$) dos seguintes vértices geodésicos nas correspondentes coordenadas retangulares (*M*, *P*).**

| V.G. Aboboreira (Beja) | | | V. G. Cabeço da Ponta (Porto Santo - Madeira) |
|---|---|---|---|
| **PT-TM06/ETRS89** | **Datum Lisboa** | **Datum 73** | **PTRA08-UTM/ITRF93** |
| $\phi$= 37° 53’ 58,7635” N | $\phi$= 37° 53’ 53,17608” N | $\phi$= 37° 53’ 56,01135” N | $\phi$= 33° 02’ 15,2697” N |
| $\lambda$= 07° 43’ 07,2999” WGr | $\lambda$= 07° 43’ 03,09455” WGr | $\lambda$= 07° 43’ 10,59207” WGr | $\lambda$= 16° 21’ 41,8679” WGr |
| *h*= 257,85 m | *h*= 208,7901 m | *h*= 204,8015 m | *h*= 32,27 m |
| *M*= 36 448,61 m | *M*= 36 448,0117 m | *M*= 36 445,0373 m | *M*= 372 851,2519 m |
| *P*= -196 253,96 m | *P*= -196 254,9317 m | *P*= -196 255,3140 m | *P*= 3 656 276,3028 m |

A transformação direta das coordenadas geodésicas ($\phi$, $\lambda$) de um ponto nas correspondentes coordenadas planas (*x*, *y*) através da projeção de Gauss (também conhecida por Transversa de Mercator) é definida por via analítica através das fórmulas obtidas por desenvolvimento em série:

$$y = k_0.(\sigma + \frac{\lambda^2}{2} \cdot N \cdot \sin\phi.\cos\phi + \frac{\lambda^4}{24} \cdot N \cdot \sin\phi.\cos^3\phi.k_2 + \frac{\lambda^6}{720} \cdot N \cdot \sin\phi.\cos^5\phi.k_4$$

$$+ \frac{\lambda^8}{40320} \cdot N \cdot \sin\phi.\cos^7\phi.k_6)$$

$$x = k_0.(\lambda.N.\cos\phi + \frac{\lambda^3}{6} \cdot N\cos^3\phi.k_1 + \frac{\lambda^5}{120} \cdot N\cos^5\phi.k_3 + \frac{\lambda^7}{5040} \cdot N\cos^7\phi.k_5)$$

sendo $k_0$ o fator de escala, $\sigma$ o comprimento do arco de meridiano desde o paralelo origem até ao paralelo do ponto, $\lambda$ a diferença de longitude entre o ponto e o meridiano central da projecção ($\lambda$-$\lambda_0$), $\phi$ a latitude geográfica do ponto, *N* a grande normal à latitude $\phi$:

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2.\sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

($a$, $e^2$) os parâmetros característicos do elipsóide de referência e ρ o raio de curvatura do meridiano à latitude φ:

$$\rho = \frac{a.\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2.sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$e^2 = f\cdot(2-f)$$

onde $e$ é a excentricidade do elipsóide e $f$ é o achatamento do elipsóide; e ainda

$$k_1 = \frac{N}{\rho} - tg^2\phi$$

$$k_2 = \frac{N}{\rho} + 4\cdot\frac{N^2}{\rho^2} - tg^2\phi$$

$$k_3 = 4\cdot\frac{N^3}{\rho^3}\cdot(1-6\cdot tg^2\phi) + \frac{N^2}{\rho^2}\cdot(1+8\cdot tg^2\phi) - 2\cdot\frac{N}{\rho}\cdot tg^2\phi + tg^4\phi$$

$$k_4 = 8\cdot\frac{N^4}{\rho^4}\cdot(11-24\cdot tg^2\phi) - 28\cdot\frac{N^3}{\rho^3}\cdot(1-6\cdot tg^2\phi) + \frac{N^2}{\rho^2}\cdot(1-32\cdot tg^2\phi) - 2\cdot\frac{N}{\rho}\cdot tg^2\phi + tg^4\phi$$

$$k_5 = 61 - 479\cdot tg^2\phi + 179\cdot tg^4\phi - tg^6\phi$$

$$k_6 = 1385 - 3111\cdot tg^2\phi + 543\cdot tg^4\phi + tg^6\phi$$

Na projeção de Gauss, aplicada à cartografia portuguesa, usa-se um factor de escala $k_0$= 1, dada a pequena largura da nossa faixa continental. A projecção UTM é a projeção de Gauss aplicada a cada um dos 60 fusos, de 6° cada, em que podemos dividir o globo terrestre, tomando-se $k_0$= 0,9996 (valor escolhido de modo a tornar iguais as deformações da carta no meridiano médio e nos meridianos limítrofes do fuso).

O comprimento aproximado do arco de meridiano $\sigma$ entre quaisquer duas latitudes $\phi_0$ e $\phi$ é determinado através de:

$$\sigma = a\cdot\left(1-e^2\right)\cdot\left\{A\cdot\left(\phi-\phi_0\right) - \frac{B}{2}\cdot\left(\sin 2\phi - \sin 2\phi_0\right) + \frac{C}{4}\cdot\left(\sin 4\phi - \sin 4\phi_0\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{D}{6}\cdot\left(\sin 6\phi - \sin 6\phi_0\right) + \frac{E}{8}\cdot\left(\sin 8\phi - \sin 8\phi_0\right) - \frac{F}{10}\cdot\left(\sin 10\phi - \sin 10\phi_0\right)\right\}$$

com

$$A = 1 + \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{45}{64} \cdot e^4 + \frac{175}{256} \cdot e^6 + \frac{11025}{16384} \cdot e^8 + \frac{43659}{65536} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$B = \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{15}{16} \cdot e^4 + \frac{525}{512} \cdot e^6 + \frac{2205}{2048} \cdot e^8 + \frac{72765}{65536} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$C = \frac{15}{64} \cdot e^4 + \frac{105}{256} \cdot e^6 + \frac{2205}{4096} \cdot e^8 + \frac{10395}{16384} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$D = \frac{35}{512} \cdot e^6 + \frac{315}{2048} \cdot e^8 + \frac{31185}{131072} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$E = \frac{315}{16384} \cdot e^8 + \frac{3465}{65536} \cdot e^{10} + \ldots$$

$$F = \frac{3465}{131072} \cdot e^{10} + \ldots$$

| | PT-TM06/ETRS89 | Datum Lisboa | Datum 73 | PTRA08-UTM/ITRF93 |
|---|---|---|---|---|
| **Elipsoide de referência:** | GRS80<br>a = 6 378 137 m<br>f = 1 / 298,257 222 101 | Hayford (ou Internacional 1924)<br>a = 6 378 388 m<br>f = 1/297 | Hayford (ou Internacional 1924)<br>a = 6 378 388 m<br>f = 1/297 | GRS80<br>a = 6 378 137 m<br>f = 1 / 298,257 222 101 |
| **Projeção cartográfica:** | Transversa de Mercator | Transversa de Mercator | Transversa de Mercator | Transversa de Mercator |
| **Latitude da origem das coordenadas retangulares:** | 39° 40' 05'',73 N | 39° 40' 00'' N | 39° 40' 00'' N | 0° |
| **Longitude da origem das coordenadas retangulares:** | 08° 07' 59'',19 W | 08° 07' 54'',862 W | 08° 07' 54'',862 W | 33° W (fuso 25)<br>27° W (fuso 26)<br>15° W (fuso 28) |
| **Falsa origem das coordenadas retangulares:** | Em M: 0 m<br>Em P: 0 m | Em M: 0 m<br>Em P: 0 m | Em M: +180,598 m<br>Em P: -86,990 m | Em M: +500 000 m<br>Em P: 0 m |
| **Coeficiente de redução de escala no meridiano central:** | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 0,9996 |

## EXERCÍCIO 2

**Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação inversa das coordenadas retangulares (*M*, *P*) dos vértices geodésicos utilizados no exercício 1 nas correspondentes coordenadas geodésicas ($\phi$, $\lambda$).**

Para efectuar a transformação inversa das coordenadas planas Gauss (ou UTM) nas correspondentes coordenadas geodésicas basta utilizar um processo iterativo:

1) Toma-se como ponto de partida um valor aproximado para $\phi$ ($\phi_{ap}$), saído de um cálculo anterior ou considerando um valor aproximado para o arco de meridiano $\sigma$:

$$\sigma_{ap} = \frac{P}{k_0}$$

sendo *P* a distância à perpendicular; donde a primeira aproximação para $\phi$ é dada por:

$$\phi = \phi_0 + \frac{\sigma_{ap}}{A \cdot a \cdot \left(1 - e^2\right)}$$

2) Com base neste valor aproximado da latitude recalcula-se o comprimento de arco de meridiano $\sigma$ usando a expressão:

$$\sigma = a \cdot \left(1-e^2\right) \cdot \left\{ A \cdot \left(\phi - \phi_0\right) - \frac{B}{2} \cdot \left(\sin 2\phi - \sin 2\phi_0\right) + \frac{C}{4} \cdot \left(\sin 4\phi - \sin 4\phi_0\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{D}{6} \cdot \left(\sin 6\phi - \sin 6\phi_0\right) + \frac{E}{8} \cdot \left(\sin 8\phi - \sin 8\phi_0\right) - \frac{F}{10} \cdot \left(\sin 10\phi - \sin 10\phi_0\right) \right\}$$

3) Com este novo valor para $\sigma$ podemos determinar a correcção a aplicar a $\phi$ através de:

$$\Delta\phi = \frac{\left(\sigma_{ap} - \sigma\right)}{\rho}$$

onde

$$\rho = \frac{a.\left(1-e^2\right)}{\left(1 - e^2.\sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

sendo o novo valor da latitude igual a:

$$\phi' = \phi + \Delta\phi$$

4) Entra-se de seguida num processo iterativo, recalculando $\sigma$, ρ e $\Delta\phi$ e o novo valor da $\phi'$ até que $\Delta\phi$ seja inferior à precisão desejada ($10^{-10}$);

5) Com o valor da latitude $\phi'$ resultante do processo iterativo, calcula-se a latitude e longitude do ponto, através das seguintes expressões:

$$\phi = \phi' - \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right) \cdot \left(\frac{M^2}{2 \cdot k_0 \cdot N}\right) + \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right) \cdot \left(\frac{M^4}{24 \cdot k_0^{\ 3} \cdot N^3}\right) \cdot \left(-4\psi^2 + 9\psi \cdot \left(1 - t^2\right) + 12t^2\right) -$$
$$- \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right) \cdot \left(\frac{M^6}{720 \cdot k_0^{\ 5} \cdot N^5}\right) \cdot \left(8\psi^4 \cdot \left(11 - 24t^2\right) - 12\psi^3 \cdot \left(21 - 71t^2\right) + 15\psi^2 \cdot \left(15 - 98t^2 + 15t^4\right) +\right.$$
$$\left. +180\psi \cdot \left(5t^2 - 3t^4\right) - 360t^4\right) + \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho}\right) \cdot \left(\frac{M^8}{40320 \cdot k_0^{\ 7} \cdot N^7}\right) \cdot \left(1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6\right)$$

$$\left(\lambda - \lambda_0\right) \cdot \cos\phi' = \left(\frac{M}{k_0 \cdot N}\right) - \left(\frac{M^3}{6 \cdot k_0^{\ 3} \cdot N^3}\right) \cdot \left(\psi + 2t^2\right) +$$
$$+ \left(\frac{M^5}{120 \cdot k_0^{\ 5} \cdot N^5}\right) \cdot \left(-4\psi^3 \cdot \left(1 - 6t^2\right) + \psi^2 \cdot \left(9 - 68t^2\right) + 72\psi t^2 + 24t^4\right) -$$
$$- \left(\frac{M^7}{5040 \cdot k_0^{\ 7} \cdot N^7}\right) \cdot \left(61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6\right)$$

sendo $M$ a distância à meridiana, $\psi = \dfrac{N}{\rho}$, calculado com o valor da latitude $\phi'$, e $t = tg\phi'$.

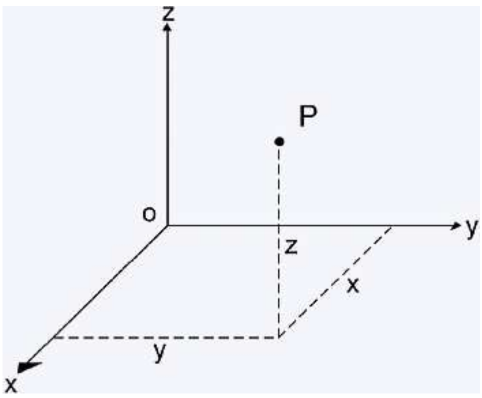
## EXERCÍCIO 3

**Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação direta entre coordenadas geodésicas ($\phi$, $\lambda$, $h$) dos seguintes vértices geodésicos nas correspondentes coordenadas cartesianas tridimensionais ($X$, $Y$, $Z$).**

| V.G. Aboboreira (Beja) | V. G. Cabeço da Ponta (Porto Santo - Madeira) |
|---|---|
| **PT-TM06/ETRS89** | **PTRA08-UTM/ITRF93** |
| $\phi$= 37° 53' 58,7635" N | $\phi$= 33° 02' 15,2697" N |
| $\lambda$= 07° 43' 07,2999" WGr | $\lambda$= 16° 21' 41,8679" WGr |
| $h$= 257,85 m | $h$= 32,27 m |
| $X$= 4993821,5571 m | $X$= 5135480,8889 m |
| $Y$= -676850,4038 m | $Y$= -1507717,9053 m |
| $Z$= 3896819,7516 m | $Z$= 3457470,4300 m |

Considerando um triedro cartesiano OXYZ centrado com o elipsóide de referência, com o eixo dos ZZ coincidente com o seu eixo de revolução, com o eixo dos XX assente no semi-plano origem das longitudes geodésicas e o eixo dos YY escolhido de modo a tornar o triedro directo, as coordenadas geodésicas ($\phi$, $\lambda$, $h$) de um ponto genérico relacionam-se com as suas coordenadas cartesianas tridimensionais ($X$, $Y$, $Z$) por meio das seguintes expressões:

$$X = (N + h)\cdot\cos\phi\cdot\cos\lambda$$
$$Y = (N + h)\cdot\cos\phi\cdot\sin\lambda$$
$$Z = \left[\left(1 - e^2\right)\cdot N + h\right]\cdot\sin\phi$$




sendo $N$ a grande normal ao elipsóide de referência à latitude $\phi$, $h$ a altitude elipsoidal do ponto e ($a$, $e^2$) os seus parâmetros de forma. Estas expressões correspondem à transformação directa das coordenadas geodésicas ($\phi$, $\lambda$, $h$) de um ponto nas correspondentes coordenadas cartesianas tridimensionais ($X$, $Y$, $Z$).

## EXERCÍCIO 4

**Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação inversa entre coordenadas cartesianas tridimensionais (*X*, *Y*, *Z*) dos vértices geodésicos utilizados no exercício 3 nas correspondentes coordenadas geodésicas ($\phi$, $\lambda$, *h*).**

A transformação inversa das coordenadas cartesianas tridimensionais (*X*, *Y*, *Z*) de um ponto nas correspondentes coordenadas geodésicas ($\phi$, $\lambda$, *h*) é executada recorrendo a um processo iterativo:

1) A longitude $\lambda$ pode ser facilmente calculada a partir das coordenadas cartesianas tridimensionais utilizando a seguinte expressão:

$$\lambda = arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

2) A latitude é obtida por um processo iterativo dado que as quantidades $\phi$ e *h* são dependentes uma da outra, pelo que se utiliza um valor aproximado para a latitude o qual é calculado por:

$$\phi_{ap} = arctg\left(\frac{Z}{P\cdot\left(1-e^2\right)}\right)$$

com *P* igual a:

$$P = \left(X^2 + Y^2\right)^{1/2}$$

3) Com base neste valor aproximado da latitude calcula-se o valor de *N*, e em seguida o valor para a altitude elipsoidal *h* usando a expressão:

$$h = \frac{P}{\cos\phi} - N$$

4) O processo iterativo continua recalculando o valor de $\phi$, com *N* e *h* calculados no passo anterior, utilizando a expressão:

$$\phi = arctg\left(\frac{Z + e^2\cdot N\cdot\sin\phi}{P}\right)$$

5) Com este novo valor da latitude $\phi$, recalcula-se o valor de *N*, da altitude elipsoidal *h* e em seguida um novo valor para a latitude $\phi$ e assim sucessivamente até alcançar a precisão desejada para a transformação ($\phi_i$-$\phi_{i-1}$ =$10^{-10}$).

## EXERCÍCIO 5

**Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas cartesianas tridimensionais (*X*, *Y*, *Z*) - Transformação de Helmert/Fórmulas de Bursa-Wolf - de dois *data* distintos.**

| Ponto | |
|---|---|
| **Datum 73** | **PT-TM06/ETRS89** |
| *X*= 4815286 m | *X*= 4815062,1368 m |
| *Y*= -578951 m | *Y*= -578841,2009 m |
| *Z*= 4129745 m | *Z*= 4129782,0548 m |

A transformação de sete parâmetros de Helmert, expressa em formato matricial, é designada por fórmula de Bursa-Wolf e tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1+\alpha) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 1 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

onde ($X$, $Y$, $Z$) são as coordenadas de um dado ponto no sistema de referência geocêntrico origem, ($X_n$, $Y_n$, $Z_n$) são as coordenadas desse mesmo ponto no sistema de referência geocêntrico destino, ($\Delta X$, $\Delta Y$, $\Delta Z$) são as componentes do vetor que une os centros dos dois elipsóides, ($R_X$, $R_Y$, $R_Z$) são os ângulos de rotação em torno dos eixos de referencial de origem e $\alpha$ é o factor de escala (expresso em partes por milhão - ppm).

**Nota:** A fórmula apresentada encontra-se em conformidade com a norma ISO 19111:2007. No entanto, é de ter em conta outras versões utilizadas em alguns programas que se reflectem nos sinais e/ou no sentido das rotações.

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação de Bursa-Wolf do datum Lisboa e datum 73 para PT-TM06-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (http://www.dgterritorio.pt/cartografia_e_geodesia/geodesia/transformacao_de_coordenadas/parametros_de_transformacao_de_coordenadas/portugal_continental/bursa_wolf_do_datum_lisboa_e_datum_73_para_pt_tm06_etrs89/) em fevereiro de 2017.

| Parâmetros de Transformação de Bursa-Wolf do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TM06-ETRS89 | | |
|---|---|---|
| | **Datum Lisboa para PT-TM06/ETRS89** | **Datum 73 para PT-TM06/ETRS89** |
| **$\Delta X$ (m)** | -283,088 | -230,994 |
| **$\Delta Y$ (m)** | -70,693 | +102,591 |
| **$\Delta Z$ (m)** | +117,445 | +25,199 |
| **$R_X$ (")** | -1,157 | +0,633 |
| **$R_Y$ (")** | +0,059 | -0,239 |
| **$R_Z$ (")** | -0,652 | +0,900 |
| **$\alpha$ (ppm)** | -4,058 | +1,950 |

## EXERCÍCIO 6

**Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas geodésicas ($\phi$, $\lambda$, $h$) - Fórmulas de Molodensky - de dois *data* distintos.**

| Ponto | |
|---|---|
| **Datum 73** | **PT-TM06/ETRS89** |
| $\phi$= 40° 36’ 10” N | $\phi$= 40° 36’ 12,92913” N |
| $\lambda$= 6° 51’ 17” WGr | $\lambda$= 6° 51’ 13,48258” WGr |
| $h$= 826 m | $h$= 884,0728 m |

A transformação de Molodensky tem cinco parâmetros tendo a seguinte forma:

$$\begin{cases} \phi_n = \phi + \dfrac{-\Delta X \sin\phi\cos\lambda - \Delta Y \sin\phi\sin\lambda + \Delta Z\cos\phi + \Delta a \dfrac{e^2 N \sin\phi\cos\phi}{a} + \Delta f \sin\phi\cos\phi\left(\dfrac{a}{b}\rho + \dfrac{b}{a}N\right)}{\rho + h} \\ \lambda_n = \lambda + \dfrac{-\Delta X \sin\lambda + \Delta Y\cos\lambda}{(N+h)\cos\phi} \\ h_n = h + \Delta X\cos\phi\cos\lambda + \Delta Y\cos\phi\sin\lambda + \Delta Z\sin\phi - \Delta a\left(\dfrac{a}{N}\right) + \Delta f\left(\dfrac{b}{a}N\sin^2\phi\right) \end{cases}$$

onde $\phi_h$, $\lambda_n$, $h_n$ são a latitude, longitude (em radianos) e a altitude elipsoidal (em metros) a obter, $\phi$, $\lambda$, $h$ são a latitude, longitude (em radianos) e a altitude elipsoidal (em metros) originais, $\Delta X$, $\Delta Y$, $\Delta Z$ as componentes do vetor que une os centros dos dois elipsóides, $a$, $b$ os semi-eixos maior e menor do elipsóide origem, $e$, $f$ a primeira excentricidade e o achatamento do elipsóide origem, $\Delta a$, $\Delta f$ a diferença entre os semi-eixos maiores e os achatamentos dos dois elipsóides, $N$ o raio de curvatura do primeiro vertical (Grande Normal) e $\rho$ o raio de curvatura do meridiano.

$$b = a \cdot (1 - f)$$

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação de Molodensky do datum Lisboa e datum 73 para PT-TM06-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (http://www.dgterritorio.pt/cartografia_e_geodesia/geodesia/transformacao_de_coordenadas/parametros_de_transformacao_de_coordenadas/portugal_continental/molodensky_do_datum_lisboa_e_datum_73_para_pt_tm06_etrs89/) em fevereiro de 2017.

| **Parâmetros de Transformação de Molodensky do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TM06-ETRS89** | | |
|---|---|---|
| | **Datum Lisboa para PT-TM06/ETRS89** | **Datum 73 para PT-TM06/ETRS89** |
| **$\Delta X$ (m)** | -303.861 | -223.150 |
| **$\Delta Y$ (m)** | -60.693 | +110.132 |
| **$\Delta Z$ (m)** | +103.607 | +36.711 |
| **$\Delta a$ (m)** | -251.000 | -251.000 |
| **$\Delta f$ (m)** | $-1.4192686 \times 10^{-5}$ | $-1.4192686 \times 10^{-5}$ |

## EXERCÍCIO 7

**Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas retangulares (*M*, *P*) - Transformação Polinomial - de dois *data* distintos.**

| Ponto | |
|---|---|
| **Datum 73** | **PT-TM06/ETRS89** |
| *M*= 20000 m | *M*= 19999,7773 m |
| *P*= 20000 m | *P*= 20000,1413 m |
| *h*= 100 m | *h*= 155,6977 m |

A transformação polinomial de grau 2 permite transformar coordenadas retangulares num determinado datum nas coordenadas retangulares num outro datum:

$$M_n = a_0 + a_1 u + a_2 v + a_3 u^2 + a_4 uv + a_5 v^2$$
$$P_n = b_0 + b_1 u + b_2 v + b_3 u^2 + b_4 uv + b_5 v^2$$

onde $M_n$, $P_n$ são as coordenadas rectangulares a obter, $X$, $Y$ as coordenadas rectangulares originais, $a_i$, $b_i$ os coeficientes de transformação, $X_0$, $Y_0$, $h$, $k$ os parâmetros de normalização e $u$ e $v$ têm a seguinte forma:

$$u = \frac{X - X_0}{h} \qquad v = \frac{Y - Y_0}{k}$$

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação polinomial do datum Lisboa e datum 73 para PT-TM06-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (http://www.dgterritorio.pt/cartografia_e_geodesia/geodesia/transformacao_de_coordenadas/parametros_de_transformacao_de_coordenadas/portugal_continental/polinomios_de_grau_2_do_datum_lisboa_e_datum_73_para_pt_tm06_etrs89/) em fevereiro de 2017.

| Coeficientes de Transformação Polinomial de Grau 2 do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TM06-ETRS89 | | |
|---|---|---|
| | **Datum Lisboa para PT-TM06/ETRS89** | **Datum 73 para PT-TM06/ETRS89** |
| $a_0$ | +1,38051 | +0,28961 |
| $a_1$ | +129998,56256 | +129999,16977 |
| ***a*2** | -1,69483 | -5,26888 |
| ***a*3** | -0,57226 | +0,32257 |
| ***a*4** | -2,9606 | -0,87853 |
| ***a*5** | -2,45601 | -1,22237 |
| ***b*0** | +0,80894 | -0,08867 |
| ***b*1** | +1,31669 | +2,39595 |
| ***b*2** | +279995,74505 | +279997,91435 |
| ***b*3** | +0,24888 | +0,15146 |
| ***b*4** | +2,65999 | +1,11109 |
| ***b*5** | -3,86484 | -1,06143 |
| $X_0$ | 0 | 0 |
| $Y_0$ | 0 | 0 |
| ***h*** | +130000 | +130000 |
| ***k*** | +280000 | +280000 |

## EXERCÍCIO 8

Considerando as coordenadas geodésicas e as correspondentes coordenadas retangulares dos vértices geodésicos ABOBOREIRA (Beja, Baixo Alentejo) e CABEÇUDO (Mogadouro, Trás-os-Montes), calcule a:

| **Coordenadas PT-TM06-ETRS89** | **V.G. Aboboreira** | **V.G. Cabeçudo** |
|---|---|---|
| **Geodésicas ou geográficas ($\phi$, $\lambda$)** | $\phi$= 37° 53' 58,7635" N<br>$\lambda$= 07° 43' 07,2999" W Gr | $\phi$= 41° 19' 50,6809" N<br>$\lambda$= 06° 26' 02,2698" W Gr |
| **Retangulares (*M*, *P*)** | *M*= 36 448,61 m<br>*P*= -196 253,96 m | *M*= 142 243,53 m<br>*P*= 186 002,69 m |

a) deformação linear *k* em cada um dos vértices;

b) convergência de meridianos $\gamma$ em cada um dos vértices;

c) correção tangente à corda $\beta''$ para a distância entre os 2 vértices;

d) correção de redução dos comprimentos finitos $s_1 - s$ para a distância entre os 2 vértices(1).

$$k = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0}$$

$$\gamma = -(\lambda - \lambda_0) \cdot \sin\phi$$

$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0 \cdot \sin 1''} \cdot (2 \cdot x_A + x_B) \cdot (y_B - y_A)$$

$$s_1 - s = \frac{s_1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \cdot \left(x_B^2 + x_B \cdot x_A + x_A^2\right)$$

(1) Para calcular o valor de $s_1$, ou seja a geodésica entre os 2 vértices geodésicos, aceda ao seguinte link: https://geographiclib.sourceforge.io/cgi-bin/GeodSolve

## Online geodesic calculations using the GeodSolve utility

Geodesic calculation:

- (●) Inverse: *lat1 lon1 lat2 lon2 → azi1 azi2 s12*
- ( ) Direct: *lat1 lon1 azi1 s12 → lat2 lon2 azi2*

Input (ex. «`40.6 -73.8 49°01'N 2°33'E`» [inverse], «`40d38'23"N 073d46'44"W 53d30' 5850e3`» [direct]):

41.33074469 -6.433963833 37.89965653 -7.718694417

| | | |
|---|---|---|
| Output format: | (●) decimal degrees | ( ) degrees minutes seconds |
| Heading at point 2: | (●) forward azimuth | ( ) back azimuth |
| Longitude: | (●) reduce to [−180°,180°] | ( ) unroll |
| Output precision: | 1mm 0.0001" ▾ | |
| Equatorial radius: | 6378137 | meters |
| Flattening: | 1/298.257222101 | |

Select action:

Submit Reset

Geodesic (input in black, output in blue):

```
ellipsoid (a f)      = 6378137 1/298.257222101
status               = OK

lat1 lon1 fazi1 (°) = 41.33074469 -6.43396383 -163.43634739
lat2 lon2 fazi2 (°) = 37.89965653 -7.71869442 -164.25591684
s12 (m)              = 396583.142
```

## EXERCÍCIO 9

Sabendo que os coeficientes da expressão do módulo da deformação linear na projeção de Bonne são respetivamente $e = 1 + \lambda^2(\sin\phi - r/R)^2$, $f = -\lambda(\sin\phi - r/R)$, $g = 1$, calcule os:

a) elementos da elipse de Tissot (semieixo maior e menor e respetivas direções);

b) módulos da deformação angular máxima e os respetivos azimutes dessas deformações;

para um ponto com as seguintes coordenadas $\phi$= 50° N, $\lambda$= 10° EGr, sobre o elipsóide de Hayford ($a$= 6 378 388 m; $f$ = 1/297). Considere o seguinte valor para a latitude da origem da projeção $\phi_0$= 45° N.

$$R = R_0 - \sigma$$

$$R_0 = N_0 \cdot \cot\phi_0$$

$$r = N \cdot \cos\phi$$

$$\begin{cases} k_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\left[(e+g)+\sqrt{(e-g)^2+4\cdot f^2}\right]} \\ k_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\left[(e+g)-\sqrt{(e-g)^2+4\cdot f^2}\right]} \end{cases}$$

$$tg2\alpha = \frac{2f}{(e-g)}$$

$$tg\delta_m = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\right)$$

$$tg\alpha_m = \pm\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

nestas equações ***e***, ***f*** e ***g*** são os valores das equações que se encontram em cima no enunciado do exercício, enquanto que nas expressões seguintes ***a***, ***e*** e ***f***, referem-se, respetivamente, ao semieixo maior, à excentricidade e achatamento do elipsóide.

$$e^2 = f\cdot(2-f)$$

$$N = \frac{a}{\left(1-e^2.\sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Ciências ULisboa

$$\sigma = a\cdot\left(1-e^2\right)\cdot\left\{A\cdot\left(\phi-\phi_0\right)-\frac{B}{2}\cdot\left(\sin 2\phi-\sin 2\phi_0\right)+\frac{C}{4}\cdot\left(\sin 4\phi-\sin 4\phi_0\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{D}{6}\cdot\left(\sin 6\phi-\sin 6\phi_0\right)+\frac{E}{8}\cdot\left(\sin 8\phi-\sin 8\phi_0\right)-\frac{F}{10}\cdot\left(\sin 10\phi-\sin 10\phi_0\right)\right\}$$