Exercícios de Cálculo Infinitesimal II / Cálculo II
Capítulo 4

1. Calcule os seguintes integrais

   a) $\displaystyle\iint_R 3xy\,dx\,dy$ onde $R = [0,2] \times [1,3]$;

   b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\,dy \right) dx$;

   c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos x} y \sin x\,dy \right) dx$;

   d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin y} e^x \cos y\,dx \right) dy$.

2. Esboce a região de integração e calcule

   a) $\displaystyle\iint_D 2 + y\,dA$, onde D é a região do plano limitada pelas linhas $x = y^2 - 1$ e $x = 1 - y^2$;

   b) $\displaystyle\iint_D e^{y^2}\,dA$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas rectas $x = 0$, $y = 1$ e $y = x$;

   c) $\displaystyle\iint_D x - 1\,dA$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas linhas $x = 0$, $y = x^2$ e $y = 2 - x$;

   d) $\displaystyle\iint_D x - 1\,dA$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas linhas $y = 0$, $y = x^2$ e $y = 2 - x$.

3. Usando um integral duplo, calcule

   a) a área da região do plano limitada pelas linhas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$;

   b) a massa da placa que ocupa a região do plano limitada pela parábola $x = y^2$ e pela recta $y = x - 2$ e que tem densidade constante e igual a 3;

   c) a massa da placa triangular de vértices $(0,0), (1,0)$ e $(0,2)$ cuja densidade é dada pela função $\mu(x,y) = e^{x+y}$;

   d) o volume do sólido, no primeiro octante, limitado pelo plano $z = 1 - x - y$ e pelos três planos coordenados;

   e) a área da região do plano limitada pelas linhas $x = 0$, $y = 0$, $y = 3 - x$ e $y = 1 + x^2$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $f(1) = f(0)$.

   a) Mostre que $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 f''(y)\,dy dx = f'(1)$.

   b) Calcule o integral anterior usando a outra ordem de integração.

5. Calcule, usando coordenadas polares

   a) $\displaystyle\iint_D 4 - x^2 - y^2\,dx\,dy$, onde D é o círculo de centro na origem e raio 2;

   b) $\displaystyle\iint_D \cos(x^2 + y^2)\,dx\,dy$, onde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \leq 0\right\}$;

   c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx \right) dy$;

d) $\displaystyle\iint_D 3x\,dx\,dy$, onde D é a região do plano limitada pelas linhas $x = \sqrt{2y - y^2}$ e $x = 0$;

e) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, onde D é a região do plano limitada pelas linhas $y = 0$ e $y = \sqrt{2x - x^2}$;

f) a área da porção do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ para $x \geq 1$.

6. Calcule os seguintes integrais

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{x^2} e^z\,dz\,dy\,dx$;

   b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \cos z\,dy\,dx\,dz$;

   c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^x x \cos(xz)\,dz\,dy\,dx$.

7. Use coordenadas cilíndricas para calcular

   a) o volume do sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 1$;

   b) o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$;

   c) o volume do sólido limitado pelos planos $z = 0$ e $z = 3$ e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$;

   d) o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $z + y = 3$;

   e) o volume do sólido limitado pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

8. Use coordenadas esféricas para calcular

   a) $\displaystyle\iiint_E xz\,dV$, onde E é o sólido do primeiro octante compreendido entre as superfícies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

   b) $\displaystyle\iiint_E y^2\,dV$, onde E é a região do primeiro octante limitada pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

   c) o volume da região do espaço dada por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

9. Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente pelo hemisfério $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

   a) usando coordenadas cilíndricas;

   b) usando coordenadas esféricas.

10. Calcule

   a) o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

   b) o volume do sólido dado por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2y, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\};$$

   c) $\displaystyle\iiint_T y\,dV$, onde T é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + y + z = 2$;

   d) $\displaystyle\iiint_S xyz\,dV$, onde S é a região do primeiro octante limitada pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

   e) o volume do sólido limitado pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano $z = 1$;

   f) o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 2 + y$.