Mecânica Analítica

Série 2: Problema de dois corpos

1. [2] Uma partícula de massa m move-se numa órbita espiral logarítmica, dada por $r = ke^{\alpha\theta}$, onde k e α são constantes.

   (a) Calcule a força que origina essa órbita;

   (b) Determine $r(t)$ e $\theta(t)$;

   (c) Calcule a energia da órbita, considerando que o potencial é zero no infinito.

2. Obtenha a lei dos gases ideais ($PV = Nk_BT$) a partir do teorema do virial. Lembre-se que a energia cinética média pode ser obtida do teorema da equipartição de energia e que para um gás ideal não há interação entre partículas, ou seja, só há interação com as paredes do recipiente.

3. Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força central $g(r) = -F(r)/m$, tal que a equação de movimento é

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{m^2 r^3} = -g(r) \quad . \tag{1}$$

   (a) Mostre que se x_0 é o raio da órbita circular e x uma perturbação a esse raio, então

$$\ddot{x} - \frac{l^2}{m^2 x_0^3 \left[1 + (x/x_0)\right]^3} = -g(x_0 + x) \quad ; \tag{2}$$

   (b) Fazendo uma expansão em série de Taylor, mostre que para $x \ll x_0$

$$\ddot{x} + \left[\frac{3g(x_0)}{x_0} + g'(x_0)\right] x \approx 0 \quad ; \tag{3}$$

   (c) Mostre que, como $g(x_0)$ é positivo, a órbita circular é estável quando

$$\frac{F'(x_0)}{F(x_0)} + \frac{3}{x_0} > 0 \quad . \tag{4}$$

4. [2] Investigue a estabilidade de órbitas circulares, num campo central de potencial,

$$U(r) = -\frac{k}{r} e^{-(r/a)}, \tag{5}$$

   onde $k > 0$ e $a > 0$. Este potencial corresponde ao potencial de Coulomb blindado (potencial de Yukawa).

5. [2] Uma partícula move-se uma órbita circular sujeita a uma força $F(r) = -k/r^2$. Mostre que, se k for reduzido a metade instantaneamente, a órbita passa a ser parabólica.

6. A equação diferencial para a órbita de uma partícula de massa m e momento angular l, sujeita a um potencial central $V(r) = -k/r$ é

$$\frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{k}{r^2} \quad . \tag{6}$$

   (a) Definindo $u \equiv 1/r$, mostre que

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{km}{l^2} \quad ; \tag{7}$$

(b) Determine o valor de u_0 para o qual a órbita é circular;

(c) Mostre que pequenos desvios à órbita circular (por alteração da distância ao centro) resultam num movimento harmónico em torno da posição de equilíbrio u_0, onde

$$u = u_0 + a\cos(\beta\theta) \quad . \tag{8}$$

Determine a e β.

7. [1] Duas partículas movem-se com uma órbita circular em torno uma da outra, sobre influência da interação gravítica entre elas, com um período de τ. O seu movimento é parado instantaneamente e são libertadas do repouso. Mostre que elas colidem ao fim de um tempo $\tau/4\sqrt{2}$.

8. [1] (a) Mostre que, para uma órbita circular e outra parabólica, num potencial atrativo $1/r$, terem o mesmo momento angular, a distância ao centro no periélio da órbita parabólica é metade do raio da órbita circular. (b) Mostre também, que para o mesmo potencial central, a velocidade da partícula em qualquer ponto da órbita parabólica é $\sqrt{2}$ vezes a velocidade da partícula numa órbita circular a passar no mesmo ponto.

9. [1] Mostre que a trajetória de uma partícula no campo de forças

$$F = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{C}{r^3} \tag{9}$$

é dada pela fórmula

$$r = \frac{l^2\beta^2/(\alpha m)}{1 + e\cos(\beta\theta)}, \tag{10}$$

que corresponde a uma elipse se $\beta = 1$ e uma elipse com precessão se $\beta \neq 1$. Determine β.

10. [2] Mostre que a secção eficaz para uma força central $F(r) = -k/r^3$, para uma partícula com velocidade inicial v_0 é dada por,

$$\sigma(\theta) = \frac{k\pi^2(\pi - \theta)}{mv_0^2\theta^2(2\pi - \theta)^2 \sin\theta} \quad . \tag{11}$$

onde θ é o ângulo com a direção de incidência.

Referências

[1] Goldstein, H., Pool, C., and Safko, J. *Classical Mechanics.* Addison-Wesley Publishing Company, Boston, MA, USA, 2002.

[2] Marion, J. B., and Thornton, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems.* Thomson Learning, Stamford, CT, USA, 1995.