1. Começamos por olhar só para a equação (ignoramos momentaneamente a condição inicial)

Separamos as variáveis:

$$u'(x)\tan x = 2 + u(x) \iff \frac{u'(x)}{2+u(x)} = \frac{1}{\tan x}$$

Primitivamos o lado direito:

$$\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\sin' x\,dx$$

Como estamos a resolver na vizinhança de $x = \pi/3$, assumimos que $\sin x > 0$, pelo que $\int \frac{1}{\sin x}\sin' x\,dx = \ln(\sin x) + C$

Primitivamos o lado esquerdo; uma vez que estamos a resolver na vizinhança de $u = -8$, assumimos que $2 + u(x) < 0$, pelo que

$$\int \frac{1}{2+u(x)}u'(x)\,dx = \ln(-2-u(x)) + C$$

Portanto, a equação diferencial fica equivalente a

$$\ln(-2-u(x)) = \ln(\sin x) + C$$

exponenciamos: $-2-u(x) = e^C \sin x$

1 (continuação)

$$-2-u(x) = C \sin x \qquad (C>0)$$

Impomos agora a condição inicial, determinando assim o valor da constante C:

$$u\left(\frac{\pi}{3}\right) = -8$$

$$-2-(-8) = C \sin\frac{\pi}{3}$$

$$6 = C\,\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad C = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Resposta final: $u(x) = -2 - 4\sqrt{3}\sin x$

(2) Desconhecemos a equação da curva, pelo que a única maneira de calcular o integral é procurando um potencial F do campo vectorial (xy^2, x^2y). Se um tal potencial existir, então o valor do integral será $F(1,0) - F(-1,0)$.

Procuramos então $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = xy^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 y .$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = xy^2 \Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^2y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + g(y)\right) = x^2y \Rightarrow$$

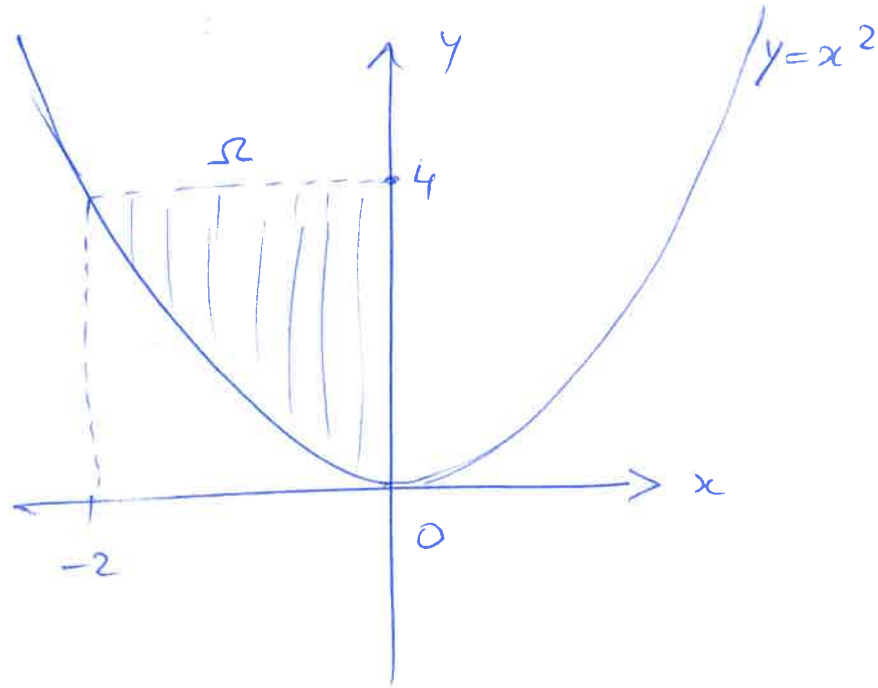
$$\Rightarrow x^2y + g'(y) = x^2y \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(y) = \text{constante}$$

Escolhemos então $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ como potencial (podemos somar uma constante arbitrária, mas o valor dessa constante não é relevante).

$$\int_C (xy^2\,dx + x^2y\,dy) = F(1,0) - F(-1,0) = 0$$

3



Seja Ω o domínio representado acima; aplicamos duas vezes o teorema de Fubini

$$\int_{x=-2}^{0} \int_{y=x^2}^{4} f(x,y)\,dy\,dx = \iint_{\Omega} f(x,y)\,da =$$

$$= \int_{y=0}^{4} \int_{x=-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx\,dy$$

4

$$g(t) = f(t, 1-t, t^3)$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 1-t, t^3) \cdot \frac{d}{dt}(t) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(t, 1-t, t^3) \cdot \frac{d}{dt}(1-t) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(t, 1-t, t^3) \cdot \frac{d}{dt}(t^3) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t, 1-t, t^3) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, 1-t, t^3) +$$

$$+ 3t^2 \frac{\partial f}{\partial z}(t, 1-t, t^3)$$

5 Mudamos para coordenadas polares:

$$\iint_{\Omega} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, da = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=1}^{2} \sin r \cdot r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_{r=1}^{2} r \sin r\, dr \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\int_{r=1}^{2} r\sin r\, dr =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_{r=1}^{2} r\,(\cos r)'\, dr =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\Big[r\cos r\Big]_{r=1}^{2} + \frac{\pi}{2}\int_{r=1}^{2} r'\cos r\, dr =$$

$$= -\frac{\pi}{2}(2\cos 2 - \cos 1) + \frac{\pi}{2}\int_{r=1}^{2}\cos r\, dr =$$

$$= -\frac{\pi}{2}(2\cos 2 - \cos 1) + \frac{\pi}{2}\Big[\sin r\Big]_{r=1}^{2} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}(2\cos 2 - \cos 1) + \frac{\pi}{2}(\sin 2 - \sin 1)$$