Cálculo Infinitesimal II / Cálculo II - Apontamentos de Apoio
Capítulo 2 - Funções Vectoriais de uma Variável

1 Funções vectoriais de uma variável: limites, continuidade, derivadas e integrais

Uma função vectorial de variável real é uma função

$$r : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

que a cada número real $t \in D$ faz corresponder um e um só vector de $\mathbb{R}^n$ dado por $(r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$. Às funções reais de variável real

$$\begin{array}{rcl} r_i : D \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & r_i(t), \end{array}$$

para $i = 1, \ldots, n$, chamamos *funções componentes* de r.

O *domínio* da função r é a intersecção dos domínios de cada uma das suas funções componentes e é o maior conjunto onde a expressão que define r faz sentido, a não ser que se explicite uma restrição deste.

Neste capítulo vamos estender a este tipo de funções as noções de limite, continuidade, derivada e integral que já conhecemos para funções reais de variável real.

Definição 1.1 *Seja $r : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função vectorial de variável real e suponhamos que r está definida numa vizinhança do ponto t_0, excepto possivelmente em t_0, e seja L um vector de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que*

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = L \in \mathbb{R}^n$$

se e só se $\lim_{t \to t_0} \|r(t) - L\| = 0$, ou seja, se e só se

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 : 0 < |t - t_0| < \varepsilon \Rightarrow \|r(t) - L\| < \delta.$$

Assim, dizer que o limite, quando $t \to t_0$, da função vectorial $r(t)$ é o vector L é equivalente a afirmar que o limite, quando $t \to t_0$, da função real $\|r(t) - L\|$ é 0.

Proposição 1.2 *Se $\lim_{t \to t_0} r(t) = L$ então $\lim_{t \to t_0} \|r(t)\| = \|L\|$.*

Note-se que o recíproco do resultado anterior é falso, basta considerar $r(t) = r_0$ e $L = -r_0$.

Teorema 1.3 *Sejam $r : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função vectorial de variável real e $L = (L_1, \ldots, L_n)$. Então*

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} r_i(t) = L_i, \forall i = 1, \ldots, n.$$

O teorema anterior diz-nos que os limites das funções vectoriais se calculam componente a componente, reduzindo-se ao cálculo de n limites de funções reais de variável real. Por este motivo, as propriedades algébricas dos limites de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ continuam a ser válidas para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$. Temos então o seguinte:

Teorema 1.4 *Sejam $u, v : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funções vectoriais de variável real e seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real. Suponhamos que $\lim_{t\to t_0} u(t) = L$, $\lim_{t\to t_0} v(t) = M$ e que $\lim_{t\to t_0} f(t) = \alpha$, onde $L, M \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então tem-se:*

i) $\lim_{t\to t_0} (u(t) + v(t)) = L + M$;

ii) $\lim_{t\to t_0} (cu(t)) = cL$, $\forall c \in \mathbb{R}$;

iii) $\lim_{t\to t_o} f(t)u(t) = \alpha L$;

iv) $\lim_{t\to t_0} u(t) \cdot v(t) = L \cdot M$, *onde $\cdot$ representa o produto interno em $\mathbb{R}^n$.*

Definição 1.5 *Seja $r : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função vectorial de variável real e suponhamos que r está definida numa vizinhança do ponto $t_0 \in D$. A função r diz-se contínua em t_0 se e só se*

$$\lim_{t\to t_0} r(t) = r(t_0).$$

Resulta imediatamente do Teorema 1.3 que

Teorema 1.6 *Seja $r : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função vectorial de variável real definida numa vizinhança do ponto $t_0 \in D$. Então r é contínua em t_0 se e só se as suas funções componentes r_i forem contínuas em t_0, $\forall i = 1, \ldots, n$.*

O próximo resultado dá-nos algumas propriedades das funções contínuas, análogas às já conhecidas para funções reais de variável real.

Teorema 1.7 *Sejam $u, v : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(E) \subseteq D$. Então:*

i) se u, v e f são contínuas em $a \in D$ o mesmo sucede a $\|u\|$, $u+v$, fu, $u \cdot v$, e ainda a $\dfrac{u}{f}$ se $f(a) \neq 0$;

ii) se g é contínua em $a \in E$ e u é contínua em $g(a) \in D$ então $u \circ g$ é contínua em a.

Definição 1.8 *Dada uma função vectorial de variável real contínua $r :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ a derivada de r no ponto t é dada por*

$$\frac{dr}{dt}(t) = r'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

se este limite existir.

Atendendo ao Teorema 1.3 é válido o seguinte teorema:

Teorema 1.9 *Seja $r :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ uma função vectorial de variável real contínua, seja $t_0 \in]a, b[$ e suponhamos que todas as funções componentes de r, $r_i :]a, b[\to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, são diferenciáveis em t_0. Então r é diferenciável em t_0 e tem-se*

$$r'(t_0) = (r_1'(t_0), r_2'(t_0), \ldots, r_n'(t_0)).$$

Este teorema diz-nos que $r'(t)$ é o vector cujas componentes são as derivadas das funções r_i, $i = 1, \ldots, n$. Consequentemente todas as fórmulas e métodos usados para calcular derivadas de funções reais de variável real podem ser usados para calcular derivadas de funções vectoriais de variável real, aplicados componente a componente.

Teorema 1.10 *Sejam* $u, v :]a, b[\to \mathbb{R}^n$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Se* u, v *e* f *forem diferenciáveis em* $]a, b[$ *tem-se*

i) $\dfrac{d}{dt}(u(t) + v(t)) = u'(t) + v'(t)$;

ii) $\dfrac{d}{dt}(cu(t)) = cu'(t)$;

iii) $\dfrac{d}{dt}(f(t)u(t)) = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$;

iv) $\dfrac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$, *onde* $\cdot$ *representa o produto interno em* $\mathbb{R}^n$;

v) $\dfrac{d}{dt}(u(f(t))) = f'(t)u'(f(t))$ *(derivação da função composta).*

Definição 1.11 *Dada uma função vectorial de variável real contínua*

$$\begin{array}{rcl} r : [a, b] \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \to & (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t)) \end{array}$$

definimos

$$\int_a^b r(t)\, dt = \left(\int_a^b r_1(t)\, dt, \int_a^b r_2(t)\, dt, \ldots, \int_a^b r_n(t)\, dt \right).$$

O integral duma função vectorial de variável real r é assim o vector cujas componentes são os integrais das funções componentes de r.

São válidas as seguintes propriedades do integral de funções vectoriais de variável real:

Teorema 1.12 *Sejam* $u, v : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *funções contínuas,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}^n$ *um vector constante. Então tem-se:*

i) $\displaystyle\int_a^b u(t) + v(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + \int_a^b v(t)\, dt$;

ii) $\displaystyle\int_a^b \alpha\, u(t)\, dt = \alpha \int_a^b u(t)\, dt$;

iii) $\displaystyle\int_a^b c \cdot u(t)\, dt = c \cdot \left(\int_a^b u(t)\, dt \right)$, *onde* $\cdot$ *representa o produto interno em* $\mathbb{R}^n$;

iv) $\displaystyle\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\, dt.$

2 Curvas no plano e no espaço, parametrização de curvas, vector tangente

No que se segue vamos considerar funções vectoriais de variável real

$$\begin{array}{rcl} r : I \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \to & r(t) \end{array}$$

definidas e contínuas num intervalo I de $\mathbb{R}$. A uma função deste tipo chamamos *caminho* ou *linha parametrizada* (ou apenas *linha*).

Este tipo de funções surge em inúmeras aplicações, nomeadamente para descrevermos curvas no plano e no espaço e o movimento de partículas no plano e no espaço. Em muitas aplicações a variável independente t representa tempo.

Suponhamos que $n = 3$ e consideremos uma função contínua

$$\begin{array}{rcl} r : [a,b] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \rightarrow & (f(t), g(t), h(t)). \end{array}$$

Assim, a cada valor de t no intervalo $[a,b]$ fazemos corresponder um vector $r(t) \in \mathbb{R}^3$ o qual, fixado um sistema de coordenadas, pode ser considerado como o vector posição de um certo ponto P.

O conjunto dos pontos P obtidos desta forma denomina-se *arco* ou *curva* do espaço. As equações

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{array} \right.$$

chamam-se *equações paramétricas* da curva e a variável t chama-se *parâmetro*. Os pontos $A = r(a)$ e $B = r(b)$ são, respectivamente, os *pontos inicial* e *final* da curva; se $r(a) = r(b)$ a curva diz-se *fechada*.

Analogamente, se $n = 2$, obtemos um arco ou curva do plano.

Dado um caminho $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde I é um intervalo com mais do que um ponto, já vimos que a *derivada* de r no ponto $t \in I$ é dada por

$$r'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h},$$

se este limite existir.

Se $r(t)$ for o vector posição do ponto P e se $r'(t) \neq 0$, resulta que o vector $r'(t)$ é tangente à curva descrita por $r(t)$ no ponto P e aponta na direcção e sentido em que t aumenta.

Definição 2.1 *Se $r'(t_0) \neq 0$, a recta tangente à curva definida pela função $r(t)$ num ponto $P = r(t_0)$ é a recta que passa pelo ponto P e tem a direcção do vector $r'(t_0)$.*

Neste caso, o vector $T(t_0) = \dfrac{r'(t_0)}{\|r'(t_0)\|}$ é um vector unitário tangente à curva no ponto P.

Se a função $r(t)$ descrever a posição no instante t de uma partícula em movimento, $r'(t)$ representa a taxa de variação da posição da partícula relativamente ao tempo. Por outras palavras, $r'(t)$ é a *velocidade* da partícula que é tangente à trajectória descrita por esta.

3 Comprimento de uma curva

Consideremos uma linha parametrizada,

$$\begin{array}{rcl} r : I & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \rightarrow & (f(t), g(t), h(t)) \end{array}$$

definida num intervalo I contendo $[a,b]$ e seja C a curva definida por $r(t)$. Vamos supor que as funções f, g e h são diferenciáveis em I, com derivadas contínuas, diz-se então que a curva C é de *classe* C^1.

Definição 3.1 *Uma curva C, dada pela função vectorial $r(t)$ com $a \leq t \leq b$, diz-se uma curva simples se não se intersectar, excepto possivelmente nos seus extremos.*

Supondo que a curva C é uma curva simples e de classe C^1, vejamos como calcular o comprimento da porção da curva para $a \leq t \leq b$. Para esse efeito consideramos uma partição do intervalo $[a,b]$, isto é, consideramos pontos t_i tais que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Para cada ponto t_i da partição calculamos $r(t_i)$ e determinamos P_i, o ponto correspondente na curva. Seguidamente consideramos os segmentos de recta que unem os pontos P_{i-1} a P_i, $i = 1, \ldots, n$. Adicionando os comprimentos de todos estes segmentos obtemos o comprimento de uma linha poligonal dado por

$$\sum_{i=1}^{n} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\|.$$

O *comprimento* da curva C define-se como sendo o supremo dos comprimentos de todas as linhas poligonais assim obtidas. Analogamente para curvas do plano.

Teorema 3.2 *Nas condições anteriores, o comprimento da curva C descrita por $r(t)$ com $a \leq t \leq b$ é dado por*

$$L(C) = \int_a^b \|r'(t)\| \, dt.$$

Sendo C uma curva simples e de classe C^1 dada pela função $r(t)$ para $a \leq t \leq b$ define-se a função *comprimento de arco* por

$$s(t) = \int_a^t \|r'(u)\| \, du, \quad a \leq t \leq b.$$

Esta função dá-nos o comprimento do arco, ou curva, C entre os pontos $r(a)$ e $r(t)$. De acordo com o teorema fundamental do cálculo tem-se

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|r'(t)\|.$$

Se a curva C representar a trajectória de uma partícula em movimento cujo vector posição é dado por $r(t)$, então $v(t) = r'(t)$ é a velocidade da partícula e $\|v(t)\| = \|r'(t)\|$ é a sua velocidade escalar. A equação anterior diz-nos que a velocidade escalar da partícula é igual à taxa de variação da distância percorrida ao longo da curva C relativamente ao tempo.