Cálculo Infinitesimal II / Cálculo II - Apontamentos de Apoio
Capítulo 4 - Integrais Duplos e Triplos

1 Integrais duplos: definição, propriedades e aplicações

Consideremos uma função real contínua f definida no rectângulo

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\right\}.$$

O nosso objectivo é definir o integral duplo de f em R. Para esse efeito consideramos uma partição P dos intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$, isto é, consideramos pontos x_i e y_j tais que

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d. \end{aligned}$$

Note-se que a localização dos pontos x_i, $i = 1, \ldots, m-1$ e y_j, $j = 1, \ldots, n-1$, é arbitrária, em particular eles não têm que estar igualmente espaçados. Traçamos agora as rectas $x = x_i$ e $y = y_j$, paralelas aos eixos coordenados, de forma a obtermos uma partição do rectângulo R em nm subrectângulos R_{ij} onde

$$R_{ij} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j\right\},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,$$

sendo a área de R_{ij} dada por

$$A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Uma vez que f é contínua e o rectângulo R_{ij} é limitado e fechado f tem um máximo M_{ij} e um mínimo m_{ij} em R_{ij}.

Definição 1.1 *Chamamos soma superior (respectivamente, inferior) de Darboux de f relativa à partição P à soma*

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} A_{ij}$$

(respectivamente, $\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} A_{ij}$*.)*

Se em vez de contínua, a função f for apenas limitada em R, a definição de soma superior (respectivamente, inferior) de Darboux de f é análoga, substituindo máximo (respectivamente, mínimo) por supremo (respectivamente, ínfimo).

Tal como no caso das funções reais de uma só variável pode-se mostrar que se f é contínua, então existe um e um só número real I que satisfaz as desigualdades

$$\underline{S}(f,P) \leq I \leq \overline{S}(f,P)$$

qualquer que seja a partição P de R que se considere. Dada uma função limitada f, se existir um número I nestas condições f diz-se *integrável* em R (portanto, toda a função contínua em R é integrável em R).

Definição 1.2 *Seja f uma função contínua num rectângulo fechado R. Chamamos integral (duplo) de f em R, e escrevemos*

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dA,$$

ao único número real I que satisfaz as desigualdades

$$\underline{S}(f,P) \leq I \leq \overline{S}(f,P)$$

para todas as partições P de R.

Se f é contínua e $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in R$, podemos considerar o sólido S limitado pelo rectângulo R, pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$ e pela superfície $z = f(x,y)$. Neste caso $\iint_R f(x,y)\,dA$ representa o volume de S. Se $f(x,y) = 1$, $\forall (x,y) \in R$, o sólido S é um paralelepípedo rectângulo de base R e altura 1 tendo-se então

$$\text{área}(R) = \text{volume}(S) = \iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R 1\,dA.$$

Proposição 1.3 *Seja $f(x,y) = k$ uma função constante em $R = [a,b] \times [c,d]$. Então*

$$\iint_R f(x,y)\,dA = k(b-a)(d-c).$$

Nem todas as funções são integráveis num dado rectângulo R, no entanto tem-se o seguinte:

Teorema 1.4 *Seja f uma função limitada num rectângulo R tal que f é contínua em R excepto numa união finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$ definidas em intervalos limitados e fechados de $\mathbb{R}$. Então f é integrável em R.*

Vejamos agora como definir o integral de uma função f numa região do plano que não seja um rectângulo. Consideremos então um subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e suponhamos que Ω é limitado e fechado. Nestas condições existe um rectângulo R tal que $\Omega \subseteq R$. Suponhamos ainda que a fronteira de Ω consiste numa união finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$ definidas em intervalos limitados e fechados de $\mathbb{R}$. Consideremos uma função f contínua em Ω e seja g a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x,y) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

A função g é contínua em R excepto possivelmente nos pontos da fronteira de Ω pelo que g está nas condições do Teorema 1.4 e é, portanto, integrável em R.

Definição 1.5 *Nas condições anteriores definimos*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dA = \iint_R g(x,y)\,dA.$$

Note-se que uma vez que prolongámos a função f por zero fora de Ω é indiferente qual o rectângulo R que se considera, desde que contenha Ω.

A proposição que se segue dá-nos algumas aplicações do integral duplo.

Proposição 1.6 *1) Se $f(x,y) \geq 0$ em Ω, o volume do sólido limitado inferiormente pela região Ω do plano xy e superiormente pela superfície $z = f(x,y)$ é dado por*

$$V = \iint_\Omega f(x,y)\,dA.$$

2) Se $f(x,y) = 1$, $\forall (x,y) \in \Omega$, tem-se

$$\text{área}(\Omega) = \iint_\Omega 1\,dA.$$

3) A massa da placa que ocupa a região Ω do plano xy, e que tem densidade $\mu(x,y)$, é dada por

$$m = \iint_\Omega \mu(x,y)\,dA.$$

Vejamos agora algumas propriedades do integral duplo.

Teorema 1.7 *Sejam f e g duas funções integráveis em Ω.*

i) Se c_1 e c_2 são constantes reais, a função $c_1f + c_2g$ é integrável em Ω e tem-se

$$\iint_\Omega c_1f(x,y) + c_2g(x,y)\,dA = c_1\iint_\Omega f(x,y)\,dA + c_2\iint_\Omega g(x,y)\,dA;$$

ii) se $f(x,y) \geq 0$ em Ω, então $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dA \geq 0$;

iii) se $f(x,y) \geq g(x,y)$ em Ω, então $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dA \geq \iint_\Omega g(x,y)\,dA$;

iv) a função $|f|$ é integrável em Ω e tem-se

$$\left|\iint_\Omega f(x,y)\,dA\right| \leq \iint_\Omega |f(x,y)|\,dA;$$

v) se $|f(x,y)| \leq M$ em Ω, onde M é uma constante, então $\displaystyle\left|\iint_\Omega f(x,y)\,dA\right| \leq MA(\Omega)$, onde $A(\Omega)$ designa a área de Ω.

Teorema 1.8 *Suponhamos que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ onde Ω_1 e Ω_2 não têm pontos interiores comuns e as fronteiras de Ω, Ω_1 e Ω_2 consistem numa união finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$ definidas em intervalos limitados e fechados de $\mathbb{R}$. Se f é integrável em Ω_1 e em Ω_2, então f é integrável em Ω e tem-se*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dA = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dA + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dA.$$

O resultado anterior generaliza-se ao caso em que Ω pode ser escrito como união finita de conjuntos nas condições indicadas:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_n.$$

Vejamos agora como calcular integrais duplos na prática. Suponhamos que a função f está definida e é contínua no rectângulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Usamos a notação $\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ para indicar que integramos a função $f(x,y)$ em ordem à variável y, de $y = c$ até $y = d$, mantendo fixa a variável x. A este processo dá-se o nome de *integração parcial relativamente a y*. Uma vez que $\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ depende do valor de x definimos assim uma função de x:

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Se agora integrarmos a função $g(x)$ relativamente à variável x, de $x = a$ até $x = b$, obtemos

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx. \tag{1.1}$$

Analogamente,

$$h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

é a função que se obtém integrando $f(x,y)$ em ordem à variável x, de $x = a$ até $x = b$, mantendo fixa a variável y (*integração parcial relativamente a x*). Integrando agora a função $h(y)$ em ordem a y, de $y = c$ até $y = d$, vem

$$\int_c^d h(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy. \tag{1.2}$$

Aos integrais (1.1) e (1.2) dá-se o nome de *integrais iterados*. O cálculo destes integrais envolve integração de funções relativamente a uma só variável pelo que os métodos estudados para integração de funções reais de variável real podem ser aqui aplicados. Note-se que a ordem de integração em (1.1) e (1.2) não é a mesma: em (1.1) integramos primeiro em ordem a y, mantendo x fixo, e só depois em ordem a x; em (1.2) fazemos o contrário. Em muitos casos omitimos os parêntesis, escrevendo apenas $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ e $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$, entendendo-se que se calcula em primeiro lugar o integral "de dentro" e só depois o "de fora".

Veremos que para uma vasta classe de funções (em particular, para as funções contínuas) os integrais (1.1) e (1.2) conduzem ao mesmo resultado, sendo portanto indiferente a ordem de integração. Para além disso, este valor comum, é também o valor do integral duplo $\iint_R f(x,y)\,dA$ que definimos anteriormente e este resultado será válido não apenas para integrais definidos em rectângulos R mas também para regiões Ω mais gerais. Comecemos por definir a noção de integral iterado para este tipo de regiões.

Consideremos uma região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ da forma

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\right\},$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são funções contínuas dadas. Se a função f for contínua em Ω, para cada x fixo no intervalo $[a,b]$ podemos integrar $f(x,y)$ relativamente a y, entre $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$. Obtemos assim uma função de x

$$g(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Note-se que agora os limites de integração também variam com x, sendo dados por $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$, respectivamente. Integrando agora $g(x)$, entre $x = a$ e $x = b$, vem

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\ dx.$$

Consideremos agora uma região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ da forma

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\right\},$$

onde ψ_1 e ψ_2 são funções contínuas dadas. Se f for contínua em Ω, integrando $f(x,y)$ em ordem a x, entre $x = \psi_1(y)$ e $x = \psi_2(y)$, obtemos a função

$$h(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

que pode ser integrada em ordem a y:

$$\int_c^d h(y)\,dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\ dy.$$

Tem-se então o seguinte resultado que nos fornece um método prático para calcular integrais duplos:

Teorema 1.9 (Teorema de Fubini) *Se a função f é contínua na região Ω dada por*

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\right\},$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são contínuas em $[a,b]$, então

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\ dx.$$

Se a função f é contínua na região Ω dada por

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\right\},$$

onde ψ_1 e ψ_2 são contínuas em $[c, d]$, então

$$\iint_\Omega f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx\ dy.$$

Se o conjunto Ω for um rectângulo R, o que significa que as funções ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 e ψ_2 são constantes, o teorema anterior diz-nos que o integral duplo $\iint_R f(x,y)\, dA$ pode ser calculado usando qualquer um dos integrais iterados, ou seja é indiferente a ordem de integração. No entanto, nalguns casos, um dos integrais iterados pode ser substancialmente mais fácil de calcular do que o outro.

Se a região Ω não for de nenhum dos dois tipos de regiões considerados no Teorema de Fubini, podemos usar o Teorema 1.8 e decompor Ω numa união finita de regiões destes tipos.

Proposição 1.10 *Seja f uma função contínua em Ω e suponhamos que Ω é um conjunto de um dos tipos considerados no Teorema de Fubini. Então existe um ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que*

$$\iint_\Omega f(x,y)\, dA = f(x_0, y_0) A(\Omega).$$

A $f(x_0, y_0)$ damos o nome de valor médio de f em Ω.

2 Mudança de variável no integral duplo, cálculo de integrais duplos em coordenadas polares

No cálculo de integrais de funções de uma só variável é por vezes conveniente fazer uma mudança de variável por forma a facilitar a integração. Para estas funções sabemos que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(u(t))u'(t)\, dt,$$

onde $x = u(t)$, $a = u(c)$ e $b = u(d)$. Vamos agora ver o equivalente deste resultado para funções de duas variáveis.

Teorema 2.1 (Teorema de Mudança de Variável no Integral Duplo) *Seja $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ uma transformação injectiva, de classe C^1, cujo jacobiano não se anula, e suponhamos que T transforma a região S do plano uv na região Ω do plano xy. Seja $f(x,y)$ uma função contínua em Ω. Então*

$$\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv.$$

Fazendo $f \equiv 1$ no teorema anterior concluimos que

$$A(\Omega) = \iint_S \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv.$$

Dado um ponto $P \neq O = (0,0)$ de coordenadas cartesianas (x, y) vejamos como definir as suas *coordenadas polares* (r, θ). Definimos r como sendo a distância do ponto P à origem, ou seja,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

o ângulo $\theta \in [0, 2\pi[$ é o ângulo que o vector OP faz com o semi-eixo positivo dos x, medido a partir deste semi-eixo no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Note-se que

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{r} \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{x}{r}. \end{cases}$$

Assim, um ponto de coordenadas polares (r, θ) tem coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

onde $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Reciprocamente, para passarmos das coordenadas cartesianas para coordenadas polares fazemos

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \mathrm{tg}\theta = \dfrac{y}{x}, \end{cases}$$

se $x \neq 0$, tendo o cuidado de escolher o ângulo no quadrante apropriado. Se $x = 0$ e $y > 0$ tem-se $\theta = \frac{\pi}{2}$, se $x = 0$ e $y < 0$ tem-se $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Note-se que a equação da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio R, $x^2 + y^2 = R^2$, é escrita em coordenadas polares na forma $r = R$, com $0 \leq \theta < 2\pi$, pelo que estas coordenadas são muito úteis para integrar em regiões circulares e/ou quando na função integranda intervém a expressão $x^2 + y^2$.

Vejamos como aplicar o teorema de mudança de variável ao caso de mudança para coordenadas polares. A transformação que consideramos é

$$T(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

que é de classe C^1, injectiva para $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e cujo jacobiano é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

Assim, o teorema de mudança de variável diz-nos que

$$\iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta,$$

onde Ω é a imagem da região S por meio da transformação anterior.

3 Integrais triplos: definição, propriedades e aplicações

Nesta secção iremos estender os conceitos e métodos de integração a funções de três variáveis. A situação é análoga ao caso de duas variáveis.

Seja f uma função real contínua definida no paralelepípedo rectângulo

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$$

e consideremos uma partição P de R em paralelepípedos fechados mais pequenos, designados por R_{ijk}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, l$, por meio de planos paralelos aos planos coordenados. Uma vez que f é contínua e o conjunto R_{ijk} é limitado e fechado f tem um máximo M_{ijk} e um mínimo m_{ijk} em R_{ijk}.

Definição 3.1 *Chamamos soma superior (respectivamente, inferior) de Darboux de f relativa à partição P à soma*

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} M_{ijk} V_{ijk}$$

(respectivamente, $\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} m_{ijk} V_{ijk}$), onde V_{ijk} é o volume de R_{ijk}.

Se em vez de contínua, a função f for apenas limitada em R, a definição de soma superior (respectivamente, inferior) de Darboux de f é análoga, substituindo máximo (respectivamente, mínimo) por supremo (respectivamente, ínfimo).

Tal como no caso das funções reais de uma ou duas variáveis pode-se mostrar que se f é contínua em R, então existe um e um só número real I que satisfaz as desigualdades

$$\underline{S}(f,P) \leq I \leq \overline{S}(f,P)$$

qualquer que seja a partição P de R que se considere. Dada uma função f limitada, se existir um número I nestas condições f diz-se *integrável* em R. Assim, todas as funções contínuas em R são integráveis em R (e o mesmo é válido para as funções limitadas em R que não tenham "demasiados" pontos de descontinuidade).

Definição 3.2 *Seja f uma função contínua num paralelepípedo rectângulo fechado R. Chamamos integral (triplo) de f em R, e escrevemos*

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_R f(x,y,z)\,dV,$$

ao único número real I que satisfaz as desigualdades

$$\underline{S}(f,P) \leq I \leq \overline{S}(f,P)$$

para todas as partições P de R.

Os integrais triplos surgem em inúmeras aplicações. Por exemplo, se a função f representar a densidade (massa por unidade de volume) de um material que ocupa a região R do espaço, então a massa de R é dada por

$$m = \iiint_R f(x,y,z)\,dV.$$

Se $f(x,y,z) = 1$ em R o integral triplo de f em R dá-nos o volume de R,

$$V(R) = \iiint_R 1\,dV.$$

Tal como no caso do integral duplo, se $f(x,y,z)$ é contínua em R, o integral triplo de f em R pode ser calculado por meio de integrais iterados (Teorema de Fubini), havendo neste caso seis possíveis ordens de integração:

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \ldots$$

No cálculo do integral $\int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ integramos $f(x,y,z)$ primeiro em ordem a x, mantendo y e z constantes, depois em ordem a y, mantendo z fixo, e finalmente em ordem a z; os integrais iterados são, pois, calculados de "dentro" para "fora".

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ for um conjunto limitado e fechado e se f for contínua em Ω definimos

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iiint_R g(x,y,z)\,dV,$$

onde R é um paralelepípedo tal que $\Omega \subseteq R$ e a função g é dada por

$$g(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x,y,z) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Este integral existe desde que a fronteira de Ω seja suficientemente regular. Com esta definição são válidas para o integral triplo as mesmas propriedades do integral duplo (vejam-se os Teoremas 1.7 e 1.8).

Suponhamos agora que o conjunto Ω é da forma

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y),\ (x,y) \in \Omega_{xy}\right\},$$

onde $\Omega_{xy} \subseteq \mathbb{R}^2$ é a projecção de Ω no plano xy. Se

$$\Omega_{xy} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\right\},$$

e as funções ψ_1, ψ_2, ϕ_1 e ϕ_2 forem contínuas, tem-se

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$$

Analogamente, podemos escrever expressões semelhantes para os casos em que projectamos Ω nos planos xz ou yz. Em muitas situações é possível exprimir Ω de mais de uma maneira como conjunto dos tipos anteriores, o que corresponde a considerar diferentes ordens de integração. Quando isto sucede deve-se escolher a ordem de integração que facilite mais os cálculos.

4 Mudança de variável no integral triplo, cálculo de integrais triplos em coordenadas cilíndricas e esféricas

Já vimos que no cálculo de determinados integrais duplos é conveniente fazer uma mudança de variáveis e usar coordenadas polares. No cálculo de integrais triplos será por vezes útil mudarmos para as chamadas *coordenadas cilíndricas* ou *esféricas*. Comecemos por enunciar o teorema geral.

Teorema 4.1 (Teorema de Mudança de Variável no Integral Triplo) *Seja $T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ uma transformação injectiva, de classe C^1, cujo jacobiano não se anula, e suponhamos que T transforma a região S do espaço uvw na região Ω do espaço xyz. Seja $f(x,y,z)$ uma função contínua em Ω. Então*

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\, dv\, dw.$$

As *coordenadas cilíndricas* de um ponto P de coordenadas cartesianas (x,y,z), com $(x,y) \neq (0,0)$, são (r,θ,z) onde (r,θ) são as coordenadas polares de (x,y), ou seja, tem-se

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

onde $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$. O nome coordenadas cilíndricas é consequência de, nestas coordenadas, a equação do cilindro $x^2+y^2 = R^2$ se escrever simplesmente $r = R$, com $\theta \in [0, 2\pi[$, $z \in \mathbb{R}$. Assim, estas coordenadas são úteis no cálculo de integrais triplos em regiões limitadas por (porções de) cilindros, parabolóides ou cones.

Vejamos como aplicar o teorema de mudança de variável neste caso. A transformação que consideramos é

$$T(r,\theta,z) = (x(r,\theta,z), y(r,\theta,z), z(r,\theta,z)) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

que é de classe C^1, injectiva para $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$ e cujo jacobiano é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$$

Assim, o teorema de mudança de variável diz-nos que

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy, dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz,$$

onde Ω é a imagem da região S por meio da transformação anterior.

Dado um ponto P de coordenadas cartesianas (x, y, z), com $(x, y) \neq (0, 0)$, vamos agora definir as suas *coordenadas esféricas* (ρ, θ, φ). Definimos ρ como sendo a distância do ponto P à origem, ou seja,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

designemos por OQ a projecção do segmento OP no plano xy, o ângulo $\theta \in [0, 2\pi[$ é o ângulo que o vector OQ faz com o semi-eixo positivo dos x, medido a partir deste semi-eixo no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Finalmente, o ângulo $\varphi \in]0, \pi[$ é o ângulo que o vector OP faz com o semi-eixo positivo dos z, medido a partir do referido semi-eixo. Tem-se então

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

onde $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\varphi \in]0, \pi[$.

Note-se que a equação da superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio R, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, se escreve simplesmente $\rho = R$ em coordenadas esféricas, pelo que estas coordenadas são muito úteis para integrar em regiões limitadas por (porções de) superfícies esféricas ou cones.

Para aplicarmos o teorema de mudança de variável neste caso consideramos a transformação dada por

$$T(\rho, \theta, \varphi) = (x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi)) = (\rho \cos\theta \sin\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\varphi)$$

que é de classe C^1, injectiva para $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$ e cujo jacobiano é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = -\rho^2 \sin\varphi.$$

Assim, o teorema de mudança de variável diz-nos que

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy, dz = \iiint_S f(\rho \cos\theta \sin\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\varphi)\, \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi,$$

onde Ω é a imagem da região S por meio da transformação anterior.