ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

Ano Letivo 2019/2020

Exercícios 16 a 18 – Resoluções

16. Para qualquer hora escolhida ao acaso, defina-se: N – v.a. que representa o n.º de nascimentos; sabe-se que $N \cap P(\lambda)$, ou seja, a f.m.p. de N é:

$$P(N= k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!\ ,\ \ k= 0, 1, 2, ...$$

"Não haver nascimentos durante uma hora" $\Leftrightarrow \{N= 0\} \Rightarrow P(N= 0) = 0.386$

$P(N= 0) = 0.386 \Leftrightarrow e^{-\lambda}\lambda^0/0! = 0.386 \Leftrightarrow \underline{e^{-\lambda} = 0.386} \Leftrightarrow \lambda = -\mathrm{Ln}(0.386) = 1 \Rightarrow N \cap P(1)$

a) "Ocorrem pelo menos três nascimentos numa hora" $\Leftrightarrow \{N\geq 3\}$

$P(N\geq 3) = 1 - P(N< 3) = 1 - P(N\leq 2) = 1 - e^{-\lambda}(\lambda^0/0! + \lambda/1! + \lambda^2/2!) = 1 - 0.386\ (1 + 1 + 0.5) = \underline{0.035}$

b) Sejam N_i – v.a. que representa o n.º de nascimentos na hora i, i = 1, 2, 3. As variáveis $\{N_i\}_{i=1, 2, 3}$ são mutuamente independentes (o n.º de nascimentos numa certa hora em nada influencia o n.º de nascimentos noutra hora qualquer) e cada uma delas tem a mesma distribuição que a v.a. genérica N, ou seja, são v.a.'s i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas).

O número de nascimentos nas três horas é dado por $S_3 = N_1+ N_2+ N_3$. Ora, como as v.a.'s $\{N_i\}_{i=1, 2, 3}$ são independentes com distribuição de Poisson, então a soma das mesmas também tem distribuição de Poisson, com valor esperado igual à soma dos valores esperados de cada uma delas, i.e.,

$$S_3 = N_1+ N_2+ N_3 \cap P(3).$$

"Nas três horas haver no máximo 2 nascimentos" $\Leftrightarrow \{ S_3\leq 2\}$

$P(S_3\leq 2) = e^{-3}(3^0/0! + 3/1! + 3^2/2!) = e^{-3}(1 + 3 + 4.5) \approx \underline{0.423}$

c) "Em duas horas há, quanto muito, um nascimento em cada uma delas" $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ "Na primeira hora há, quanto muito, um nascimento" e "Na segunda hora há, quanto muito, um nascimento" $\Leftrightarrow \{N_1\leq 1 \wedge N_2\leq 1\}$

$P(N_1\leq 1 \wedge N_2\leq 1) = P(N_1\leq 1) \times P(N_2\leq 1) =$ (porque N_1 e N_2 são independentes)

$= P(N\leq 1) \times P(N\leq 1) =$ (porque N_1 e N_2 são identicamente distribuídas com N)

$= [P(N\leq 1)]^2 = [0.386\ (1+ 1)]^2 \approx \underline{0.596}$

17. Se as latas são sucessivamente inspeccionadas com reposição (selecciona-se ao acaso um lata, verifica-se se está fora do prazo de validade, ou não, e volta-se a misturá-la com as restantes), então antes de cada selecção existem sempre 500 latas fora do prazo de validade, num total de 10000 latas. Assim, sendo *p* a probabilidade de que uma lata, escolhida ao acaso para ser inspeccionada, esteja fora do prazo de validade, tem-se que p = 500/10000 = 0.05. Se a inspecção contempla 15 latas, então associada à inspecção de cada uma delas está uma prova de Bernoulli (está fora de prazo (sucesso) ou não). Deste modo, sendo X a v.a. que representa o número de latas, nas 15 inspeccionadas, que estão fora do prazo, tem-se que:

$$X \cap Bi(15, 0.05).$$

a) "O lote é rejeitado" $\Leftrightarrow$ "Na amostra de 15 latas há mais de 2 fora do prazo de validade" $\Leftrightarrow \{X> 2\}$

$P(X> 2) = 1 - P(X\leq 2) = 1 - (0.95^{15} + C^{15}_1\ 0.05 \times 0.95^{14} + C^{15}_2\ 0.05^2\ 0.95^{13}) \approx \underline{0.0362}$

b) O número esperado de latas fora do prazo de validade é o valor esperado de X:

$E(X) = 15 \times 0.05 = \underline{0.75}$ latas

c) Considerem-se os acontecimentos:

F_i: "A i-ésima lata inspeccionada está fora do prazo de validade", i≥ 1, e seja Y – v.a. que representa o n.º de latas que é <u>necessário</u> inspeccionar para que se encontre uma fora do prazo de validade. De uma maneira geral, considere-se $P(F_i) = p$. Facilmente se percebe que:

$\{Y= 1\} \Leftrightarrow$ realiza-se F_1; para k≥ 2, $\{Y= k\} \Leftrightarrow$ realiza-se $(F_1^C \cap ... \cap F_{k-1}^C \cap F_k)$.

Então, $P(Y= k) = P(F_1^C \cap ... \cap F_{k-1}^C \cap F_k) = (1 - p)^{k-1} p$, k≥ 1, pelo que a f.m.p. de Y é a seguinte:

$$P(Y= k) = p\ (1 - p)^{k-1} = p\ q^{k-1},\ \ k\geq 1.$$

Diz-se que Y tem distribuição geométrica de parâmetro *p* e denota-se

$$Y \cap Geom(p).$$

i) {É necessário inspeccionar 4 ou mais latas} ⇔ {Y≥ 4}
$P(Y\geq 4) = 1 - P(Y< 4) = 1 - P(Y\leq 3) = 1 - p\,(q^0 + q^1 + q^2) = 1 - 0.05\,(1 + 0.95 + 0.95^2) \approx \underline{0.8574}$
<u>Alternativamente</u>
Calculemos, de forma geral, $P(Y\geq j)$, com $j \geq 1$:
$$P(Y\geq j) = \sum_{k\geq j} P(Y=k) = \sum_{k\geq j} pq^{k-1} = p\sum_{k\geq j} q^{k-1} \underset{(*)}{=} p\frac{q^{j-1}}{1-q} = q^{j-1}.$$
(*) Soma (convergente pois $|q|<1$) de todos os termos de uma progressão geométrica
Substituindo j por 4 vem:
$P(Y\geq 4) = 0.95^3 \approx \underline{0.8574}$

ii) O número esperado de latas inspeccionadas é o valor esperado de Y.
Demonstre-se que $W \cap \text{Geom}(p) \Rightarrow E(W) = 1/p$:
$$E(W) = \sum_{k\geq 1} k\times P(W=k) = \sum_{k\geq 1} kpq^{k-1} = p\sum_{k\geq 1} kq^{k-1} = p\sum_{k\geq 1}\frac{d}{dq}q^k \underset{(*)}{=} p\frac{d}{dq}\sum_{k\geq 1} q^k = p\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} =$$
$$= p\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} = p\frac{1(1-q)-q(-1)}{(1-q)^2} = p\frac{1}{p^2} = 1/p.$$
Portanto, $E(Y) = 1/0.05 = \underline{20 \text{ latas}}$

18. Sendo p a probabilidade de um arranque, escolhido ao acaso, falhar, tem-se $p = 0.00001$. Considere-se R – v.a. que representa o número de falhas nos próximos 10 000 arranques. Admitindo que as falhas ocorrem independentemente umas das outras (como faz sentido, ou então haveria uma razão sistemática para ocorrerem), R serve para "contar" o número de sucessos (falhas) em 10 000 provas de Bernoulli, com probabilidade de sucesso $p = 0.00001$, pelo que $R \cap \text{Bi}(10\,000,\ 0.00001)$.
"Pelo menos uma falha nos 10 000 arranques" ⇔ {R≥ 1}
$P(R\geq 1) = 1 - P(R= 0) = 1 - 0.99999^{10\,000} \approx \underline{0.0952}$
<u>Alternativamente</u>
R tem uma distribuição Binomial com um número de provas muito "grande" e uma probabilidade de sucesso muito "pequena" (observar um sucesso é um acontecimento "raro"). Além disso, tem-se que $E(R) = 10\,000\times 0.00001 = 0.1$ e $\text{Var}(R) = 0.1\times 0.99999 = 0.099999$, ou seja, a variância de R está muito próxima do valor esperado de R (característica da distribuição de Poisson). Deste modo, as massas de probabilidade de R podem ser bem aproximadas pelas correspondentes massas de probabilidade de uma distribuição de Poisson, com parâmetro 0.1 (o valor esperado de R). Assim:
$P(R\geq 1) = 1 - P(R= 0) \approx 1 - e^{-0.1} \approx 1 - 0.9048 = \underline{0.0952}$