## ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

Ano Letivo 2019/2020

**Exercícios 19 a 21 – Resoluções**

19. Seja D a v.a. que representa a distância, em metros, requerida para parar após se ter travado, quando se circulava a 48Km/h; sabe-se que $D \cap \mathcal{N}(15, \sigma = 2)$. Note-se que embora D seja não negativa (é uma distância), não é inconsistente modelar a sua distribuição com a Normal (que toma valores em toda a recta real) pois $P(D < 0) = P((D-15)/2 < (0-15)/2) = \Phi(-7.5) \approx 0$.
   a) "Parar no máximo em 12 metros" $\Leftrightarrow \{D \leq 12\}$
   $P(D \leq 12) = P((D-15)/2 \leq -3/2) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = \underline{0.0668}$;
   "Parar em 15 metros ou menos" $\Leftrightarrow \{D \leq 15\}$
   A distribuição de D é simétrica em torno de 15 (o seu valor esperado), pelo que $P(D \leq 15) = \underline{0.5}$
   b) "Evitar o acidente" $\Leftrightarrow$ "Parar antes de atingir os 18 metros (distância ao outro carro)" $\Leftrightarrow \{D \leq 18\}$
   $P(D < 18) = P((D-15)/2 \leq 3/2) = \Phi(1.5) = \underline{0.9332}$

20. Para um aluno escolhido ao acaso (no universo dos que fazem prova escrita), seja X a v.a. que representa a nota obtida. Sabe-se que $X \cap \mathcal{N}(11, \sigma = 3)$.
   a) $P(0 \leq X < 4) = \Phi(-7/3) - \Phi(-11/3) = 1 - \Phi(7/3) - 1 + \Phi(11/3) \approx \Phi(3.67) - \Phi(2.33) = 0.9999 - 0.9901 =$
   $= 0.0098 = \underline{0.98\%}$;
   $P(4 \leq X < 8) = \Phi(-1) - \Phi(-7/3) = \Phi(7/3) - \Phi(1) \approx \Phi(2.33) - \Phi(1) = 0.9901 - 0.8413 = 0.1488 = \underline{14.88\%}$;
   $P(8 \leq X < 12) = \Phi(1/3) - \Phi(-1) \approx \Phi(0.33) - 1 + \Phi(1) = 0.6293 + 0.8413 - 1 = 0.4706 = \underline{47.06\%}$;
   $P(12 \leq X < 16) = \Phi(5/3) - \Phi(1/3) \approx \Phi(1.67) - \Phi(0.33) = 0.9525 - 0.6293 = 0.3232 = \underline{32.32\%}$;
   $P(16 \leq X \leq 20) = \Phi(3) - \Phi(5/3) \approx \Phi(3) - \Phi(1.67) = 0.9987 - 0.9525 = 0.0462 = \underline{4.62\%}$
   (Note-se que a soma das percentagens anteriores não iguala 100% devido à acumulação de erros de arredondamento, dos pontos onde se calcula a f.d. bem como dos próprios valores da mesma)
   b)
      i) "O aluno reprova" $\Leftrightarrow \{X < 8.5\}$
      $P(X < 8.5) = \Phi(-2.5/3) \approx \Phi(-0.83) = 1 - \Phi(0.83) = 1 - 0.7967 = 0.2033$;
      $50 \times 0.2033 = \underline{10.2 \text{ alunos}}$
      ii) "O aluno vai fazer prova oral" $\Leftrightarrow \{10 \leq X < 12 \ \vee\ 16 < X \leq 20\}$
      $P(10 \leq X < 12 \ \vee\ 16 < X \leq 20) = P(10 \leq X < 12) + P(16 < X \leq 20)$
      $P(16 < X \leq 20) = 0.0462$ (por a));
      $P(10 \leq X < 12) = \Phi(1/3) - \Phi(-1/3) = \Phi(1/3) - 1 + \Phi(1/3) = 2\,\Phi(1/3) - 1 \approx 2\,\Phi(0.33) - 1 =$
      $= 2 \times 0.6293 - 1 = 0.2586$;
      $P(10 \leq X < 12 \ \vee\ 16 < X \leq 20) = 0.2586 + 0.0462 = 0.3048$
      $50 \times 0.3048 = \underline{15.2 \text{ alunos}}$
      iii) Os 12 alunos com piores notas correspondem a uma proporção de 12/50 = 0.24 alunos. A nota máxima esperada corresponde ao valor $x$ tal que $P(X \leq x) = 0.24$, ou seja, $x$ é o quantil de probabilidade 0.24 da distribuição de X ($\mathcal{N}(11, \sigma = 3)$).
      $\Phi^{-1}(0.24) = -\Phi^{-1}(1 - 0.24) = -\Phi^{-1}(0.76) \approx -0.71$
      $x = 3 \times (-0.71) + 11 = \underline{8.87 \text{ valores}}$

21. Seja T a v.a. que representa o tempo (em horas) que o gestor demora a avaliar um projecto (escolhido ao acaso). Sabe-se que $T \cap \mathcal{N}(10, \sigma = 2)$.
   a) $P(9 < T < 11) = \Phi(1/2) - \Phi(-1/2) = 2\,\Phi(0.5) - 1 = 2 \times 0.6915 - 1 = \underline{0.383}$
   b) Seja $t$ o tempo que se pretende determinar. "O estudo não está concluído naquele tempo" $\Leftrightarrow \{T > t\}$
   Para $t$ satisfazer a condição probabilística pretendida terá que verificar
   $P(T > t) = 0.025 \Leftrightarrow P(T \leq t) = 0.975$,
   ou seja, $t$ é o quantil de probabilidade 0.975 da distribuição de T ($\mathcal{N}(10, \sigma = 2)$).

$\Phi^{-1}(0.975) = 1.96 \Rightarrow t = 2 \times 1.96 + 10 =$ $\underline{13.92 \text{ horas}}$

c) "O gestor recebe uma compensação monetária" $\Leftrightarrow \{T < 8\}$

Seja $p = P(T < 8)$; $p = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

Considere-se N a v.a. que representa o n.ºde projectos, em 7 escolhidos ao acaso, em que o gestor é bem sucedido no objectivo de receber uma compensação monetária - obtém um "sucesso".

Admitindo que os tempos de avaliação dos projectos são independentes uns dos outros, então os 7 projectos associados à v.a. N constituem provas de Bernoulli e, portanto, $N \cap Bi(7, p = 0.1587)$.

"O gestor é compensado em pelo menos 2 dos 7 projectos" $\Leftrightarrow \{N \geq 2\}$

$P(N \geq 2) = 1 - P(N \leq 1) = 1 - 0.8413^7 - 7 \times 0.1587 \times 0.8413^6 \approx \underline{0.3078}$