Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– 2023/24 -FCUL – DEGGE

Teste 1 - 08/11/2023

1) Represente na forma indicial, recorrendo à convenção de Einstein dos índices repetidos e ao tensor alternante quando for o caso as seguintes quantidades:
   a) Traço do produto matricial de três matrizes quadradas A, B, C ou seja $Tr(ABC)$. Mostre que se A, B, C forem todas simétricas então o traço do produto fica invariante para qualquer ordem desse produto, i.e. por exemplo $Tr(ABC) = Tr(ACB) = Tr(BAC)$.

   b) Produto externo $\frac{\overrightarrow{dr}}{dt} \times \vec{a}$ onde $\vec{r}(t)$ é o vetor posição no plano (x,y) de um movimento circular uniforme à velocidade angular $\Omega \vec{e}_z$ e o vetor $\vec{a}$ é um vetor pertencente ao plano (x,y).
2) Dada a curva plana no plano (x,y) : $\vec{r}(t) = kt\,\vec{u}(t)$ onde $\vec{u}(t) = \cos(t)\,\vec{e}_x + \sin(t)\vec{e}_y$ e k é uma constante positiva.
   a) Desenhe a curva para $t \in [0,4\pi]$.
   b) Calcule a curvatura através da fórmula: $\kappa = \frac{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|^3}$ para cada valor de t. Sugestão:

   Use o vetor $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{u}}{dt}$, o qual é ortogonal a $\vec{u}$.
3) a) Represente parametricamente superfície dada pela calote polar de um planeta de raio R, entre as latitude 30°N e 90°N, usando como parâmetros a longitude λ e a latitude φ. Coloque a origem das coordenadas no centro do planeta, o eixo dos x e y no plano do equador, correspondente às longitudes $\lambda = 0$, e $\lambda = \frac{\pi}{2}\,rad.$ respetivamente e o eixo dos z passando pelo centro do planeta e o pólo Norte.

   b) Calcule o elemento de superfície $dS = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\lambda} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right\| d\lambda\, d\varphi$.

4) Dado um campo vetorial $\vec{F}(x,y) = a(x)\vec{e}_x + b(y)\vec{e}_y$ onde $a(x)$, $b(y)$ são funções diferenciáveis arbitrárias de x e y respetivamente.

   a) Mostre que $\vec{F}(x,y)$ é um campo conservativo e calcule o potencial $\Phi(x,y)$.

   b) Exprima o integral de caminho entre os pontos arbitrários (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em função das primitivas de $a(x)$ e $b(y)$.

   c) Particularize o resultado para $b(y) = y$ e $a(x) = x$.

Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra ①

2023-24 Teste 1 08/11/2023

Correção

① a) Seja $D = ABC$ o produto matricial de A por B por C. O elemento (i,j) de D ou seja D_{ij} é representado indicialmente por $D_{ij} = A_{ip} B_{pr} C_{rj}$ onde há 2 contrações (somas ao longo dos índices $p = 1, \dots, N$ e $r = 1, \dots, N$) associadas ao produto matricial. O traço de D é $Tr\, D = D_{ii} = A_{ip} B_{pr} C_{ri} = Tr(ABC)$ = soma dos elementos da diagonal de D.

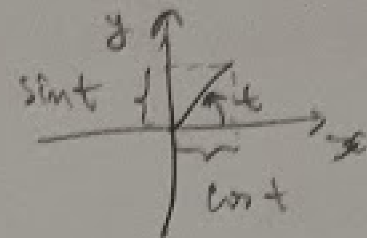
A, B, C simétricas ou seja
$$\begin{cases} A_{ip} = A_{pi}, & \forall_{p,i} \\ B_{pr} = B_{rp}, & \forall_{r,p} \\ C_{rj} = C_{jr}, & \forall_{r,j} \end{cases}$$

assim $Tr(ABC) = A_{ip} B_{pr} C_{ri} = A_{pi} C_{ir} B_{rp} = Tr(ACB)$
$= B_{rp} A_{pi} C_{ir} = Tr(BAC)$

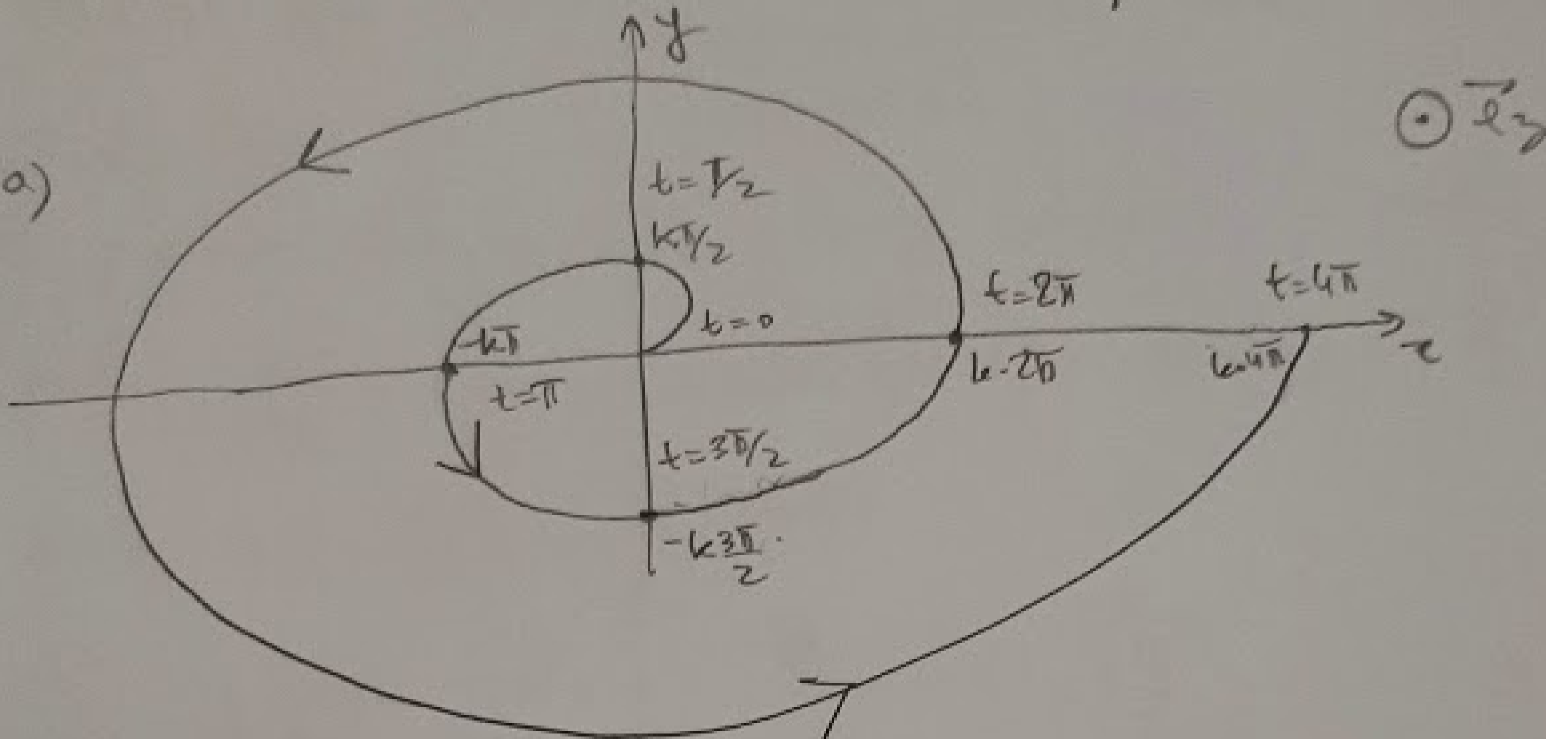
---

b) No movimento circular uniforme à velocidade angular uniforme $\vec{\Omega}$, a velocidade $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$. Assim
$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{a} = (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{\Omega})\vec{r} - (\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{\Omega}$. Como $\vec{a} \perp \vec{\Omega}$ e $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3 = \Omega \vec{e}_3$ vem $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{a} = -(\vec{a} \cdot \vec{r})\Omega \vec{e}_3 =$
$= -a_i x_i \Omega \vec{e}_3$

② Dada a curva $C=\{(x,y)=\vec{r}(t)=kt\,\vec{u}(t)\ ,\ t\in[0,4\pi]\}$
onde $\vec{u}(t)=\cos(t)\,\vec{e}_x+\sin(t)\,\vec{e}_y$



a)



Note-se que $\vec{r}(0)=(0,0)$; $\vec{r}(\pi/2)=k\frac{\pi}{2}\vec{e}_y$

$\vec{r}(\pi)=-k\pi\,\vec{e}_x$; $r(2\pi)=2k\pi\,\vec{e}_x$; $\vec{r}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{2}k\,\vec{e}_y$

b) Para calcular a curvatura $\kappa=\dfrac{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|^3}$ vamos calcular $\frac{d\vec{r}}{dt}$, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, o produto externo e sua norma e ainda a norma de $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Seja $\vec{v}=\frac{d\vec{u}}{dt}=-\sin t\,\vec{e}_x+\cos t\,\vec{e}_y$ o qual é ortogonal a $\vec{u}$ dado que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Assim $\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(kt\,\vec{u}(t))=k\vec{u}+kt\,\vec{v}$ (derivada do produto)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=k\vec{v}+k\vec{v}+kt\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{-\vec{u}}=2k\vec{v}-kt\vec{u}$$

O produto externo vem:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (k\vec{u} + kt\vec{v}) \times (2k\vec{v} - kt\vec{u})$$

Note-se que $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_3$, além disso

$\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{e}_3$

O produto externo entre vetores colineares é nulo.

Assim $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2k^2\vec{e}_3 + k^2t^2\vec{e}_3 = k^2(2+t^2)\,\vec{e}_3$

donde $\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\| = k^2(2+t^2)$

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^3 = \left(k^2 + k^2t^2\right)^{3/2} = k^3(1+t^2)^{3/2}$$

pelo que a curvatura $\kappa = \frac{k^2(2+t^2)}{k^3(1+t^2)^{3/2}} = \frac{(2+t^2)}{k(1+t^2)^{3/2}}$ que é

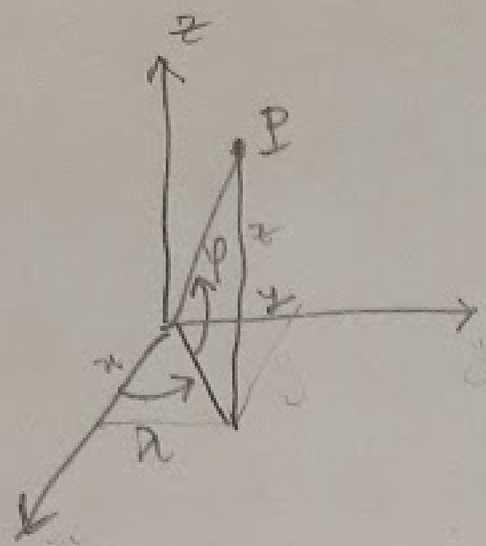
uma função decrescente de t (devido à potência $3/2$ em denominador

Assim $\lim_{t\to\infty} \kappa(t) = \frac{t^2}{kt^3} = 0$ ou seja o raio de curvatura

$1/\kappa$ tende para ∞ à medida que $t \to \infty$, o que é consistente

com o gráfico da curva C.

(3)



λ = longitude , $\rho = R$ = raio terrestre
φ = latitude

$\begin{cases} \text{eixo } x \text{ alinhado segundo } \lambda = 0 \\ \text{eixo } y \quad " \quad " \quad \lambda = \pi/2 \text{ rad} \end{cases}$

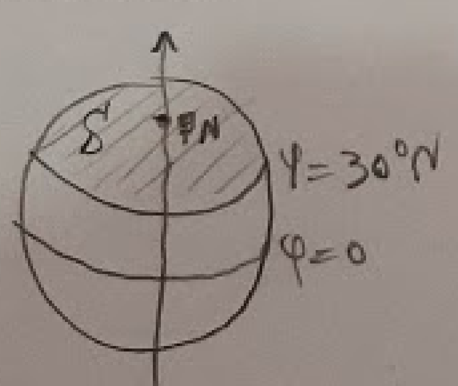
As coordenadas cartesianas (x, y, z) obtidas a partir das coordenadas esféricas são:

$$x = R \cos\varphi \cos\lambda$$
$$y = R \cos\varphi \sin\lambda$$
$$z = R \sin\varphi$$

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

a) S = Calote esférica desde $\varphi = 30°N$ até $\varphi = 90°N$ =

$= \{(x, y, z) : \lambda \in [0, 2\pi], \varphi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]\}$



b) $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda} = (-R\cos\varphi \sin\lambda, R\cos\varphi \cos\lambda, 0)$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-R\sin\varphi \cos\lambda, -R\sin\varphi \sin\lambda, R\cos\varphi)$

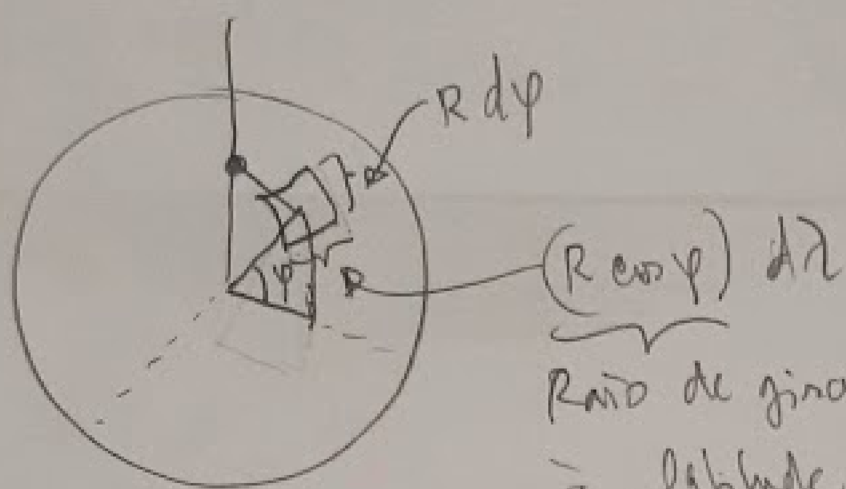
Calculemos $\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -R\cos\varphi\sin\lambda & R\cos\varphi\cos\lambda & 0 \\ -R\sin\varphi\cos\lambda & -R\sin\varphi\sin\lambda & R\cos\varphi \end{vmatrix}$

$$\vec{a} = \overbrace{R^2\cos^2\varphi\cos\lambda}^{a_x}\,\vec{e}_x + \overbrace{R^2\cos^2\varphi\sin\lambda}^{a_y}\,\vec{e}_y + \overbrace{R^2\sin\varphi\cos\varphi}^{a_z}\,\vec{e}_z$$

$$\|\vec{a}\| = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2} = R^2\cos\varphi\left[\underbrace{\cos^2\varphi(\underbrace{\cos^2\lambda + \sin^2\lambda}_{1}) + \sin^2\varphi}_{1}\right]^{1/2}$$

$$= R^2\cos\varphi$$

Logo o elemento de superfície é $dS = R^2\cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi$



Raio de giração = raio do paralelo à latitude φ

O retângulo infinitesimal tangente à superfície tem lados $R\,d\varphi$ e $R\cos\varphi\, d\lambda$, logo a sua área é $dS = R^2\cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi$. como foi deduzido.

⑥

(4) $\vec{F}(x,y) = \underbrace{a(x)}_{F_x}\vec{e}_x + \underbrace{b(y)}_{F_y}\vec{e}_y$

a) $\vec{F}(x,y)$ conservativo significa $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

De facto $\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a(x) & b(y) & 0 \end{vmatrix} = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial z} b(y)}_{0}\vec{e}_x + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} a(x)}_{0}\vec{e}_y$

$+ \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} b(y) - \frac{\partial}{\partial y} a(x)\right]}_{0}\vec{e}_z$ dado que $\begin{cases} b(y) \text{ não depende de } x \\ a(x) \text{ não depende de } y \end{cases}$

Se $\text{rot}\,\vec{F} = 0$ então existe uma função potencial

$\Phi(x,y)$ tal que $\begin{cases} F_x = a(x) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ F_y = b(y) = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}$

donde $\Phi(x,y) = \int_0^x a(u)\,du + f_1(y) = \int_0^y b(u)\,du + f_2(x)$

donde $\phi(x,y) = \underbrace{\int_0^x a(u)\,du}_{P_a(x)} + \underbrace{\int_0^y b(u)\,dy}_{P_b(y)}$

$= \text{primitiva de } a(x)$ $= \text{primitiva de } b(y)$

b) $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \underbrace{\vec{F}}_{\vec{\nabla}\phi}\cdot d\vec{r} = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} d\phi = \phi(x_2,y_2) - \phi(x_1,y_1)$

c) $\phi(x,y) = \int_0^x u\,du + \int_0^y u\,du = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$