

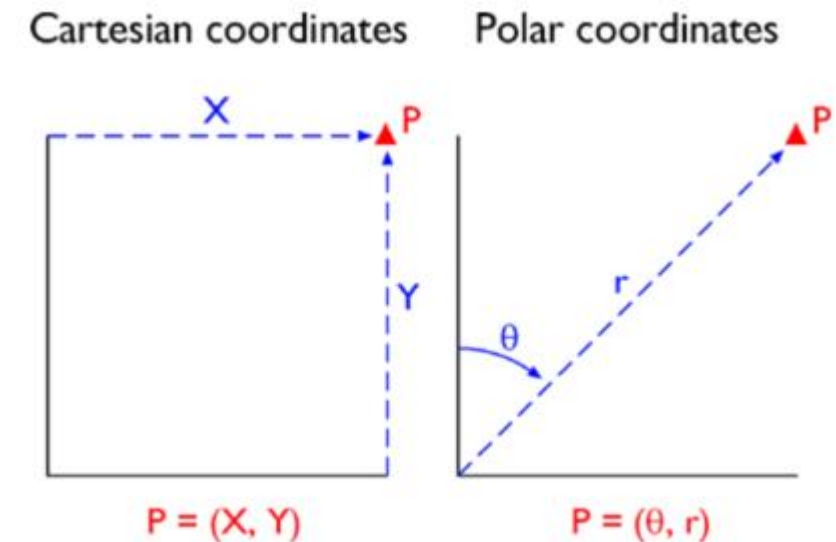
3

SISTEMAS DE COORDENADAS NO PLANO

3. Sistemas de coordenadas no plano

SISTEMAS DE COORDENADAS PLANAS

- Os sistemas de coordenadas são necessários para expressar a **posição de pontos sobre uma qualquer superfície**, seja ela o elipsoide, a esfera ou o plano.
- Os sistemas de coordenadas planas aplicam-se às representações planas da superfície da Terra, destacam-se os sistemas de **coordenadas cartesianas retangulares** e os sistemas de **coordenadas polares**.
- A principal diferença entre coordenadas polares e retangulares é a forma como é definido um ponto no espaço, sendo que as primeiras utilizam **ângulos e distâncias para definir uma determinada localização**, e as segundas consistem num sistema de **2 eixos perpendiculares que formam 4 quadrantes em torno da origem**.

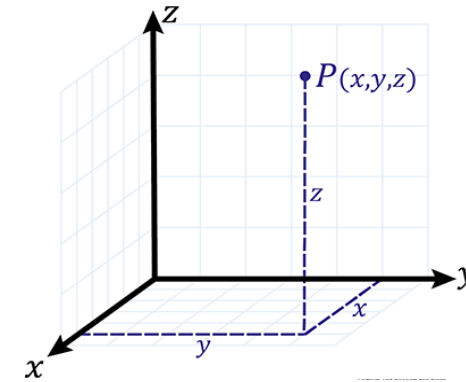


3. Sistemas de coordenadas no plano

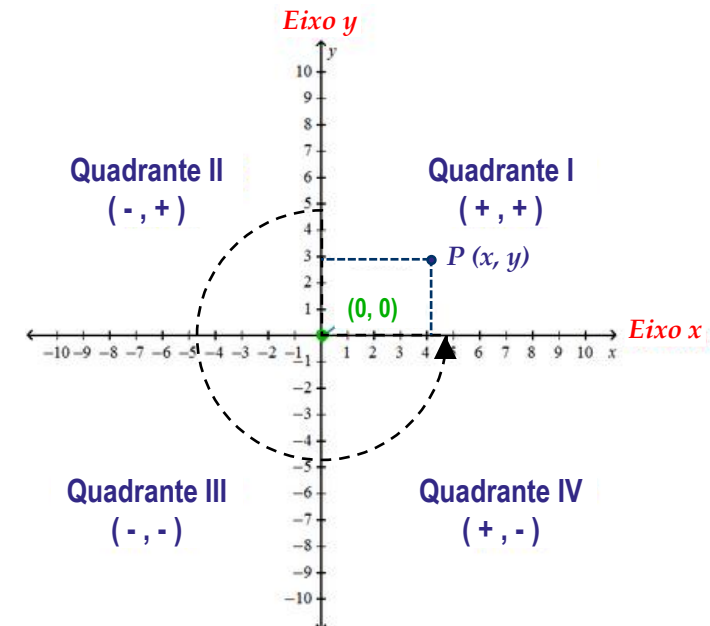
COORDENADAS CARTESIANAS RETANGULARES

- Um **sistema cartesiano** pode ser constituído por conjuntos de linhas retas ou curvas, as quais se interseam com um determinado ângulo.
- No caso dos **sistemas de coordenadas cartesianas retangulares planas** (também denominadas mais sucintamente de **coordenadas retangulares**), os dois conjuntos são constituídos por linhas retas perpendiculares entre si (ortogonais).

Coordenadas Cartesianas 3-D



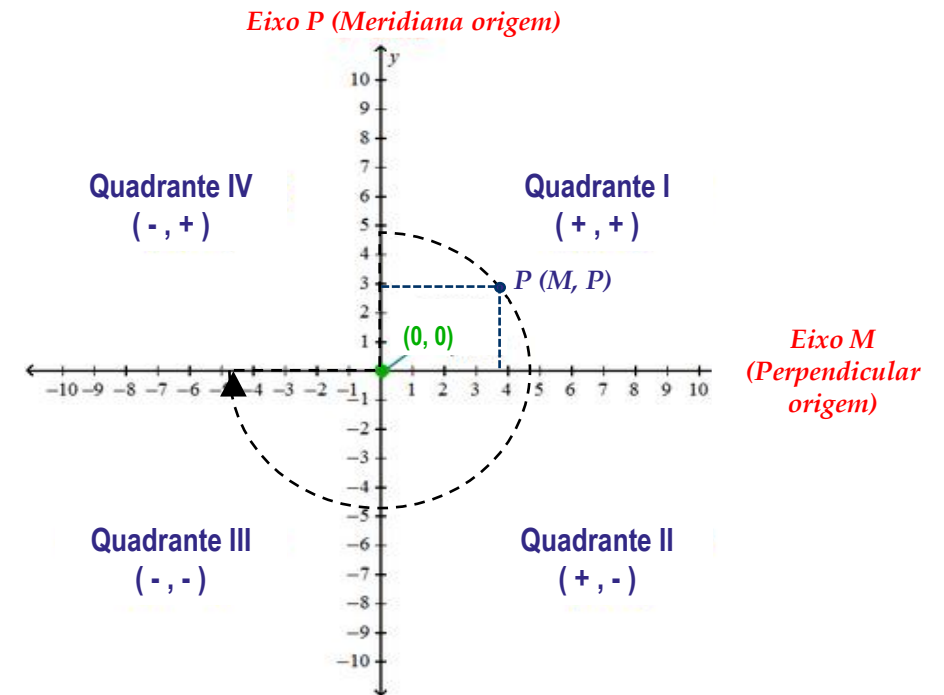
Coordenadas Cartesianas 2-D



3. Sistemas de coordenadas no plano

COORDENADAS CARTESIANAS RETANGULARES

- Em cartografia os quadrantes são numerados de 1 a 4 no sentido dos ponteiros do relógio, sendo o quadrante 1 o correspondente ao quadrante superior direito.
- As **quadrículas** representadas nas cartas são definidas como um sistema de referência cartesiano que utiliza distâncias medidas numa dada **projeção cartográfica**, sendo que um dos conjuntos de linhas retas é orientado Norte-Sul, e o outro é perpendicular a este (Este-Oeste), e que para a medição das distâncias são utilizadas **unidades métricas**.
- Nas quadrículas o eixo das ordenadas (**meridiana origem**) deve coincidir com o meridiano central da projeção; e o eixo das abcissas (**perpendicular origem**) é normal à meridiana origem num ponto designado por origem (ou **ponto central**).

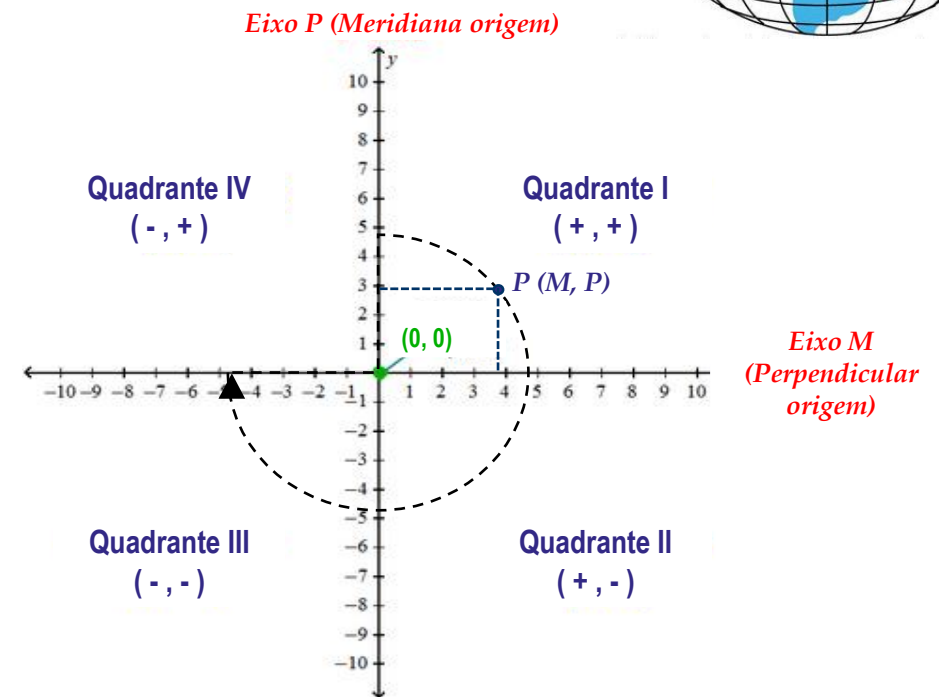
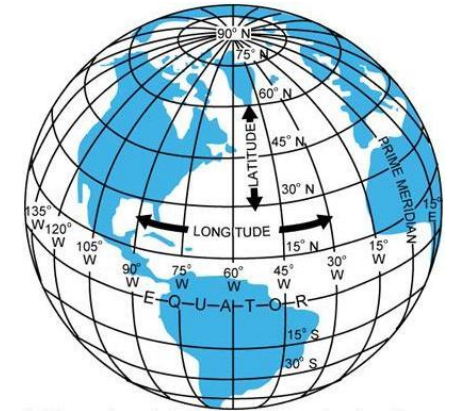


3. Sistemas de coordenadas no plano

COORDENADAS CARTESIANAS RETANGULARES

- A abcissa de um dado ponto é denominada **distância à meridiana** (*Easting*) e corresponde ao valor de M , e a ordenada é denominada **distância à perpendicular** (*Northing*) e corresponde ao valor de P .
- A ordem pela qual as coordenadas retangulares são registradas é (M, P) , o que pode ser confuso quando comparado com a ordem utilizada para as coordenadas geográficas (ϕ, λ) .

M (distância à meridiana)
 P (distância à perpendicular)
expressas em unidades métricas



3. Sistemas de coordenadas no plano

COORDENADAS CARTESIANAS RETANGULARES

- Relativamente à escolha da **origem das coordenadas retangulares**, esta deve satisfazer os requisitos da **cartografia oficial nacional** ou internacional, sendo definida a localização desse ponto, bem como a orientação dos eixos nesse ponto.
- Considerando a quadrícula adotada em Portugal Continental pela DGT e pelo CIGeoE, a sua origem encontra-se definida por um ponto à **latitude 39° 40' 05.73" N e longitude 8° 07' 59.19" W**, localizado **perto do vértice geodésico Melriça**, em Vila de Rei.
- A escolha do meridiano central a uma longitude de ~ 8° 08' W e do paralelo central à latitude de ~ 39° 40' N deve-se ao facto de a sua interseção coincidir com o **centro geométrico de Portugal Continental**.

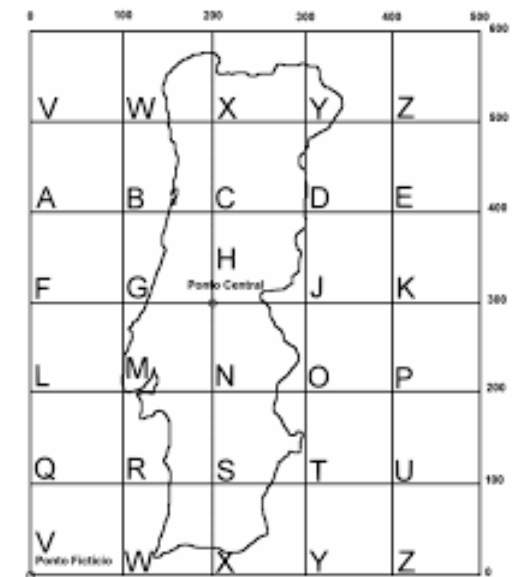
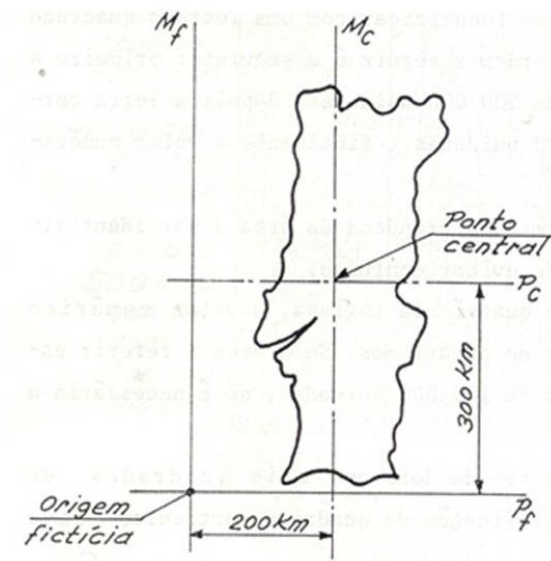
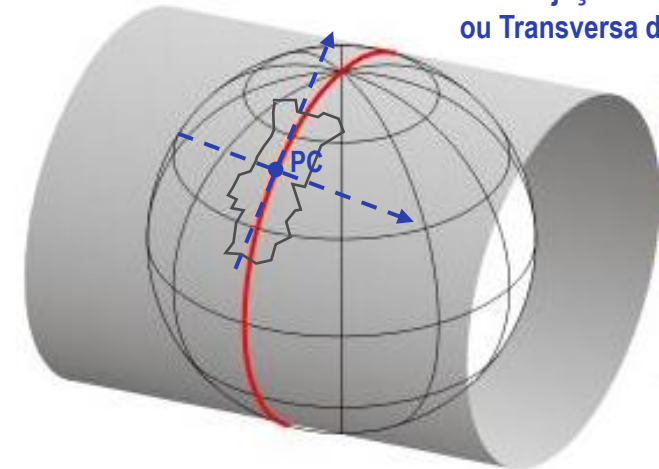


3. Sistemas de coordenadas no plano

COORDENADAS CARTESIANAS RETANGULARES

- Este ponto designado por **Ponto Central** coincide com a origem da projeção cartográfica utilizada na cartografia de Portugal Continental, sendo que o CIGeoE efetua uma translação desta origem para sudoeste do Cabo de São Vicente, Sagres, adotando uma outra origem, designada por **Ponto Fictício**, para que todos os pontos em Portugal Continental tenham coordenadas positivas.
- Na Carta Militar de Portugal, as coordenadas de um determinado ponto relativas ao Ponto Fictício são obtidas a partir das coordenadas relativas ao Ponto Central, somando a estas 200 km em *M* e 300 km em *P*, como já vimos anteriormente.

Projeção de Gauss ou Transversa de Mercator

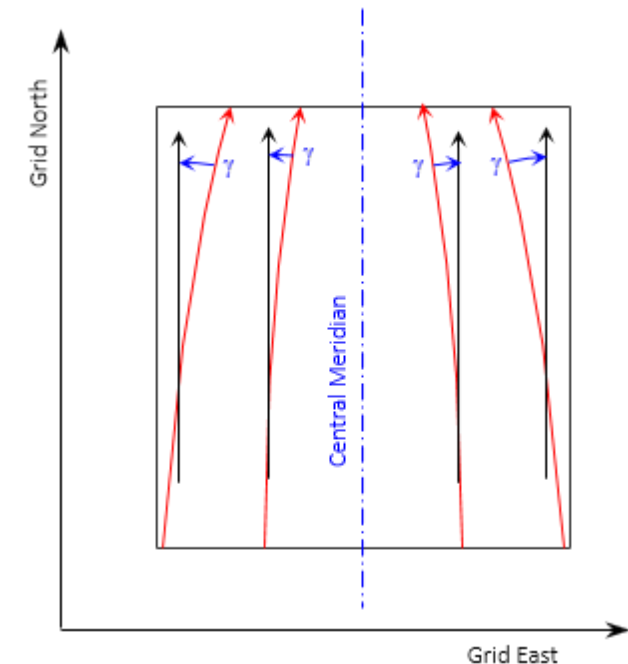
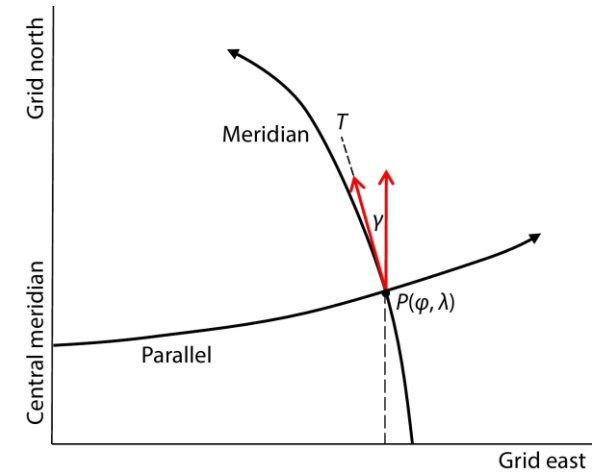


3. Sistemas de coordenadas no plano

COORDENADAS CARTESIANAS RETANGULARES

CONVERGÊNCIA DE MERIDIANOS

- Como todos os meridianos convergem na direção do polo geográfico (**Norte Verdadeiro**), as linhas verticais da quadrícula a Este e Oeste da meridiana origem não coincidem com a projeção dos meridianos.
- Tal dá origem a uma **discrepância angular**, denominada **convergência de meridianos**, γ , entre a tangente à projeção dos meridianos (**Norte Verdadeiro ou Geográfico**) e as linhas verticais da quadrícula (**Norte Cartográfico**).
- No caso de Portugal Continental, a escolha de um meridiano central a uma longitude de $\sim 8^\circ 08' W$ para origem, deve-se ao facto de este dividir o território aproximadamente ao meio segundo a direção Norte-Sul.



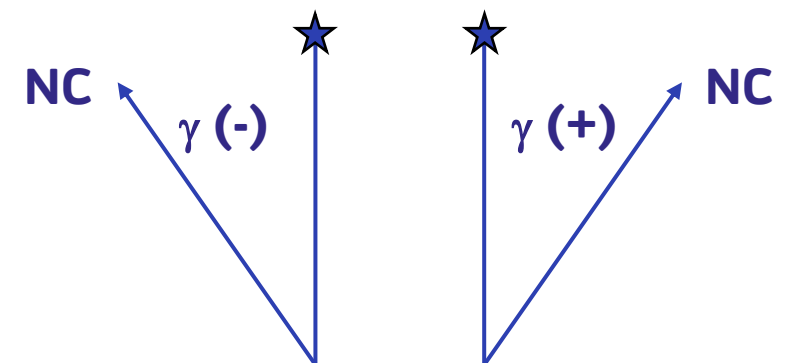
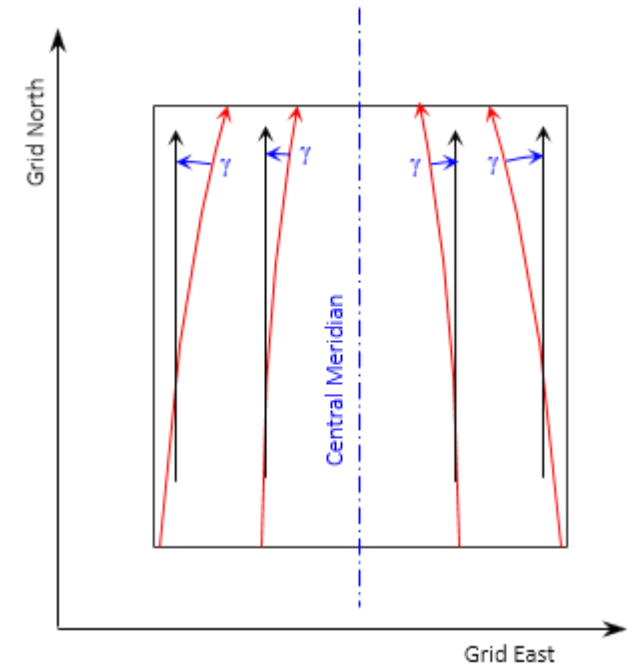
3. Sistemas de coordenadas no plano

COORDENADAS CARTESIANAS RETANGULARES

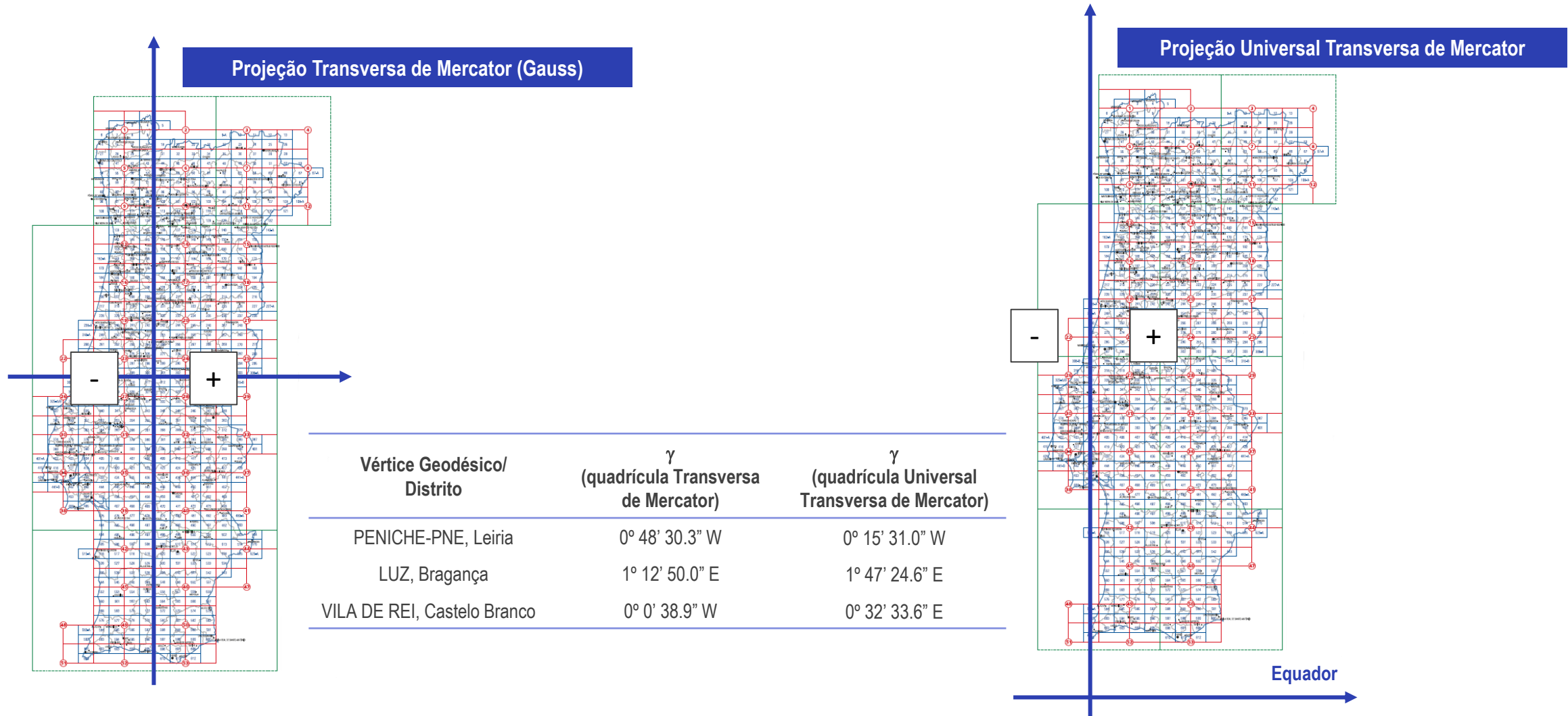
CONVERGÊNCIA DE MERIDIANOS

- A convergência de meridianos, γ , é **medida a partir do Norte Verdadeiro, positivamente para Este**, ou seja, positivamente no **sentido horário**.
- O valor de γ **varia de ponto para ponto**, crescendo em valor absoluto à medida que nos afastamos da meridiana central, podendo ser calculado através de fórmulas aproximadas, com base nas coordenadas geodésicas (ϕ, λ) de um determinado ponto.

$$\gamma = \delta\lambda \cdot \sin \phi \quad (3.01)$$

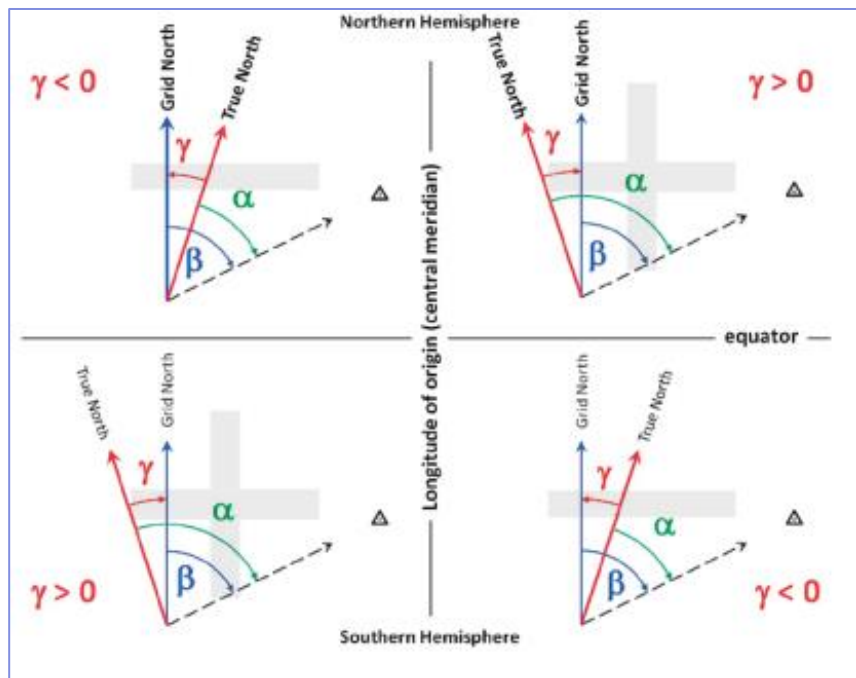


3. Sistemas de coordenadas no plano

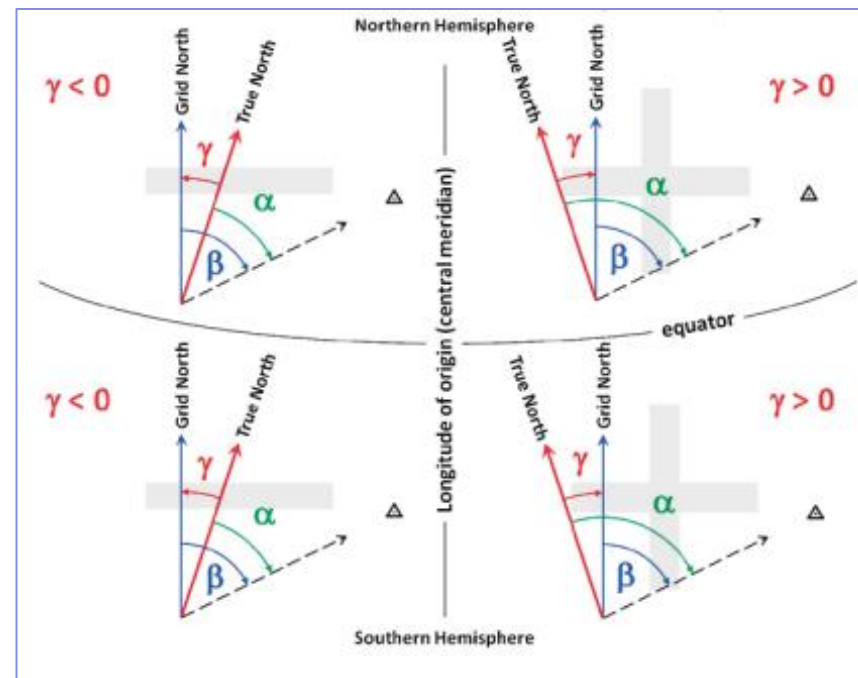


3. Sistemas de coordenadas no plano

Sinal da convergência de meridianos para projeções cilíndricas transversas (tais como a Transversa de Mercator, também designada por Gauss-Krüger)

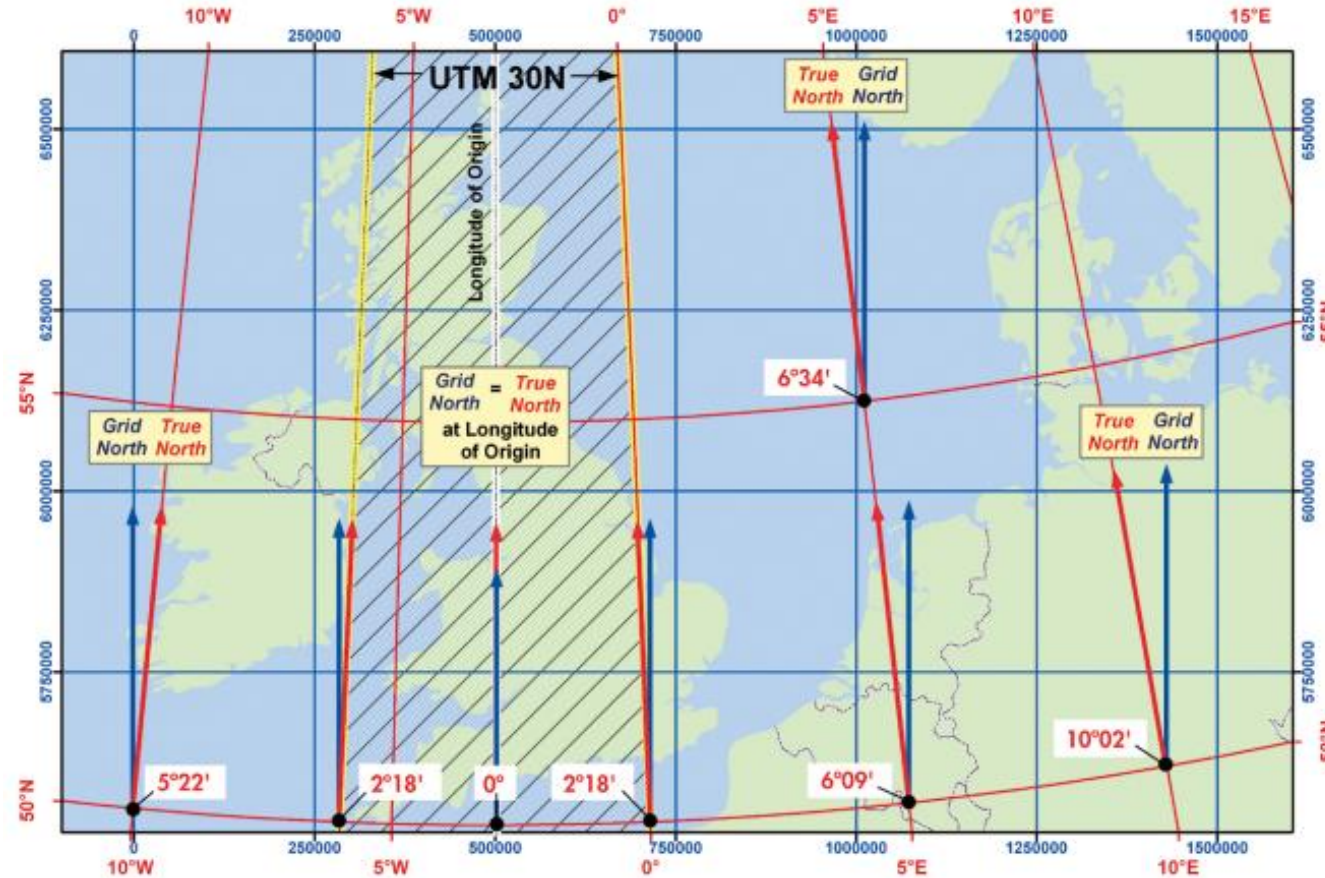


Sinal da convergência de meridianos para projeções cónicas normais no hemisfério Norte (tais como a Lambert Cónica Conforme)



3. Sistemas de coordenadas no plano

Magnitude da convergência de meridianos na projeção ETRS89/UTM Zone 30N com uma longitude de 3° W no meridiano central

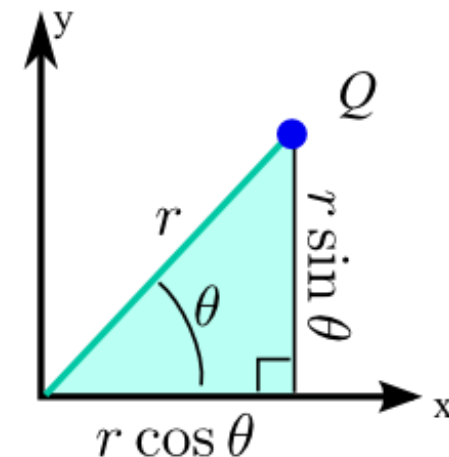
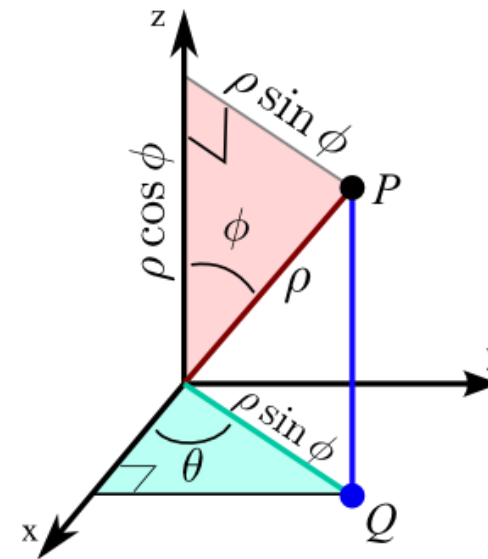


3. Sistemas de coordenadas no plano

COORDENADAS POLARES PLANAS

- As **coordenadas polares** definem a posição de um ponto através de uma distância (raio) e de um ângulo, sendo utilizado apenas um único eixo coordenado designado por eixo polar.
- A linha OQ é designada por **raio vetor**, r , e o ângulo θ é o **ângulo vetorial** que o raio vetor faz com o eixo polar, pelo que as coordenadas polares são representadas por (r, θ) .

r (distância à origem do eixo polar)
expressa em unidades métricas
 θ (ângulo entre o eixo polar e o raio vetor)
expresso em unidades angulares



3. Sistemas de coordenadas no plano

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS POLARES EM RETANGULARES E VICE-VERSA

Transformação Direta

$$x = r \cdot \cos \theta$$

(3.02)

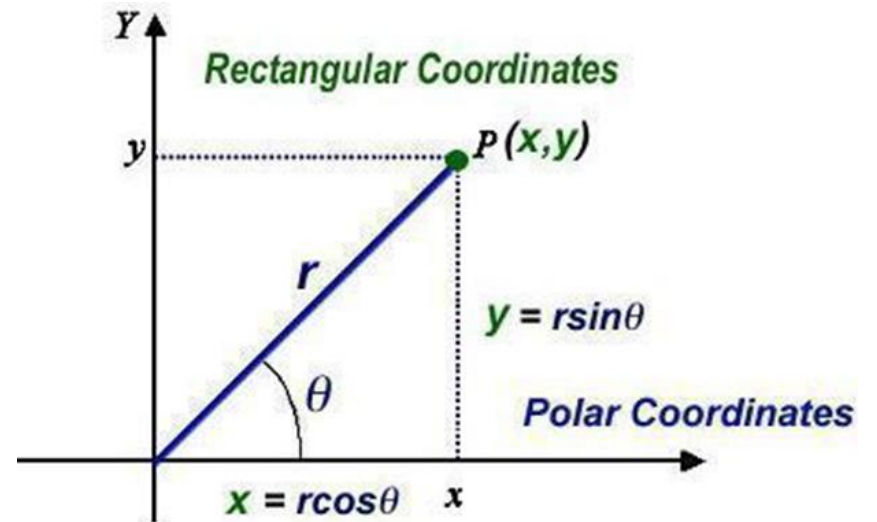
$$y = r \cdot \sin \theta$$

Transformação Inversa

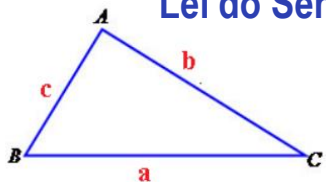
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(3.03)

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



Lei do Seno



$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

3. Sistemas de coordenadas no plano

COORDENADAS RETANGULARES VERSUS COORDENADAS POLARES

- As **coordenadas retangulares** são mais apropriadas para a construção de projeções cilíndricas, em que os meridianos e os paralelos são retilíneos e perpendiculares entre si.
- As **coordenadas polares** são mais apropriadas para a construção de projeções cónicas e azimutais, em que os meridianos são retilíneos e concorrentes num ponto, e os paralelos são circunferências concêntricas nesse mesmo ponto.



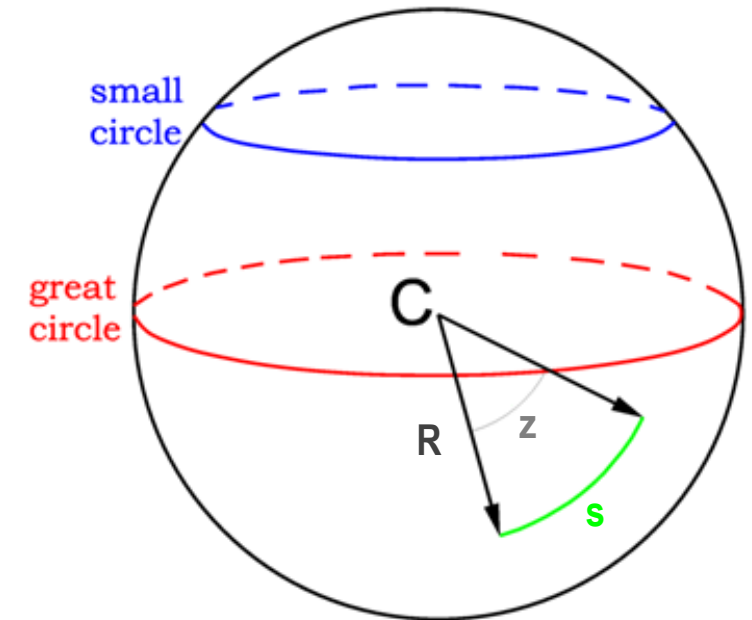
4

SISTEMAS DE COORDENADAS NA ESFERA

4. Sistemas de coordenadas na esfera

PROPRIEDADES DA ESFERA

- A esfera é um corpo sólido cuja superfície curva é equidistante do seu centro.
- Logo, qualquer esfera tem um **raio constante**, R .
- Uma linha perpendicular a um plano tangente a uma esfera num dado ponto corresponde ao raio ao centro da esfera.
- A **distância entre quaisquer dois pontos sobre uma esfera**, s , pode ser definida por um ângulo ao centro, z , e pelo raio dessa esfera, R , de acordo com a equação (2.02).
 - Considerando um raio de 6 371 km (raio médio da Terra), a uma distância de 200 km corresponde um ângulo ao centro de $\sim 1.8^\circ$.

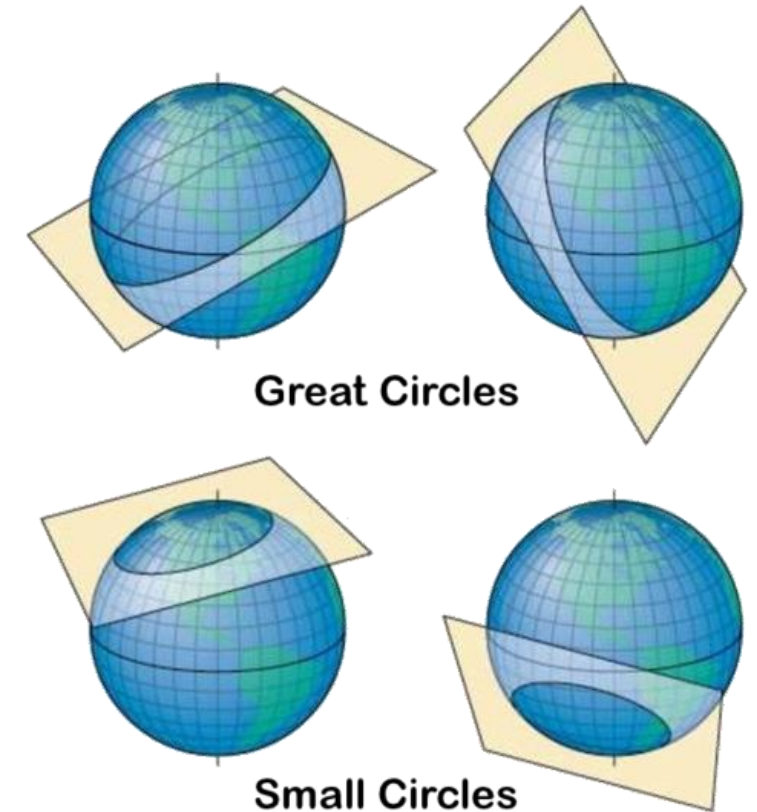


$$s = R \cdot z \quad (2.02)$$

4. Sistemas de coordenadas na esfera

CÍRCULOS MÁXIMOS E CÍRCULOS MÍNIMOS

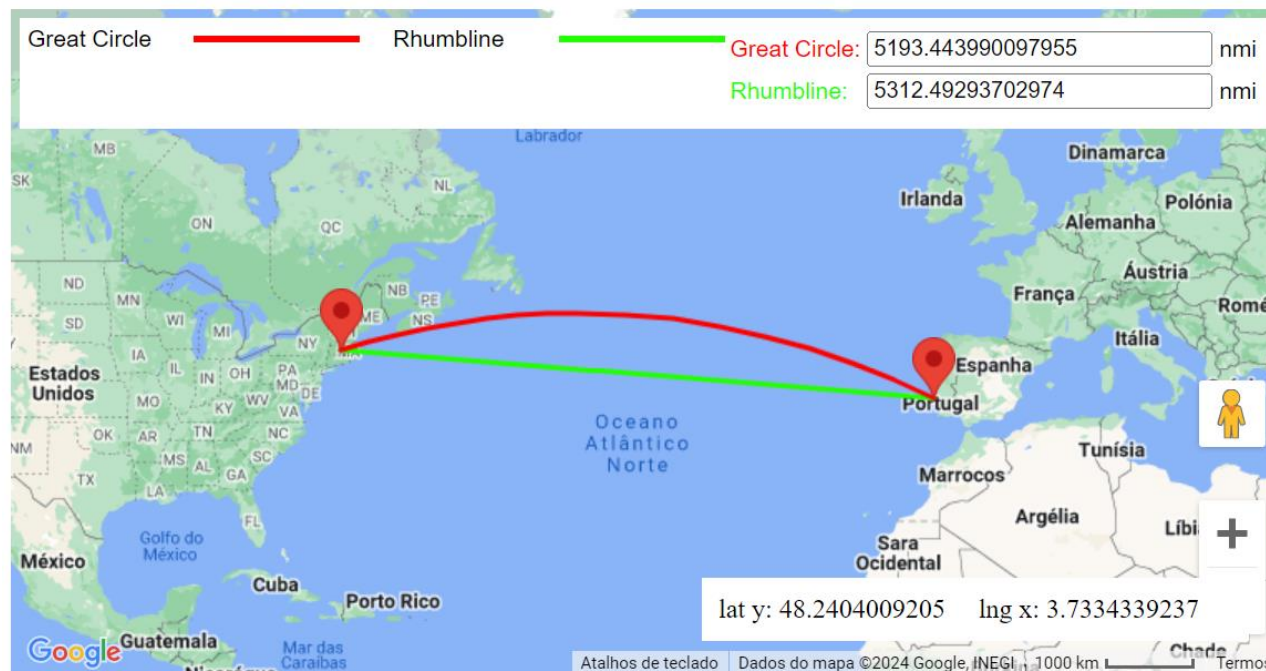
- Quando um plano intersecciona uma esfera, a secção resultante da superfície curva traçada no plano é um **círculo**, podendo distinguir-se dois tipos de círculos:
 - **Círculos Máximos** (*Great Circles*), quando o plano de interseção passa pelo centro da esfera, a secção resultante é um círculo cujo raio é o maior possível e igual ao raio da esfera.
 - **Círculos Mínimos** (*Small Circles*), quando o plano de interseção não passa pelo centro da esfera, o raio do círculo resultante é menor que o raio da esfera.



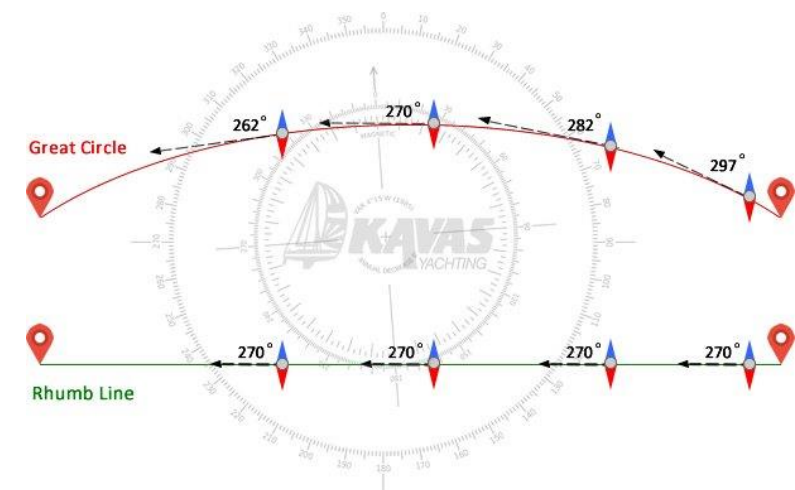
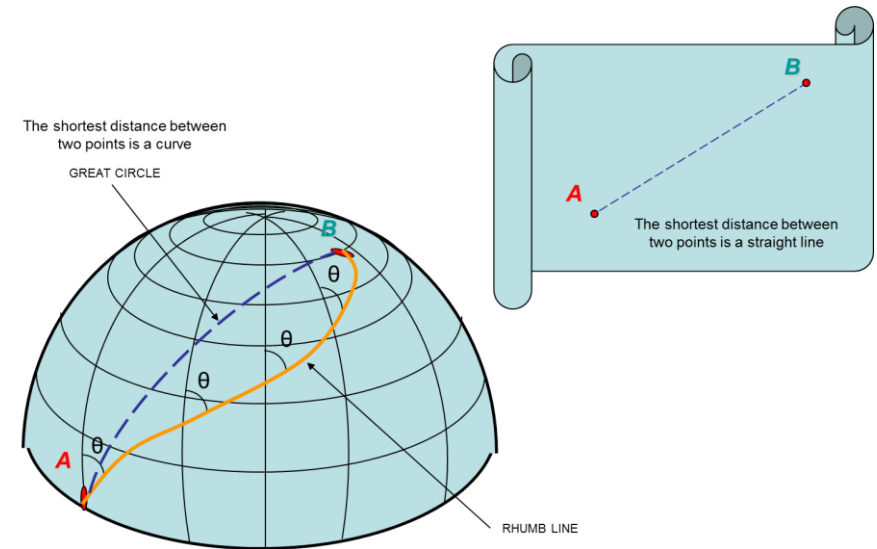
4. Sistemas de coordenadas na esfera

CÍRCULOS MÁXIMOS E CÍRCULOS MÍNIMOS

O menor arco de um círculo máximo que passe por quaisquer dois pontos é à distância mais curta entre esses pontos na superfície esférica.



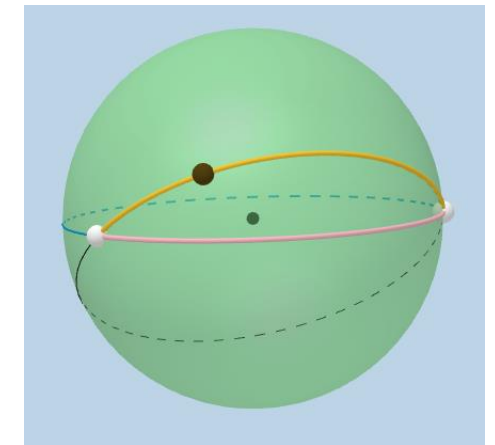
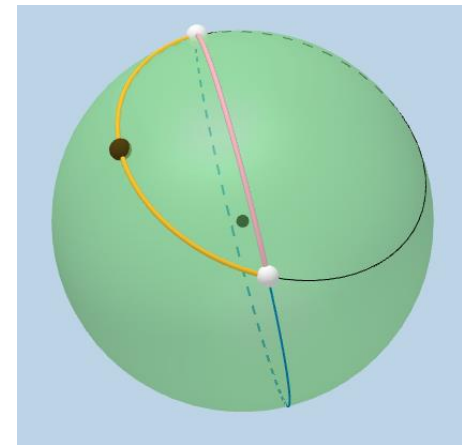
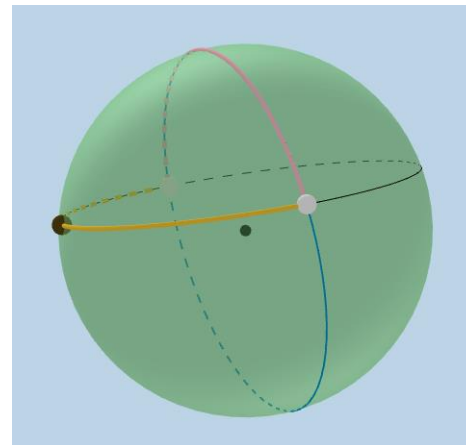
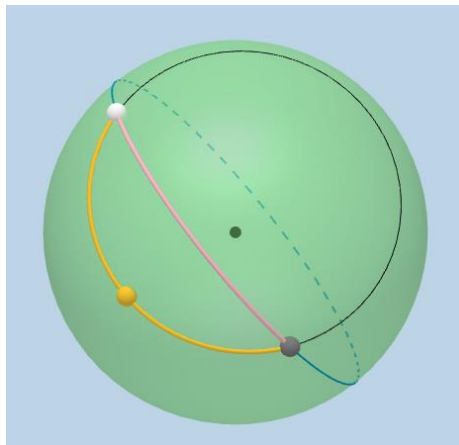
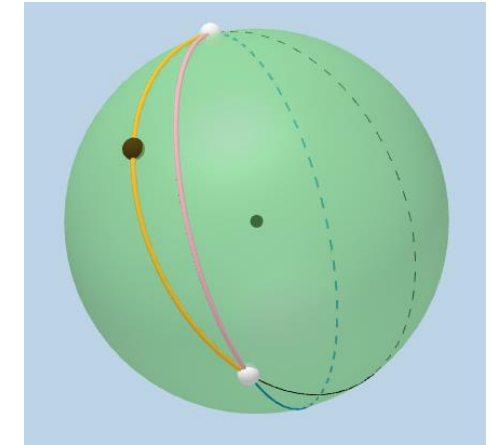
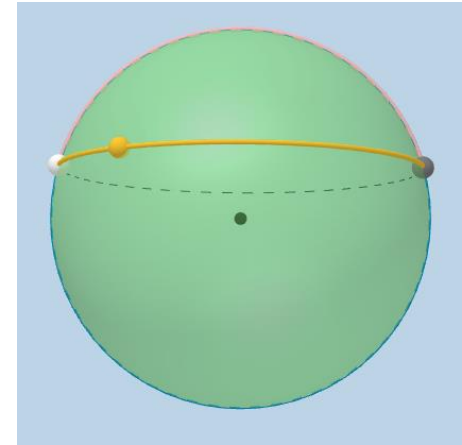
<https://www.kavas.com/blog/great-circle-and-rhumblines.html>



4. Sistemas de coordenadas na esfera

CÍRCULOS MÁXIMOS E CÍRCULOS MÍNIMOS

Os **arcos a rosa** correspondem a **partes de círculos máximos** na esfera, enquanto que os **arcos a amarelo** não.

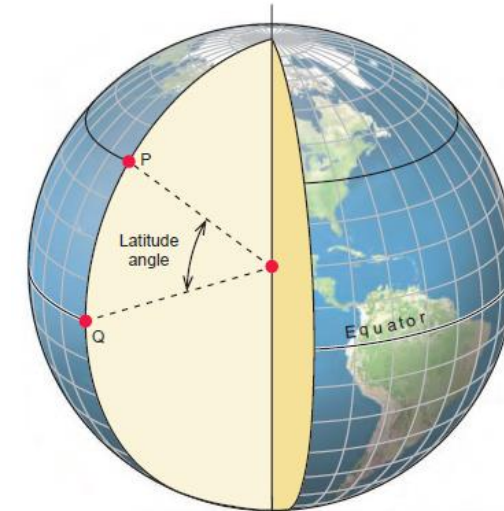


<https://www.geogebra.org/m/Gh58sVPx>

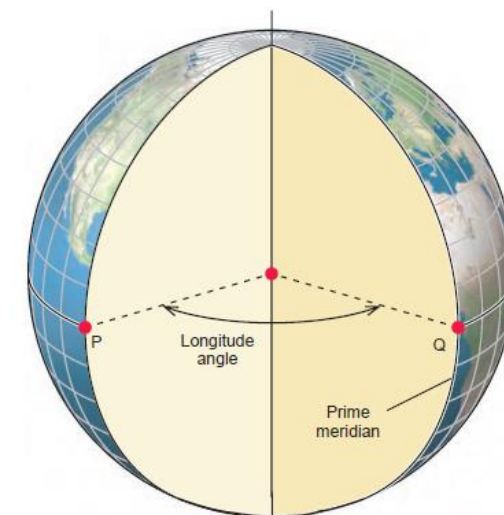
4. Sistemas de coordenadas na esfera

COORDENADAS GEOGRÁFICAS

- A posição de um dado ponto sobre uma esfera é definida exclusivamente por meio de **dois ângulos vetoriais**, sendo assim escolhidos dois planos ortogonais que se intersectam no centro da esfera.
- Um dos planos é o **plano do equador**, o qual é utilizado como referência para a medição da **latitude**, e o outro plano é o **plano do meridiano** (que passa pelos polos) escolhido como origem da contagem da **longitude**.



▲ The latitude of a parallel is the angle between a point on the parallel (P) and a point on the Equator at the same meridian (Q) as measured from the Earth's center.



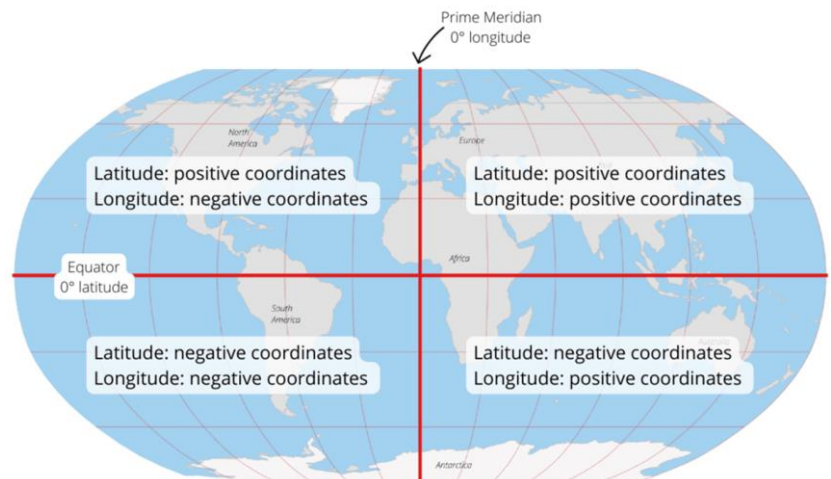
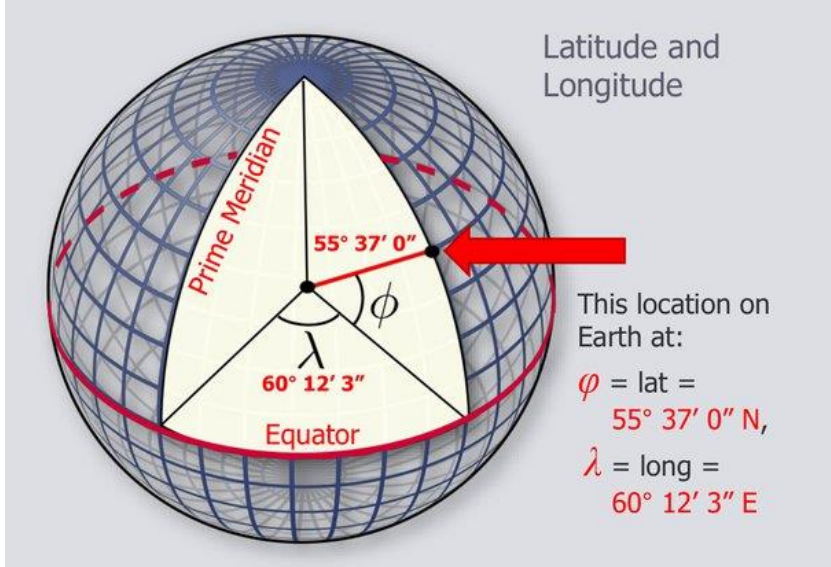
▲ The longitude of a meridian is the angle between a point on that meridian at the Equator (P) and a point on the prime meridian at the Equator (Q) as measured at the Earth's center.

4. Sistemas de coordenadas na esfera

LATITUDE E LONGITUDE

- A **latitude** de um dado ponto P é o ângulo entre a normal à esfera nesse ponto (a qual passa pelo seu centro no caso da esfera) e o plano de **Equador** (0° de latitude). As latitudes a norte do Equador têm valores positivos (+ ϕ) e as latitudes a sul do Equador têm valores negativos ($-\phi$).
- A **longitude** de um dado ponto P é o ângulo medido no plano do Equador desde o meridiano de **Greenwich** (0° de longitude) até ao meridiano que passa por esse ponto. As longitudes a este de Greenwich têm valores positivos (+ λ) e as longitudes a oeste de Greenwich têm valores negativos ($-\lambda$).

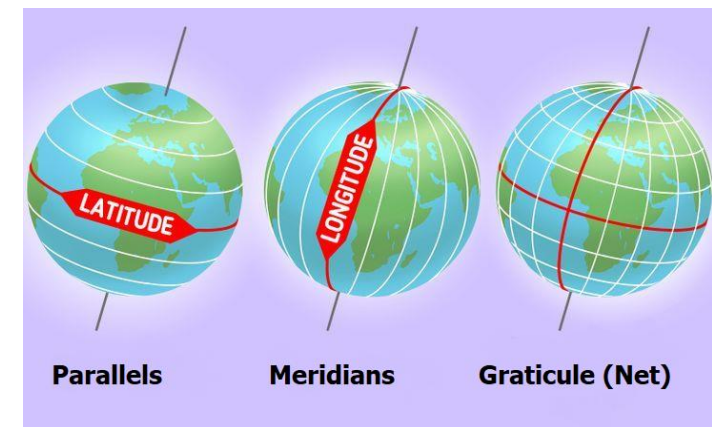
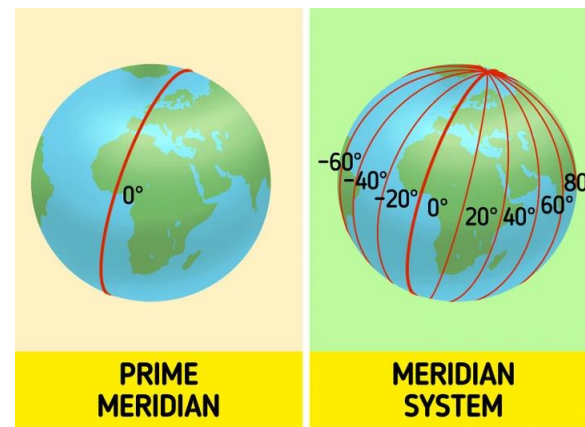
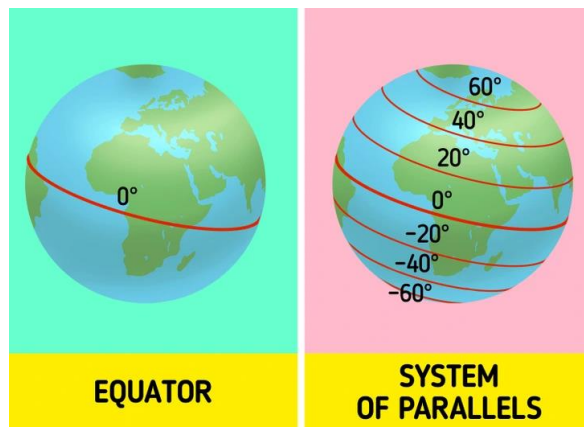
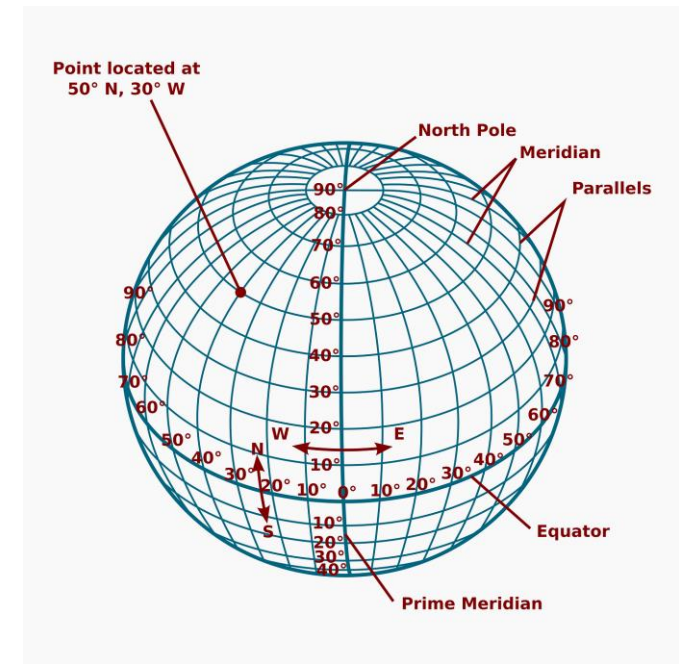
ϕ (*latitude geográfica ou geodésica*)
 λ (*longitude geográfica ou geodésica*)
expressas em unidades angulares – graus, minutos e segundos de arco



4. Sistemas de coordenadas na esfera

LATITUDE E LONGITUDE

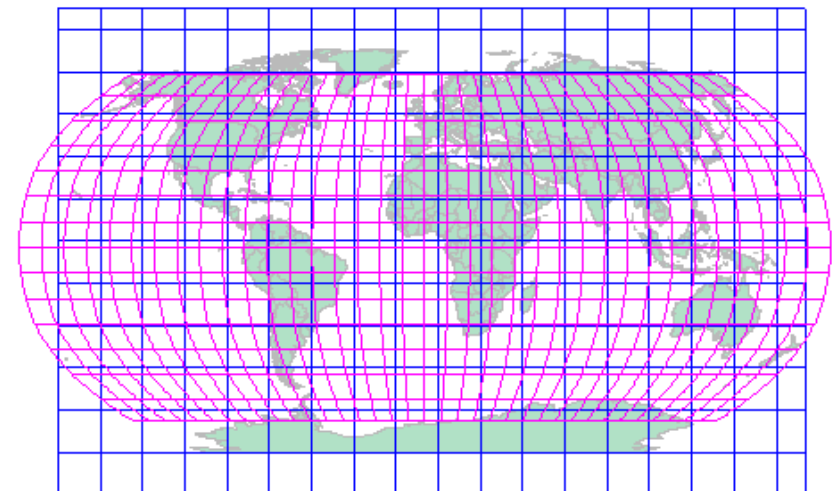
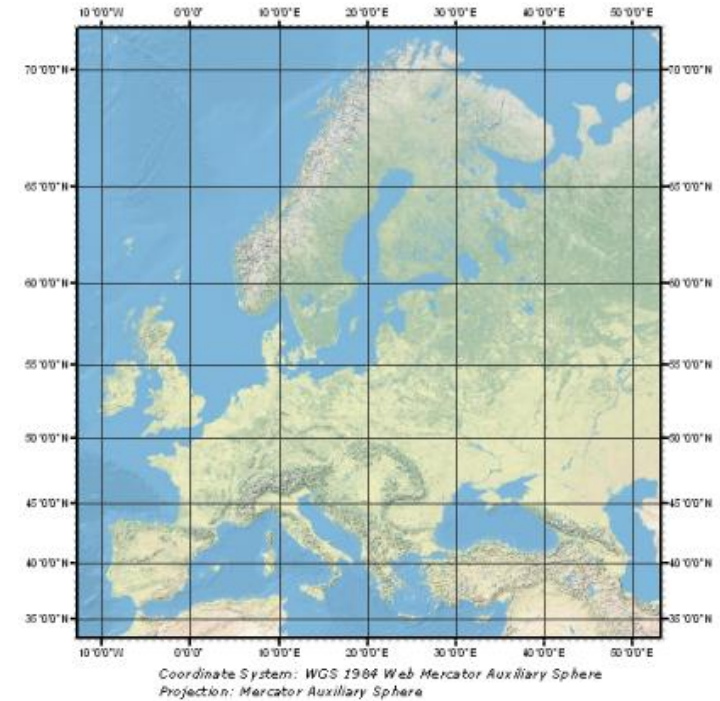
- Os **paralelos de latitude** (ou apenas **paralelos**) são linhas imaginárias definidas de oeste para este e paralelas ao equador, sendo que todos os pontos de um determinado paralelo têm a mesma **latitude**.
- Os **meridianos de longitude** (ou apenas **meridianos**) são linhas imaginárias definidas de norte para sul que passam pelos polos, sendo que todos os pontos de um determinado meridiano têm a mesma **longitude**.



4. Sistemas de coordenadas na esfera

GRELHAS OU REDES DE COODENADAS GEOGRÁFICAS

- A rede resultante dos paralelos e meridianos forma o **sistema de coordenadas geográficas**, conhecido por grelha ou rede (*graticule or net*), relativa à superfície terrestre e à representação dessa superfície numa superfície plana através de uma projeção cartográfica.
- Cada interseção desta rede corresponde a um ponto em que um paralelo ϕ interseja um meridiano λ , sendo este ponto identificado pelas suas **coordenadas geográficas** (ϕ , λ), sendo esta ordem, latitude-seguida-pela-longitude, a convenção adotada internacionalmente.

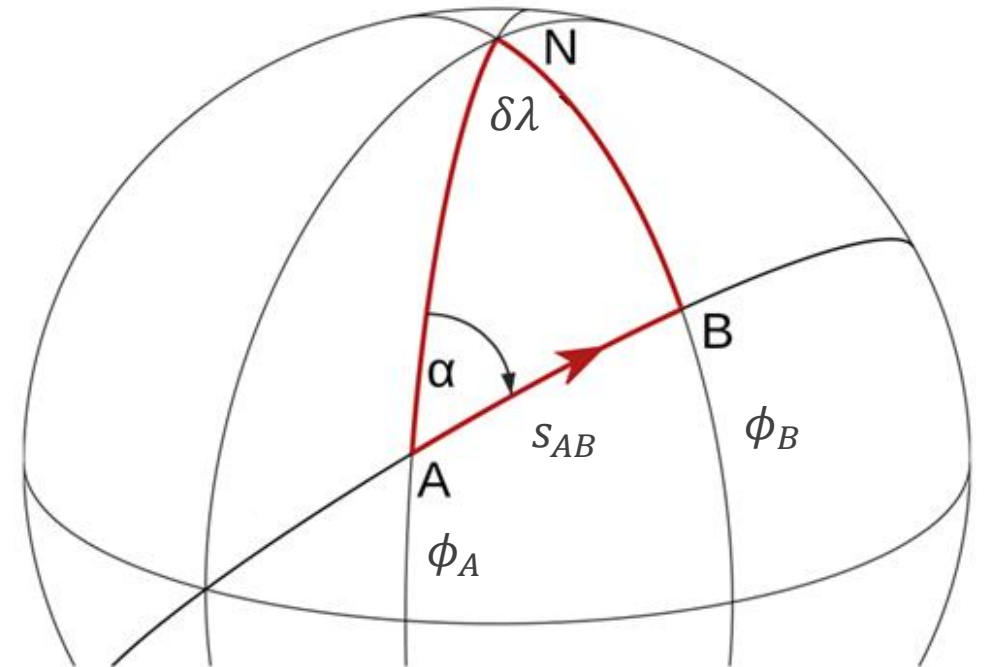


4. Sistemas de coordenadas na esfera

ÂNGULOS NA ESFERA

AZIMUTE E DIREÇÃO

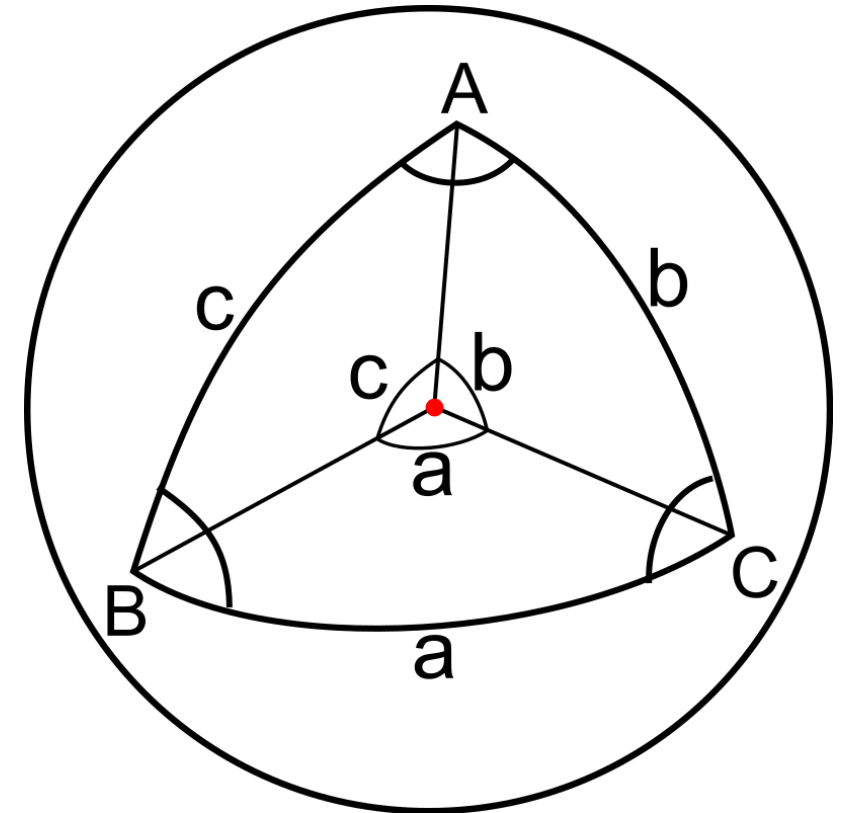
- O **azimute de uma direção** definida por quaisquer dois pontos de uma esfera é o ângulo esférico entre qualquer círculo máximo que passe por esses pontos e um meridiano.
- Na figura da direita o ângulo NAB (ou ângulo α) corresponde ao azimute da direção de A para B , **ângulo este contado a partir de uma direção de referência no sentido dos ponteiros do relógio**.
- Quando esta direção de referência é a direção do **Polo Norte** (Norte verdadeiro ou geográfico), o ângulo α corresponde ao **azimute verdadeiro ou geográfico**.



4. Sistemas de coordenadas na esfera

TRIÂNGULO ESFÉRICO

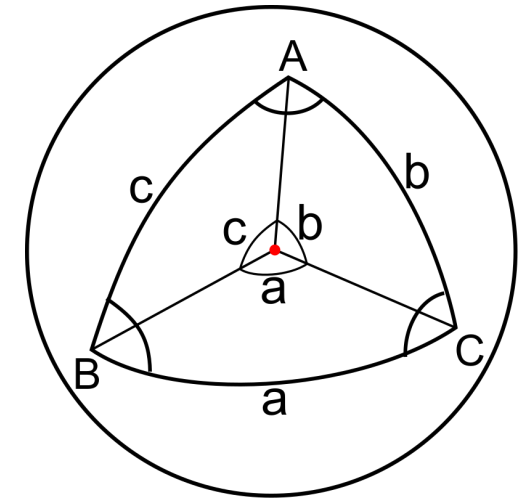
- Um **triângulo esférico** é a figura formada pela interseção de quaisquer três arcos de círculos máximos, três lados e três ângulos tal como um triângulo plano.
- Na figura da direita temos os ângulos $ACB = C$, $ABC = B$ e $BAC = A$ e os lados correspondentes $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$.
- Muitas das propriedades fundamentais da **trigonometria esférica** são equivalentes às da trigonometria plana, no entanto diferem num aspeto muito relevante, sendo que **a soma dos três ângulos internos de um triângulo esférico não é igual a 180°** mas apresenta sempre um valor superior.
- A diferença entre a soma dos três ângulos e 180° é denominada **excesso esférico** e é proporcional à área do triângulo.



4. Sistemas de coordenadas na esfera

DETERMINAÇÃO DE PARTES DESCONHECIDAS DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO

- Não sendo possível determinar o valor de um ângulo desconhecido de um triângulo esférico pela subtração da soma dos outros dois ângulos por 180° , na trigonometria esférica existem duas fórmulas fundamentais, a partir das quais todas as restantes podem ser derivadas:
 - **Fórmula Fundamental ou Lei do Cosseno**, que estabelece a relação entre um dos lados de um triângulo esférico quando os outros dois lados e o ângulo correspondente são conhecidos, sendo que, por convenção, os ângulos de um triângulo esférico não podem exceder os 180° .
 - **Lei do Seno**, que permite, conhecendo três partes (lados ou ângulos), calcular a parte desconhecida, embora apresente a desvantagem de haver uma ambiguidade no cálculo de uma parte para $\sin A = \sin(180^\circ - A)$.



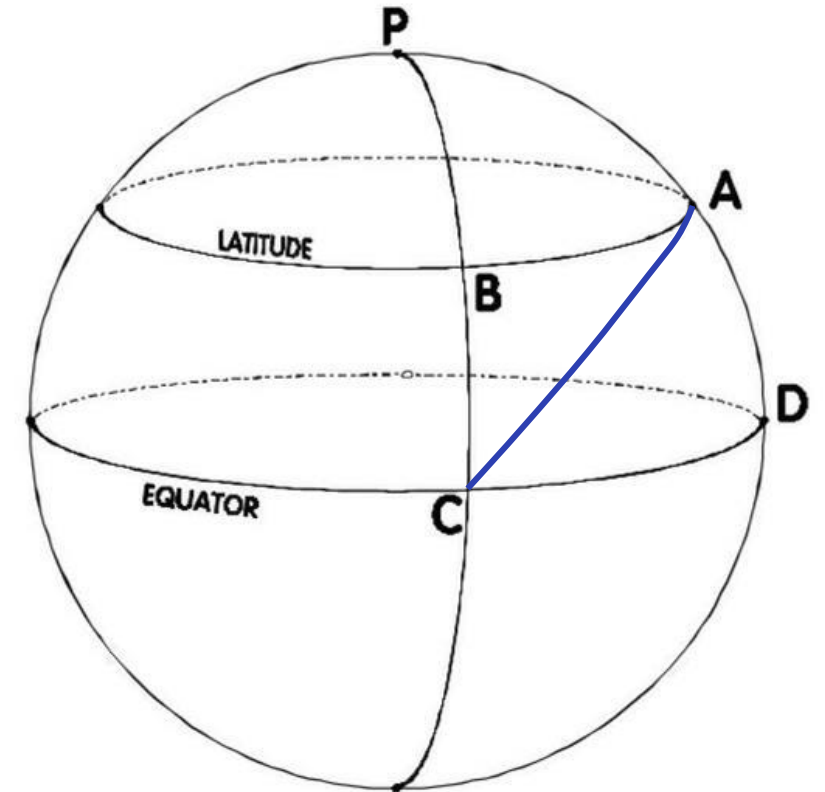
$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C\end{aligned}$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

4. Sistemas de coordenadas na esfera

COMPRIMENTOS DE ARCO NA SUPERFÍCIE TERRESTRE

- Existem três tipos de medições de arcos muito importantes no estudo das projeções cartográficas, sendo estas o:
 - COMPRIMENTO DE UM **ARCO DE MERIDIANO**, CB ou DA ;
 - COMPRIMENTO DE UM **ARCO DE PARALELO**, CD ou BA ;
 - COMPRIMENTO DE UM **ARCO DE UM QUALQUER CÍRCULO MÁXIMO**, CA .
- Os dois primeiros tipos de medições são essenciais para a derivação de fatores de escala e de distorções nas direções dos meridianos e paralelos num dado ponto P .
- O terceiro tipo de medição permite determinar a distância mais curta entre quaisquer dois pontos quando não é exigida uma grande exatidão e a aproximação esférica é suficiente.



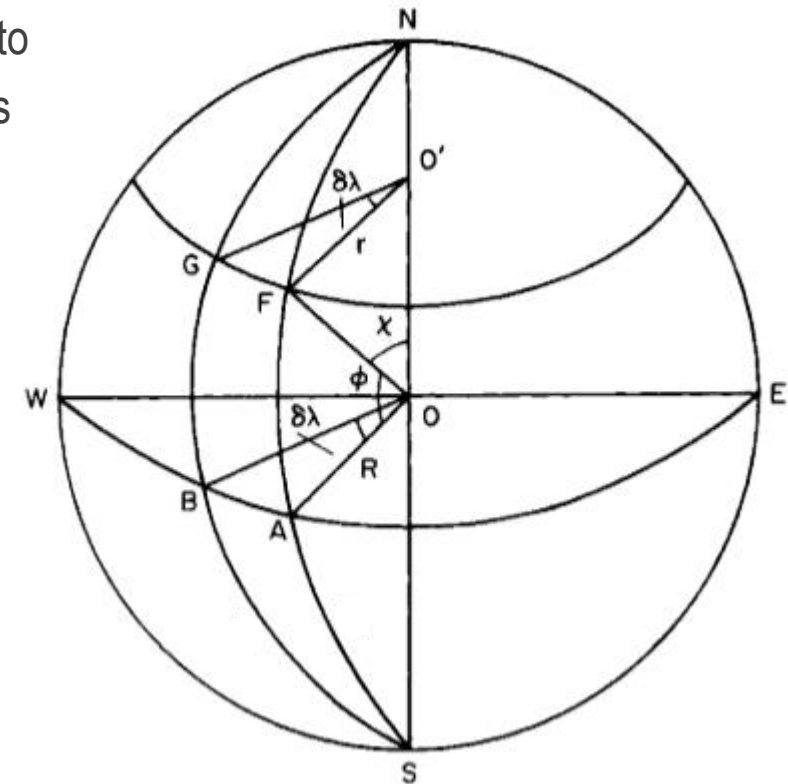
4. Sistemas de coordenadas na esfera

COMPRIMENTO DE UM ARCO DE MERIDIANO

De acordo com a equação (2.02), e com a notação na figura à direita, o comprimento de um arco de meridiano entre dois pontos $A = (\phi_A, \lambda_A)$ e $F = (\phi_F, \lambda_A)$, ambos ao longo do mesmo meridiano, é dado por:

$$s_m = R \cdot \delta\phi \quad (4.01)$$

com $\delta\phi = \phi_F - \phi_A$ e os ângulos expressos em radianos.



Relação entre o raio de um paralelo (r) e o raio da esfera (R)

$$s = R \cdot z \quad (2.02)$$

4. Sistemas de coordenadas na esfera

COMPRIMENTO DE UM ARCO DE PARALELO

Sabendo que um qualquer paralelo de latitude é um círculo mínimo, o seu raio r é por definição menor que o raio da esfera R ($r < R$), pelo que qualquer arco de um paralelo é inferior ao correspondente arco ao longo do Equador, logo, e considerando novamente a equação (2.02), tem-se que:

$$s_{Equador} = R \cdot \delta\lambda$$

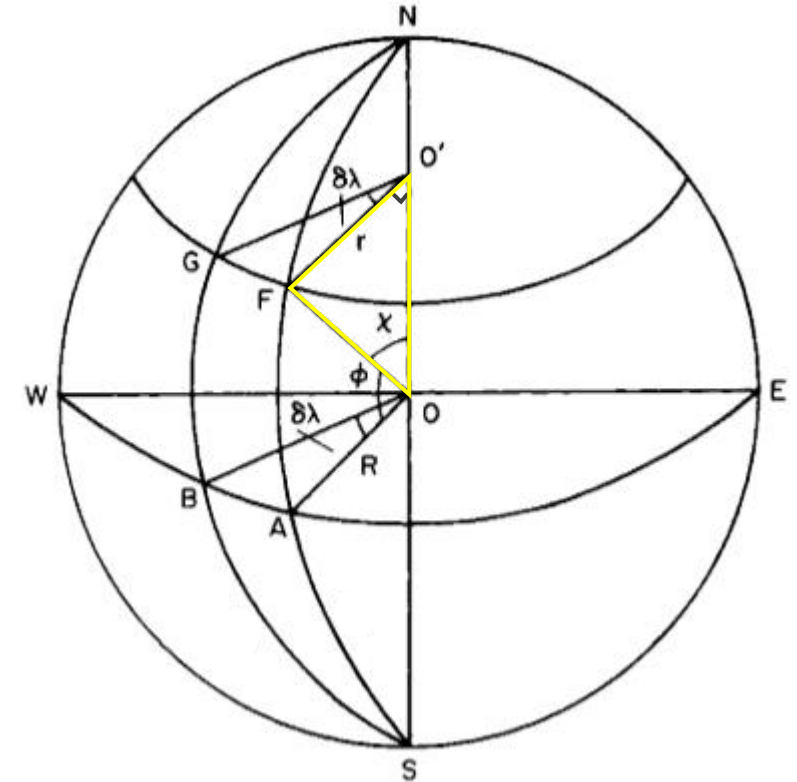
$$s_p = r \cdot \delta\lambda$$

$$r / \sin(90^\circ - \phi) = R / \sin 90^\circ \equiv r / \cos \phi = R \equiv r = R \cdot \cos \phi$$

consequentemente, o comprimento de um arco de paralelo à latitude ϕ é:

$$s_p = R \cdot \cos \phi \cdot \delta\lambda \quad (4.02)$$

com $\delta\lambda = \lambda_F - \lambda_G$ e os ângulos expressos em radianos.



Relação entre o raio de um paralelo (r) e o raio da esfera (R)

4. Sistemas de coordenadas na esfera

COMPRIMENTO DE UM ARCO DE CÍRCULO MÁXIMO

Sabendo que $A = (\phi_A, \lambda_A)$ e $B = (\phi_B, \lambda_B)$, e que dois dos lados do triângulo esférico (os dois arcos meridionais NA e NB) e um dos ângulos ($ANB = \delta\lambda$) são conhecidos, logo utilizando a Lei do Cosseno:

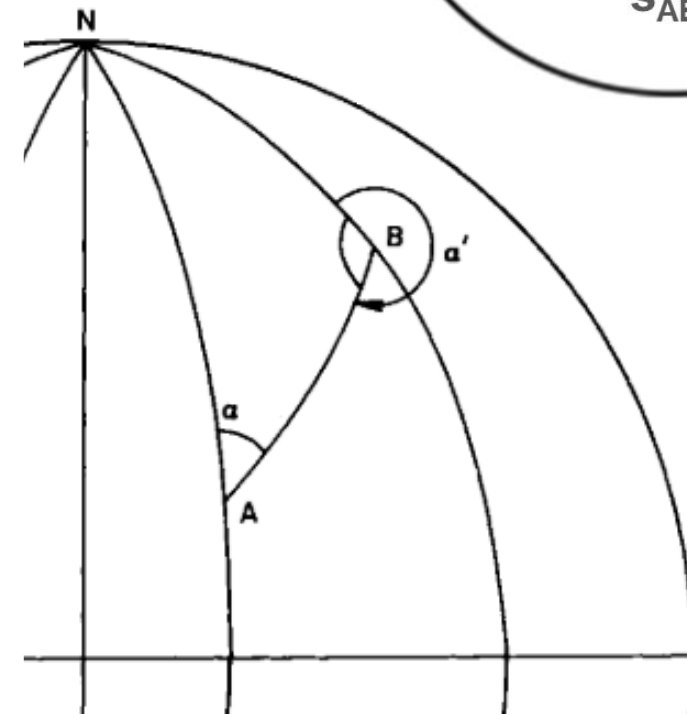
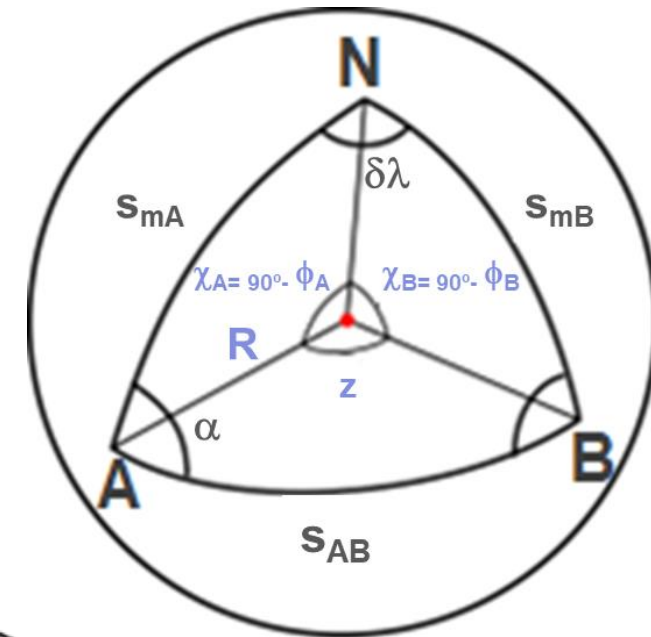
$$\cos z = \cos \chi_A \cdot \cos \chi_B + \sin \chi_A \cdot \sin \chi_B \cdot \cos \delta\lambda$$

reescrevendo em termos de latitudes ϕ em vez de colatitudes χ , tem-se que:

$$\cos z = \sin \phi_A \cdot \sin \phi_B + \cos \phi_A \cdot \cos \phi_B \cdot \cos \delta\lambda \quad (4.03)$$

logo, o comprimento do arco de meridiano calcula-se utilizando a seguinte expressão:

$$S_{AB} = R \cdot z \quad (4.04)$$



4. Sistemas de coordenadas na esfera

ÂNGULOS NA SUPERFÍCIE TERRESTRE – AZIMUTE

O valor do azimute de uma dada direção é, no caso da figura à direita, o ângulo $NAB = \alpha$, no seu caso mais simples (quadrante NE), podendo o seu valor ser calculado a partir da Lei dos Cossenos:

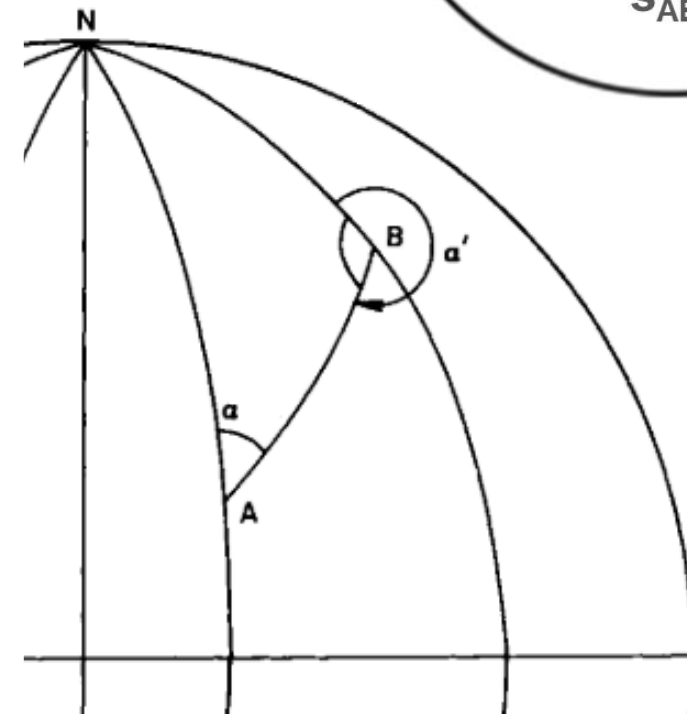
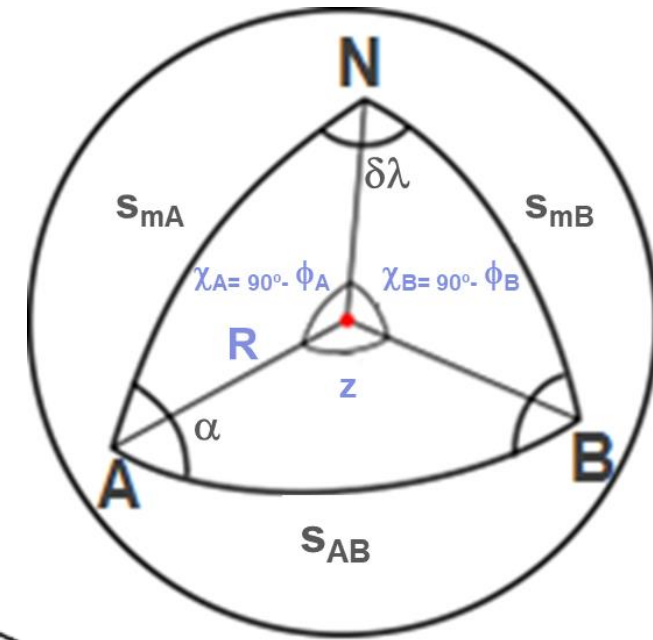
$$\cos \chi_B = \cos \chi_A \cdot \cos z + \sin \chi_A \cdot \sin z \cdot \cos \alpha$$

reescrevendo em termos de latitudes ϕ em vez de colatitudes χ , tem-se que:

$$\sin \phi_B = \sin \phi_A \cdot \cos z + \cos \phi_A \cdot \sin z \cdot \cos \alpha$$

logo, tem-se que:

$$\cos \alpha = (\sin \phi_B - \sin \phi_A \cdot \cos z) / (\cos \phi_A \cdot \sin z) \quad (4.05)$$



4. Sistemas de coordenadas na esfera

ÂNGULOS NA SUPERFÍCIE TERRESTRE – AZIMUTE

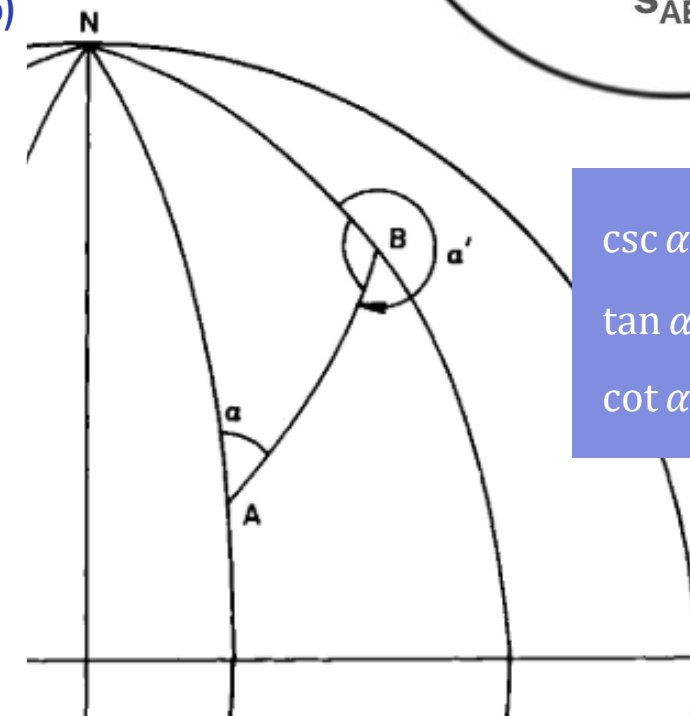
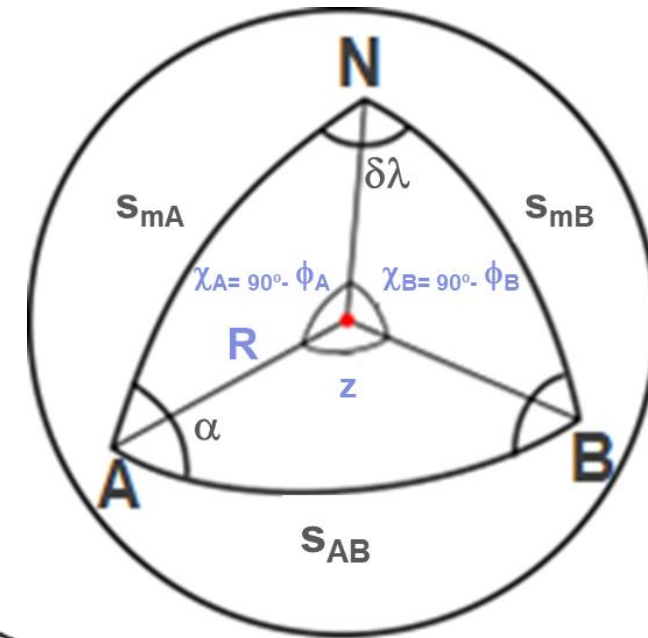
Alternativamente, o valor do azimute de uma dada direção, α , pode ser também calculado a partir da Lei dos Senos:

$$\sin \chi_B / \sin \alpha = \sin z / \sin \delta\lambda \equiv \sin \alpha = \cos \phi_B \cdot \sin \delta\lambda \cdot \csc z \quad (4.06)$$

ambas as equações (4.05) e (4.06) contêm o termo z , pelo que fazendo a razão de (4.05) por (4.06), e substituindo $\cos z$ pela equação (4.03), se obtém, após algumas manipulações algébricas, a seguinte equação:

$$\cot \alpha = \cos \phi_A \cdot \tan \phi_B \cdot \csc \delta\lambda - \sin \phi_A \cdot \cot \delta\lambda \quad (4.07)$$

a qual é independente de z .

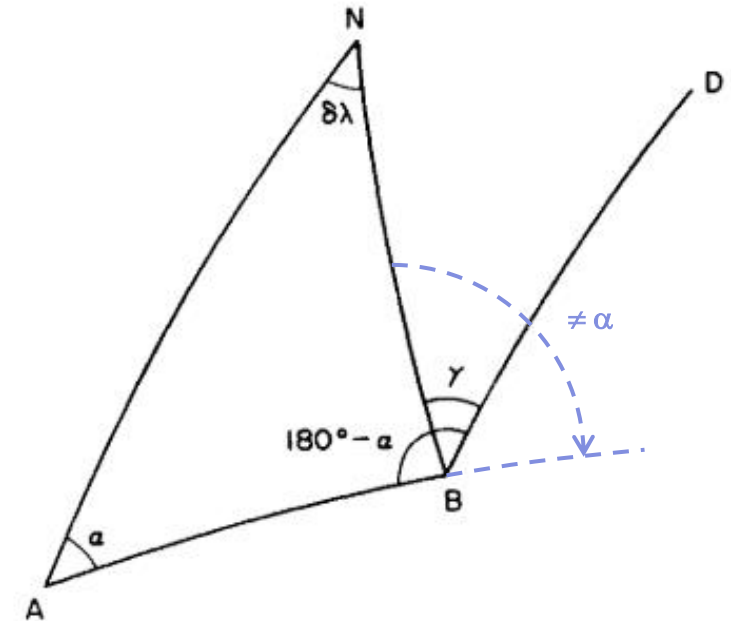


$$\begin{aligned} \csc \alpha &= 1 / \sin \alpha \\ \tan \alpha &= \sin \alpha / \cos \alpha \\ \cot \alpha &= 1 / \tan \alpha \end{aligned}$$

4. Sistemas de coordenadas na esfera

ÂNGULOS NA SUPERFÍCIE TERRESTRE – CONVERGÊNCIA DE MERIDIANOS

- O azimute de B para A , correspondente ao ângulo NBA (no sentido dos ponteiros do relógio), não é o recíproco do azimute de A para B , ou seja, o ângulo interno $NBA \neq 180^\circ - \alpha$, diferindo do ângulo γ .
- Tal resulta de **o azimute de um arco de círculo máximo variar continuamente**, devido à **convergência de meridianos**, pelo que o azimute apenas pode ser definido exclusivamente no ponto onde é medido.



Relação entre o azimute (α), o azimute inverso ($180^\circ - \alpha$) e a convergência de meridianos (γ) na esfera

4. Sistemas de coordenadas na esfera

ÂNGULOS NA SUPERFÍCIE TERRESTRE – CONVERGÊNCIA DE MERIDIANOS

- No **equador** ($\phi = 0^\circ$), o comprimento de um arco entre dois meridianos λ_A e λ_B , ambos perpendiculares ao equador, é:

$$S_{Equador} = R \cdot \delta\lambda$$

- Nos **polos** ($\phi = 90^\circ$ ou $\phi = -90^\circ$), o comprimento do arco correspondente é zero, e os mesmos meridianos interseam-se formando o ângulo esférico $\delta\lambda$:

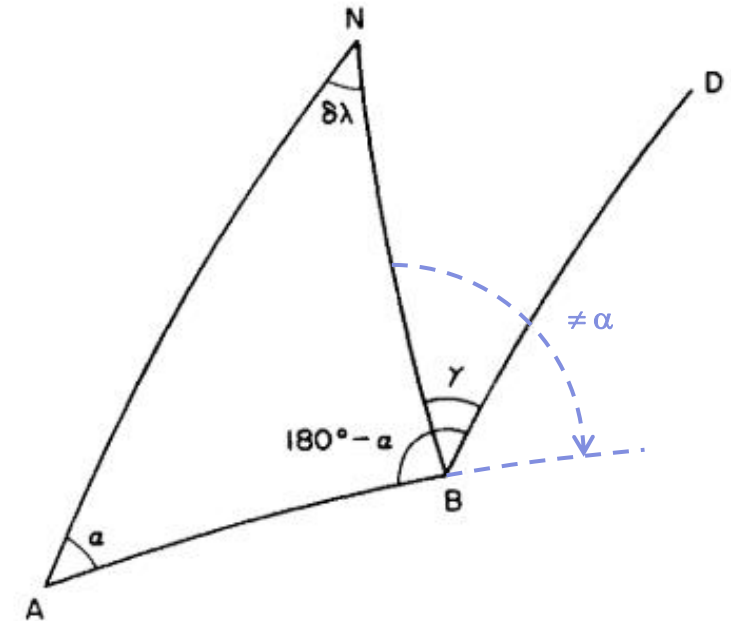
$$S_{Polos} = 0$$

O ângulo de convergência (ou **convergência de meridianos**) varia com a latitude e longitude, e o seu **valor aproximado** pode ser calculado de acordo com a equação (3.01):

$$\gamma = \delta\lambda \cdot \sin \phi \quad (3.01)$$

Para uma qualquer linha entre os paralelos ϕ_A e ϕ_B , é usual definir a convergência dos meridianos em termos da latitude média:

$$\gamma = \delta\lambda \cdot \sin[(\phi_A + \phi_B)/2] \quad (4.08)$$



Relação entre o azimute (α), o azimute inverso ($180^\circ - \alpha$) e a convergência de meridianos (γ) na esfera

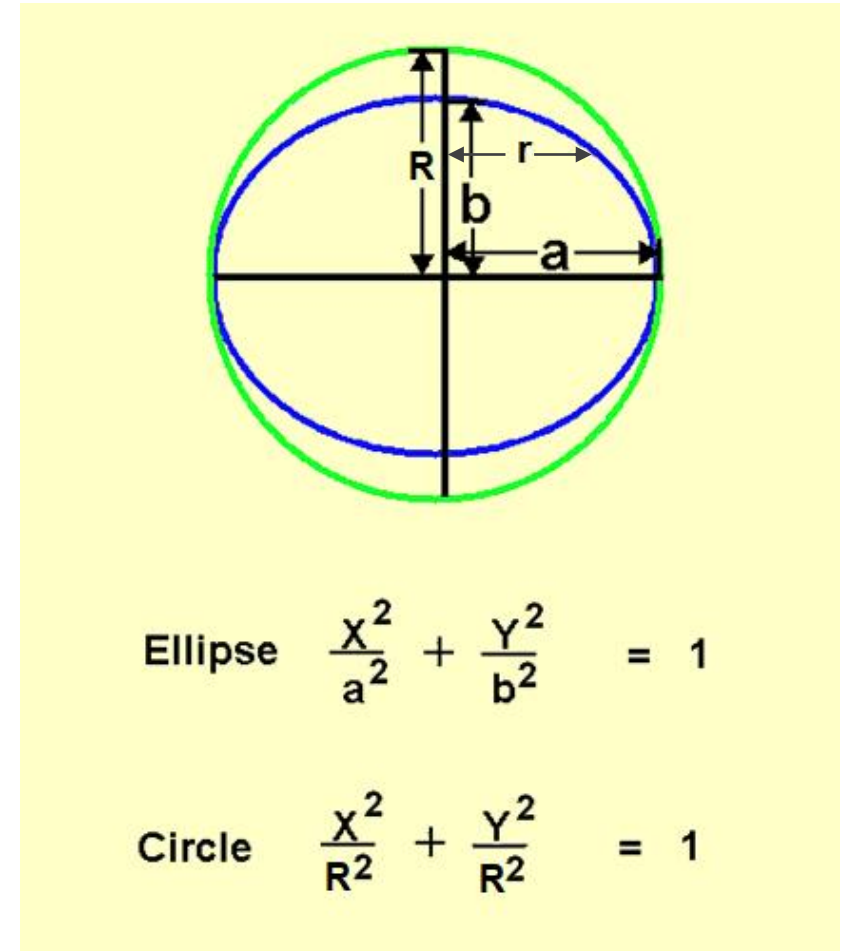
5

GEOMETRIA DO ELIPSOIDE

5. Geometria do elipsoide

PARÂMETROS DO ELIPSOIDE

- Como já mencionado, um **elipsoide de revolução** pode ser definido pelo comprimento do seu semieixo maior, a , e o seu achatamento, f , podendo usar-se também outras duas combinações:
 - Os comprimentos dos dois semieixos maior, a , e menor, b ;
 - O comprimento do semieixo maior, a , e a excentricidade, e^2 .
- Qualquer secção meridional de um elipsoide é uma **elipse**, exceto o **equador**, representado por meio de um círculo de raio igual ao semieixo maior do elipsoide, e os **paralelos de latitude** representados por círculos de raio igual a r .
- A curva que corresponde a qualquer **círculo máximo na esfera** é designada por **geodésica**.



5. Geometria do elipsoide

PARÂMETROS DO ELIPSOIDE

- Numa elipse a soma das distâncias de qualquer ponto P sobre a elipse até aos seus focos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$.
- A excentricidade da elipse é igual à razão entre CF_1/CV_1 , sendo que se do triângulo retângulo F_1V_3C se tem que:

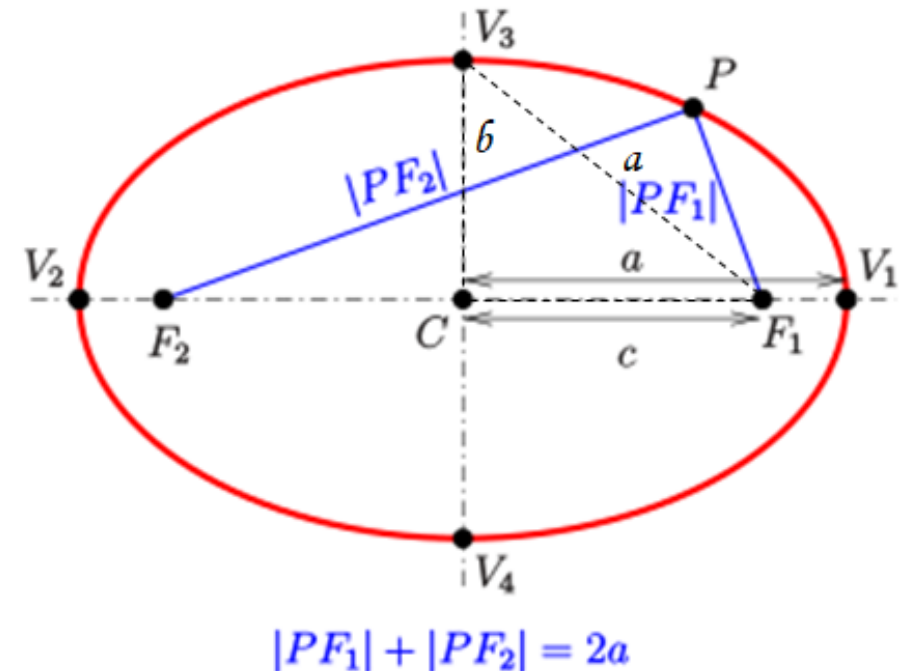
$$e = CF_1/CV_1 = c/a$$

$$CF_1 = \sqrt{(a^2 - b^2)}$$

a **excentricidade** é então calculada pela seguinte expressão:

$$e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} \quad (5.01)$$

com $0 \leq e \leq 1$ ($e = 0$ apenas no caso da circunferência).



5. Geometria do elipsoide

PARÂMETROS DO ELIPSOIDE

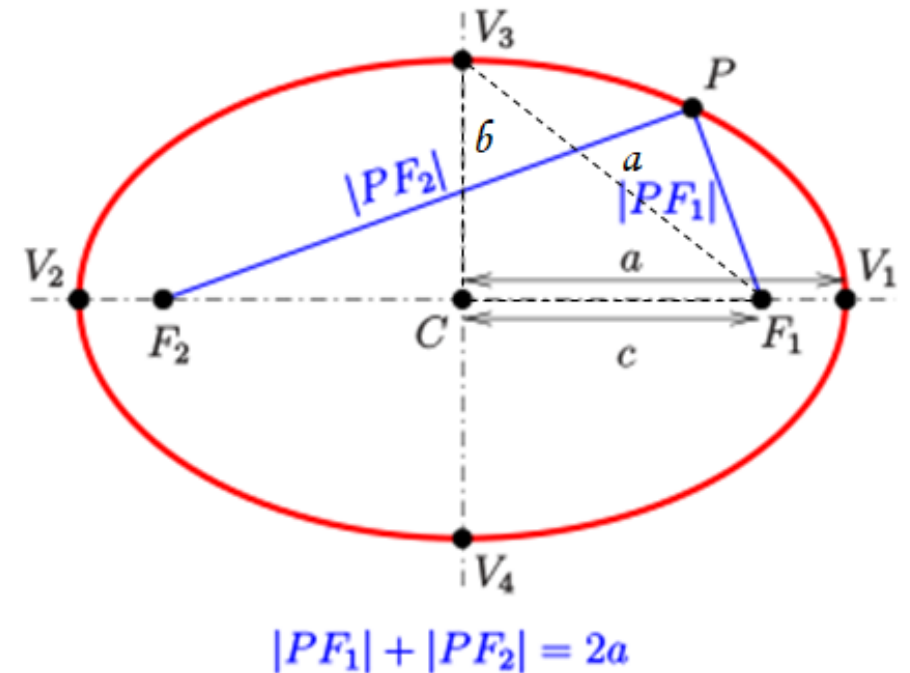
- Em geodesia e cartografia é utilizado o conceito de **achatamento do elipsoide**, f , o qual é definido como já vimos anteriormente pela equação (2.01):

$$f = \frac{(a - b)}{a}$$

sendo o seu valor muito pequeno, é usual utilizar-se o seu inverso (por exemplo, para o elipsoide WGS84 o seu valor é):

$$f = 1/298.257223563$$

- Existem, no entanto, outros parâmetros relacionados que se aplicam na geodesia e na cartografia, os quais podem ser utilizados na derivação algébrica das projeções ou para simplificação dos cálculos, tais como:



$$e^2 = 2f - f^2 \quad (5.02)$$

$$n = \frac{(a - b)}{(a + b)} \quad (5.03)$$

5. Geometria do elipsoide

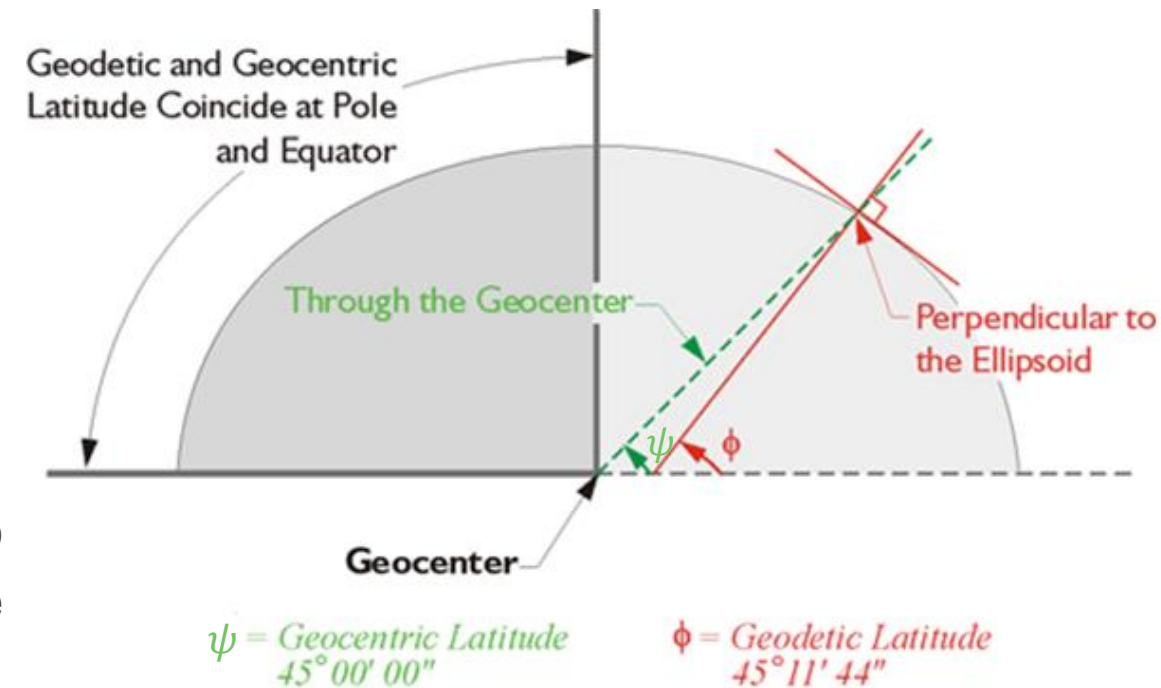
LATITUDE NO ELIPSOIDE

LATITUDE GEOCÊNTRICA, ψ

Ângulo medido no ponto de interseção dos eixos do elipsoide, entre o plano que contém o semieixo maior (plano equatorial) e a linha reta que passa por um determinado ponto na superfície do elipsoide.

LATITUDE GEODÉSICA OU GEOGRÁFICA, ϕ

Ângulo entre o semieixo maior do elipsoide e a normal ao plano tangente num qualquer ponto do elipsoide, medida no ponto de interseção da normal com o plano equatorial.



Existe uma relação entre estes dois ângulos, a qual pode ser expressa em termos da excentricidade, sendo que a diferença entre as duas definições varia com a latitude e apresenta o valor mais elevado à latitude de 45° (cerca de 12' de arco).

$$\psi = \tan^{-1}((1 - e^2) \cdot \tan \phi) = \tan^{-1}((1 - f)^2 \cdot \tan \phi)$$

(5.04)

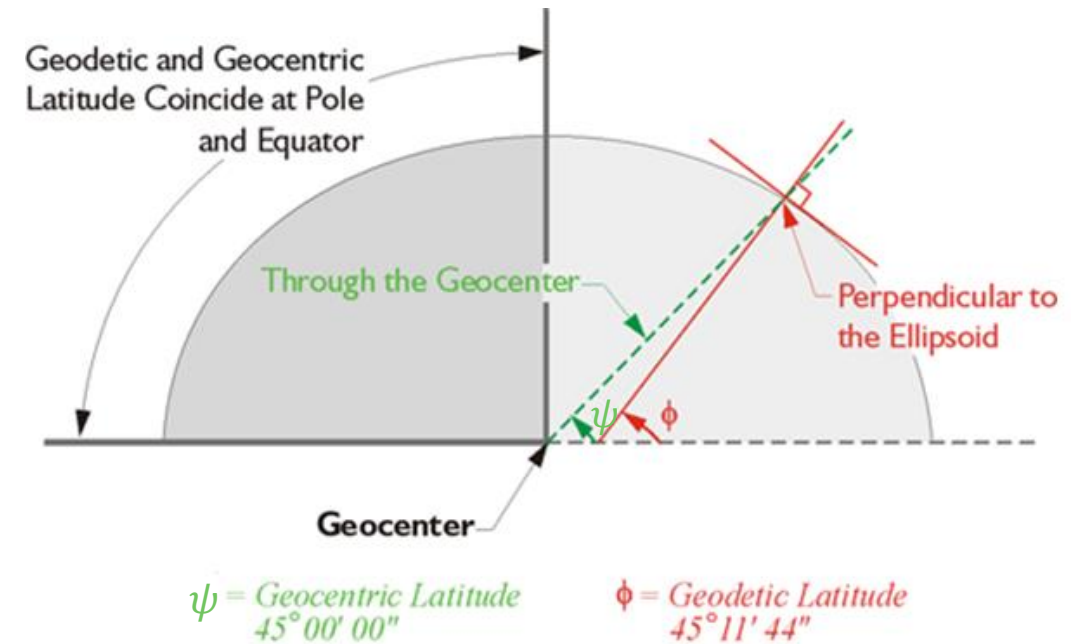
5. Geometria do elipsoide

LATITUDE NO ELIPSOIDE

- Para a maior parte das aplicações práticas, as coordenadas geográficas no elipsoide são consideradas no sistema (ϕ, λ) , em que ϕ é a latitude geográfica (ou geodésica) e λ a longitude.
- A definição de longitude no elipsoide é a mesma que a da esfera.

Latitude Geodésica, ϕ	Latitude Geocêntrica, ψ	$\phi - \psi$
30° N	29° 50' 01.09" N	9.98'
45° N	44° 48' 27.28" N	11.55' (~ 12')
60° N	59° 49' 59.07" N	10.02'

* Considerando o elipsoide WGS84 ($f= 1/298.257223563$)



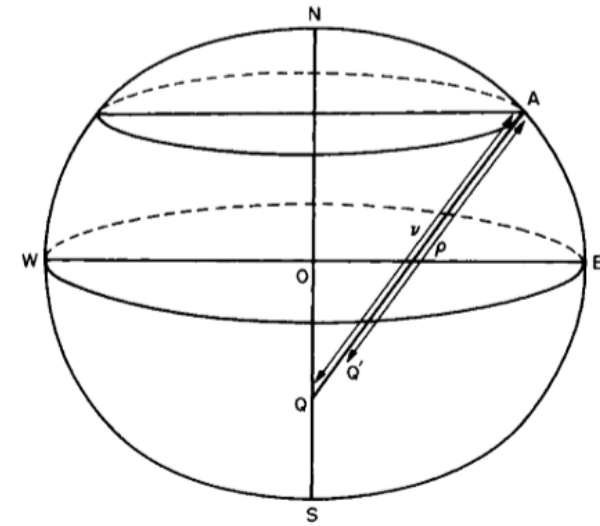
$$\psi = \tan^{-1}((1 - e^2) \cdot \tan \phi) = \tan^{-1}((1 - f)^2 \cdot \tan \phi) \quad (5.04)$$

5. Geometria do elipsoide

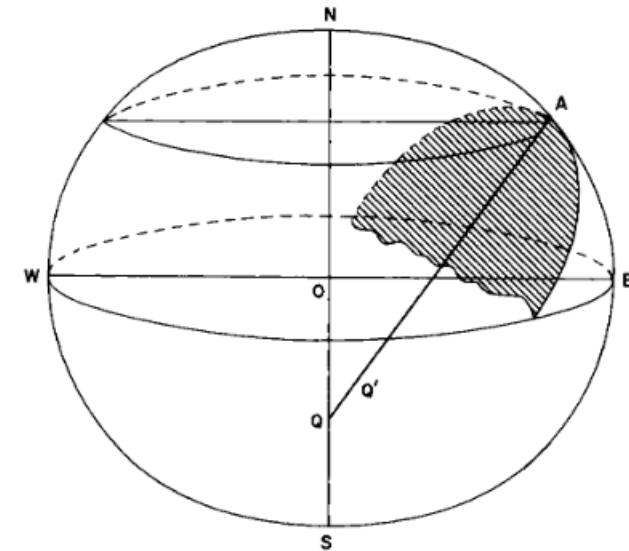
RAIOS DE CURVATURA DE UM ELIPSOIDE

O conceito de raio aplicado ao elipsoide é mais complexo do que o da esfera em dois aspetos: (1) por poderem ser definidos em qualquer ponto dois raios de curvatura, e (2) por ambos os raios variarem com a latitude, sendo estes:

- **Raio de curvatura do meridiano**, ρ , que corresponde ao raio de curvatura da elipse NAE no ponto A;
- **Raio de curvatura na primeira vertical**, ν , que corresponde ao raio da curva formada pela interseção de um plano normal à superfície em A e perpendicular ao meridiano nesse ponto (este é um conceito difícil de ilustrar numa figura plana, estando representado por um plano a sombreado na figura da direita).



Definição de raio de curvatura do meridiano (ρ) e do raio de curvatura na primeira vertical (ν) para um ponto A na superfície de um elipsoide



Secção de um elipsoide ilustrando o raio de curvatura do meridiano AQ' e do raio de curvatura na primeira vertical AQ para um ponto A, em que o plano a sombreado é perpendicular ao meridiano NAE que passa por A

5. Geometria do elipsoide

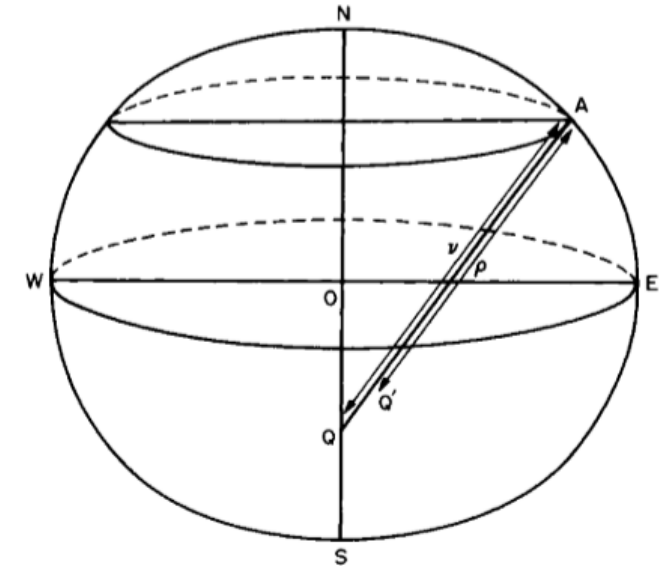
RAIOS DE CURVATURA DE UM ELIPSOIDE

Ambos os raios estão na mesma linha reta, sendo que:

- o **raio na primeira vertical**, v , é representado pela linha AQ , que termina no ponto Q no semieixo menor do hemisfério oposto ao ponto A ;
- o **raio do meridiano**, ρ , é menor tal como é mostrado por AQ' .

Estes dois raios são calculados utilizando as expressões que se encontram à direita, e têm as seguinte propriedades:

- independentemente da latitude $v \geq \rho$;
- nos polos, $\rho = v$, apresentando ambos os seus valores máximos;
- no equador, $v = a$, apresentando ambos os seus valores mínimos;
- à latitude $\sim 55^\circ$, $\rho = a$;
- à latitude $\sim 35^\circ$, $\rho = b$.



Definição de raio de curvatura do meridiano (ρ) e do raio de curvatura na primeira vertical (v) para um ponto A na superfície de um elipsoide

$$\rho = [a \cdot (1 - e^2)] / [1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi]^{3/2} \quad (5.05)$$

$$v = a / [1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi]^{1/2} \quad (5.06)$$

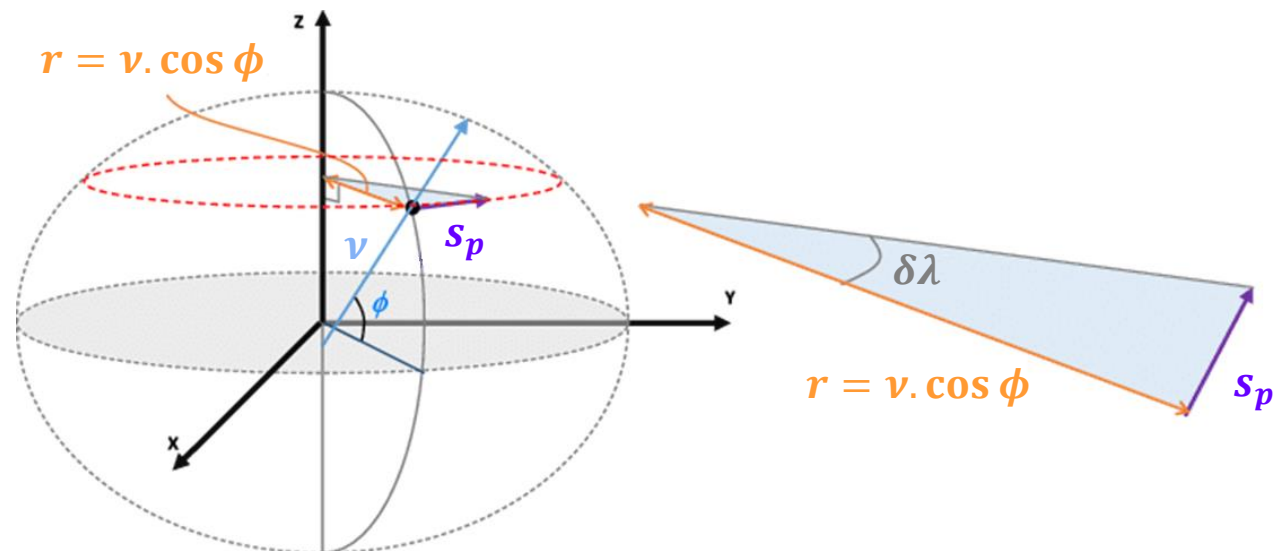
5. Geometria do elipsoide

COMPRIMENTOS DE ARCO NO ELIPSOIDE

Os dois casos mais simples, que correspondem ao **comprimento de um arco no equador** e ao **comprimento de um arco de um qualquer paralelo**, resultam de ambos serem no elipsoide de revolução arcos circulares, pelo que é ainda aplicável a geometria simples da esfera, bastando substituir nas expressões o respetivo raio de curvatura, obtendo-se:

$$s_{Equador} = a \cdot \delta\lambda \quad (5.07)$$

$$s_p = v \cdot \cos \phi \cdot \delta\lambda \quad (5.08)$$



$$s_{Equador} = R \cdot \delta\lambda$$

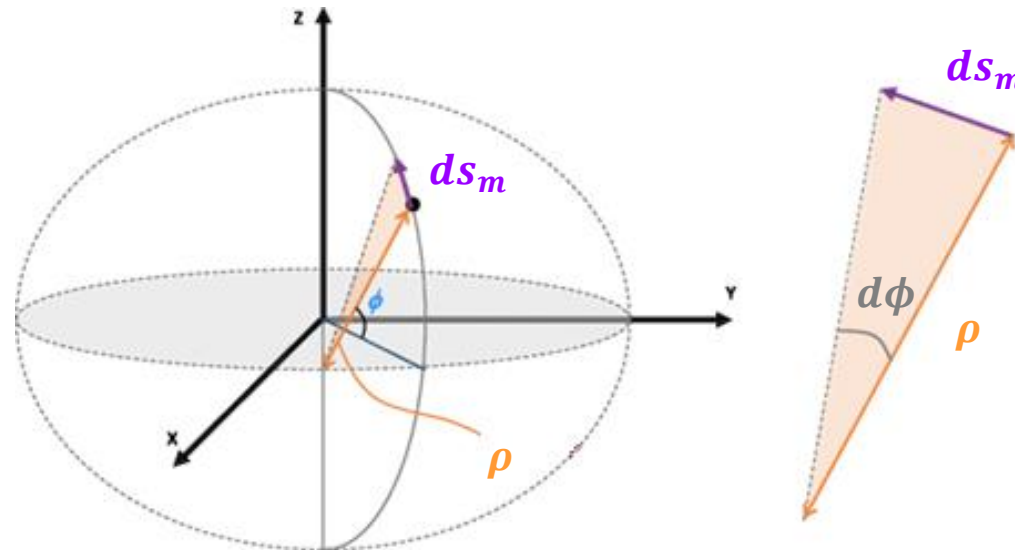
$$s_p = R \cdot \cos \phi \cdot \delta\lambda \quad (4.02)$$

5. Geometria do elipsoide

COMPRIMENTO DE UM ARCO DE MERIDIANO

- O **arco de meridiano** é mais difícil de calcular, dado que o raio de curvatura do meridiano, ρ , varia continuamente com a latitude.
- Como tal, é necessário determinar inicialmente o comprimento de um arco infinitamente pequeno num dado ponto, e de seguida ir adicionando todos os comprimentos de todos os elementos infinitamente pequenos em todos os pontos que constituem o arco, sendo que para cada arco infinitamente pequeno se tem que:

$$ds_m = \rho \cdot d\phi \quad (5.09)$$



5. Geometria do elipsoide

COMPRIMENTO DE UM ARCO DE MERIDIANO

Para definir o comprimento de toda a curva desde o equador até um ponto de latitude ϕ , é necessário integrar todos os arcos infinitamente pequenos que constituem a totalidade do arco, pelo que o **comprimento do arco de meridiano**, m , pode ser escrito como integral, logo tem-se que:

$$m = \int_{\phi=0}^{\phi=\phi_1} ds_m = \int_{\phi=0}^{\phi=\phi_1} \rho \cdot d\phi \quad (5.10)$$

substituindo ρ pelo sua expressão em (5.05), temos que:

$$m = \int_{\phi=0}^{\phi=\phi_1} [a \cdot (1 - e^2)] / [1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi]^{3/2} \cdot d\phi \quad (5.11)$$

após integrar esta expressão, uma das versões simplificadas da equação que se pode usar para cálculo do arco de meridiano é:

$$m = a \cdot (1 - e^2) \cdot \left\{ A \cdot (\phi - \phi_0) - \frac{B}{2} \cdot (\sin 2\phi - \sin 2\phi_0) + \frac{C}{4} \cdot (\sin 4\phi - \sin 4\phi_0) - \frac{D}{6} \cdot (\sin 6\phi - \sin 6\phi_0) + \frac{E}{8} \cdot (\sin 8\phi - \sin 8\phi_0) - \frac{F}{10} \cdot (\sin 10\phi - \sin 10\phi_0) \right\}$$

(5.12)

com as latitudes expressas em radianos.

5. Geometria do elipsoide

COMPRIMENTO DE UM ARCO DE MERIDIANO

Na equação (5.12), os coeficientes A , B , C , D , E , e F são expressos em termos da excentricidade do elipsoide utilizado, sendo calculados pelas respectivas equações:

$$A = 1 + \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{45}{64} \cdot e^4 + \frac{175}{256} \cdot e^6 + \frac{11025}{16384} \cdot e^8 + \frac{43659}{65536} \cdot e^{10} + \dots$$

$$B = \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{15}{16} \cdot e^4 + \frac{525}{512} \cdot e^6 + \frac{2205}{2048} \cdot e^8 + \frac{72765}{65536} \cdot e^{10} + \dots$$

$$C = \frac{15}{64} \cdot e^4 + \frac{105}{256} \cdot e^6 + \frac{2205}{4096} \cdot e^8 + \frac{10395}{16384} \cdot e^{10} + \dots$$

$$D = \frac{35}{512} \cdot e^6 + \frac{315}{2048} \cdot e^8 + \frac{31185}{131072} \cdot e^{10} + \dots$$

$$E = \frac{315}{16384} \cdot e^8 + \frac{3465}{65536} \cdot e^{10} + \dots$$

$$F = \frac{3465}{131072} \cdot e^{10} + \dots$$

(5.13)

Coefficientes	GRS80	WGS84
A	1.0050525018130885	1.0050525017882057
B	0.005063108622226112	0.005063108597238748
C	1.0627590263346986e-05	1.0627590158711839e-05
D	2.0820378571674883e-08	2.0820378264448823e-08
E	3.932371371130378e-11	3.9323712938028466e-11
F	3.5542267014365634e-13	3.554226614465151e-13

6

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DAS PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

FUNÇÃO MATEMÁTICA

- Uma projeção cartográfica é uma **forma de representação de coordenadas sobre um plano**, sendo que cada ponto da superfície terrestre, com coordenadas geográficas (ϕ, λ) é reproduzido num plano por um ponto num dos sistemas de coordenadas planas, cartesianas (x, y) ou polares (r, θ) .
- Neste módulo, a superfície terrestre será considerada como uma esfera dada a simplificação matemática, sem no entanto omitiu algumas dos problemas que têm que ser abordados, pelo que mais à frente será considerado o modelo elipsoidal.
- As **funções matemáticas** que expressam a **relação entre as coordenadas geográficas e as coordenadas planas** podem ser escritas tal como está à direita, com f_1, f_2, f_3 e f_4 correspondendo a funções distintas, e com x, y, r e θ como variáveis dependentes e ϕ e λ como variáveis independentes.

$$x = f_1(\phi, \lambda) \quad (6.01)$$

$$y = f_2(\phi, \lambda) \quad (6.02)$$

$$r = f_3(\phi, \lambda) \quad (6.03)$$

$$\theta = f_4(\phi, \lambda) \quad (6.04)$$

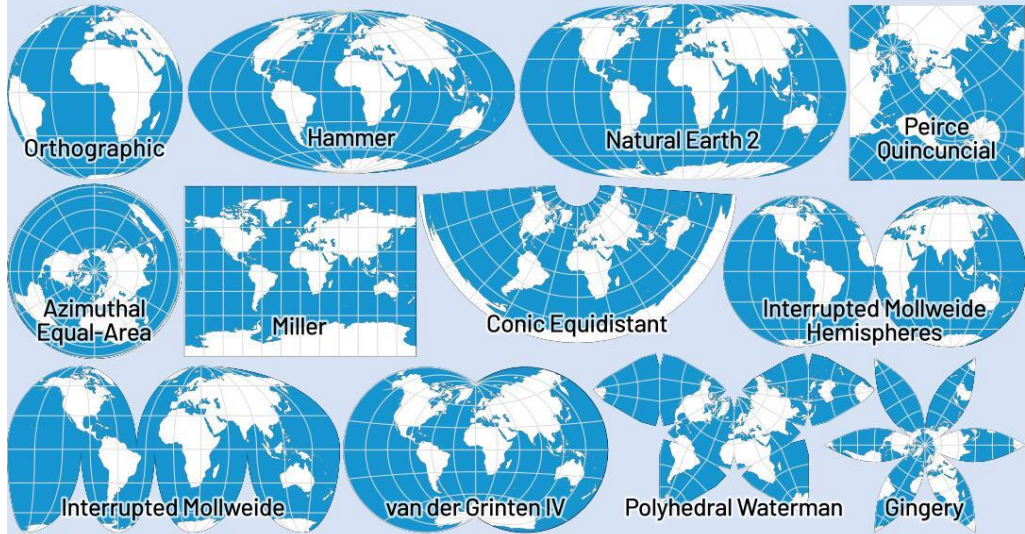
6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

FUNÇÃO MATEMÁTICA


- Cada projeção cartográfica tem **equações únicas** para x e y (ou para r e θ) em função da latitude e longitude, pelo que a um dado ponto (ϕ, λ) na superfície terrestre corresponde um único ponto (x, y) ou (r, θ) na carta.
- No entanto, existem **algumas exceções**, pois há projeções cartográficas em que o mesmo meridiano é representado duas vezes, por os dois polos serem representados por linhas em vez de pontos, ou em que certas partes da superfície terrestre não podem ser representadas.

Esta correspondência é uma função unívoca pois a cada ponto na superfície terrestre corresponde um e um só ponto na carta.

Earth is a **3D sphere**. But we generally work with **2D media** (paper, screens, etc.), & it is necessary to transform the **curved Earth's surface** into a **planar form** using a **map projection**.



All maps have **distortions**, and flat-Earthers use it to discredit science. In reality, **distortions** are the result of transforming a **curved surface** into a **planar form** & cannot be avoided. Some **distortions** can be tolerated, and some are not. It is why there are many different **map projections** for different purposes.

 FlatEarth.ws/map-projection
Debunking Flat Earth Misconceptions

6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

FUNÇÃO MATEMÁTICA

A correspondência entre pontos na superfície terrestre e os respectivos pontos numa carta não é exata.

Em primeiro lugar, porque uma representação da Terra à escala 1:1 é fisicamente impossível, pelo que é necessário aplicar um dado fator de redução.

Em segundo lugar, a superfície curva da Terra não pode ser ajustada a um plano sem se introduzir alguma deformação ou distorção, a qual é equivalente a esticar ou rasgar uma superfície curva.

World Mercator projection with true country size and shape added



6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

ESCALA PRINCIPAL

- A escala pode ser definida como a razão entre uma distância numa carta relativamente à distância real que esta representa. Sendo a distância na carta representada por $A'B'$, e a correspondente distância no terreno por AB , geometricamente a escala pode ser expressa por:

$$A'B'/AB = 1/N \quad (6.05)$$

- A escala de uma esfera, adotada para representar a superfície da Terra, pode ser definida da mesma forma, pela comparação entre os comprimentos de dois arcos de círculo máximo, AB na superfície terrestre e $A'B'$ na esfera, pelo que se tem:

$$A'B'/AB = (r.z)/(R.z) = 1/N \quad (6.06)$$

$$AB = R.z \quad (4.04)$$

$$A'B' = r.z$$

em que N é o denominador da razão, r é o raio da esfera e R é o raio da Terra.

6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

ESCALA PRINCIPAL

- Assumindo que a esfera é uma réplica exata da superfície terrestre à escala indicada em (6.06), esta representa a escala de uma esfera ou elipsoide reduzido através da relação entre os respetivos raios, e é designada por **escala principal**.
- Como se tem que analisar em detalhe como é efetuada a transformação da esfera para o plano, em particular como e onde podem ocorrer distorções na escala, pelo que seria desejável eliminar o uso de uma razão e definir a escala principal como:

$$\mu_0 = 1/N = 1 \quad (6.07)$$

e avaliar a distorção como múltiplos de μ_0 , sendo esta escala principal equivalente à escala da carta.

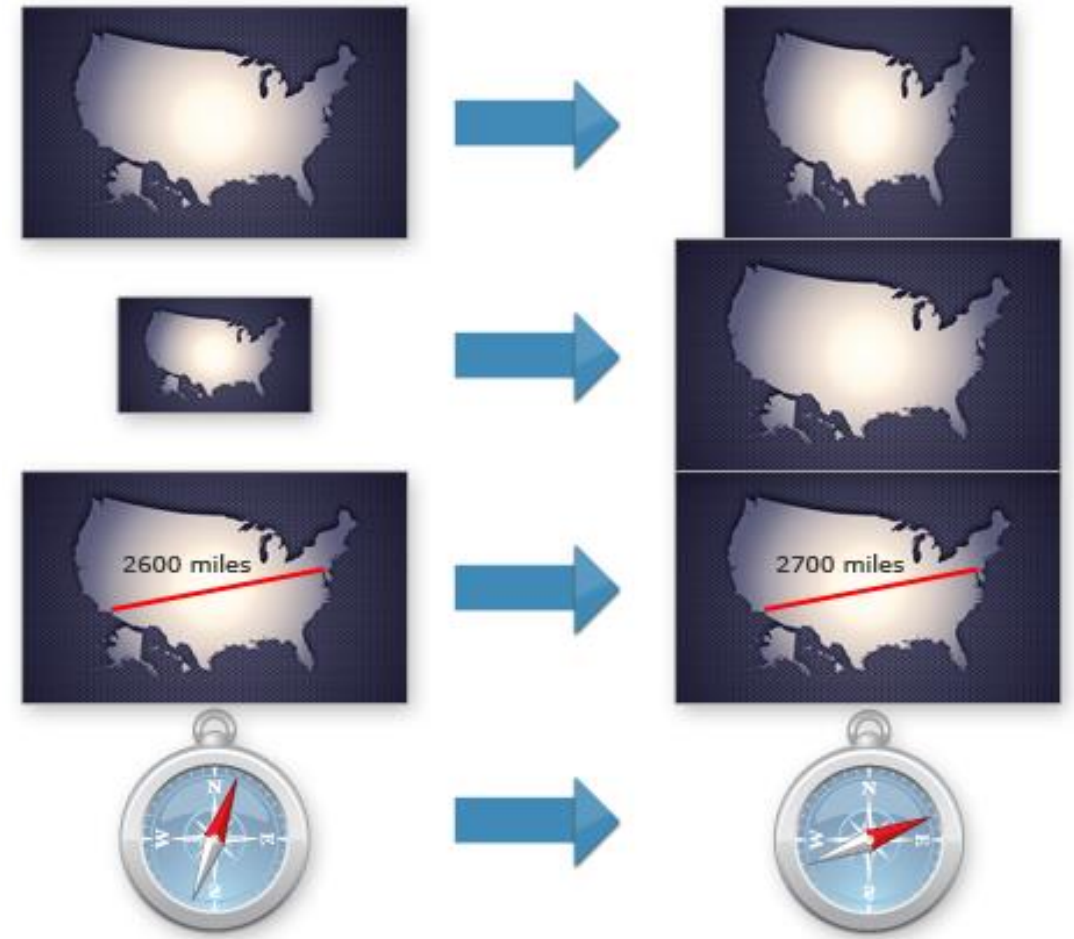
6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

CONCEITOS DE DISTORÇÃO

Nas projeções cartográficas uma ou várias das seguintes propriedades da superfície terrestre são distorcidas:

- FORMA
- ÁREA
- DISTÂNCIA
- DIREÇÃO

havendo projeções específicas que preservam uma ou mais propriedades, mas distorcem as restantes, podendo dar origem a **distorções lineares, angulares ou areais**.



6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

DISTORÇÃO LINEAR

Sendo conhecida a **escala principal** de uma carta, era de supor que esta escala fosse constante em três aspetos:

1. A proporção $1 : N$ se aplicasse aos comprimentos de todas as linhas medidas num mapa;
2. A relação estabelecida pela proporção $1 : N$ fosse constante para todas as partes do mapa;
3. A relação estabelecida por $1 : N$ fosse também independente da direção.

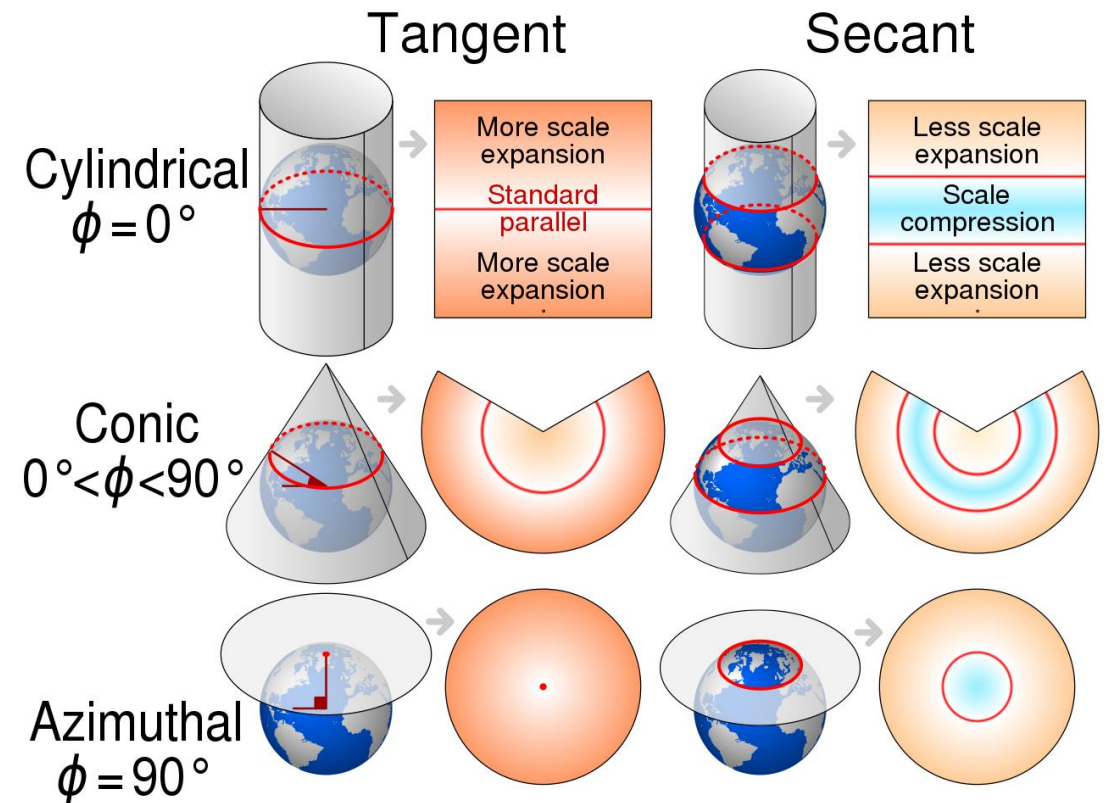
no entanto, **a suposição de que a escala é constante para todas as distâncias, todos os locais e todas as direções não é verdadeira.**

Numa Carta Militar de Portugal à escala 1:25 000, em que está representada uma área de 160 km², as variações de escala são muito pequenas, tão pequenas que são introduzidos erros negligenciáveis assumindo que a escala é constante (sendo estes menores que a incerteza na posição resultante do erro de graficismo), mas importa realçar que a distorção linear existe, mesmo que seja muito pequena para ser medida.

6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

LINHAS E PONTOS DE DISTORÇÃO NULA

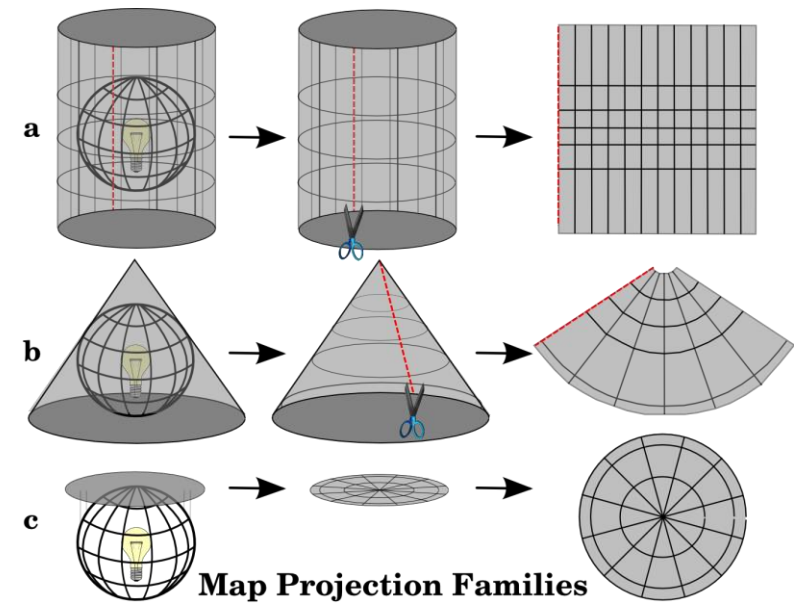
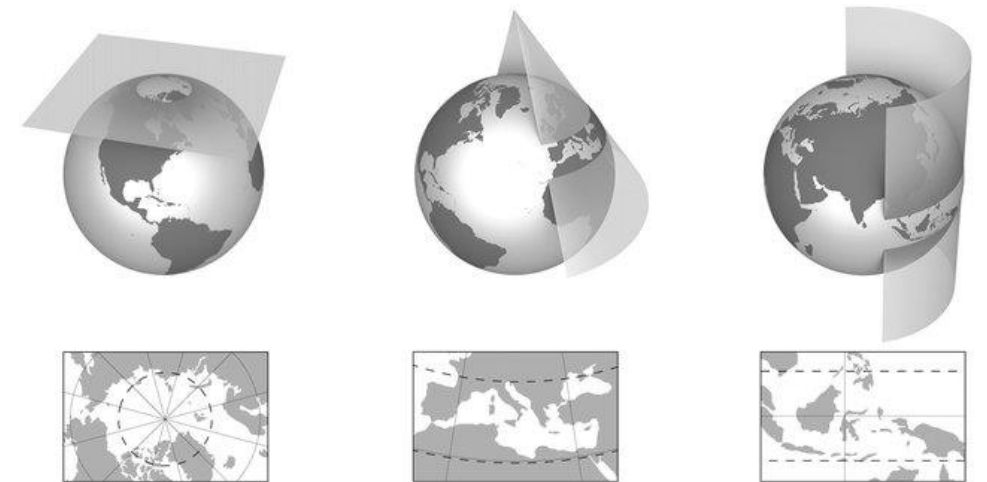
- Embora seja impossível criar uma carta perfeita, na qual a escala principal ($1: N$) seja preservada, é muito fácil manter a escala principal ao longo de certas linhas ou de certos pontos numa carta.
- Ao longo dessas linhas, ou pontos, a escala é constante e igual à escala principal, não apresentando distorção linear, logo:
 - **LINHAS DE DISTORÇÃO NULA**, linhas numa projeção cartográfica ao longo das quais a escala principal é preservada e que correspondem a um dado arco de círculo máximo ou círculo mínimo na esfera;
 - **PONTOS DE DISTORÇÃO NULA**, pontos numa projeção cartográfica onde a escala principal é preservada.



6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

PLANO, CONE E CILINDRO

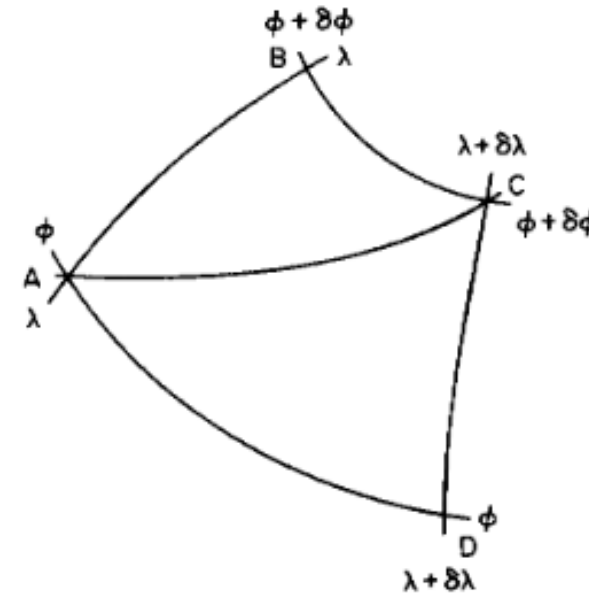
- Tanto o cone como o cilindro são **superfícies planificáveis**, ou seja, são superfícies que podem ser transformadas num plano sem distorção.
- Como ilustrado na figura à direita, um **plano secante** à superfície da esfera ou do elipsoide gera uma linha de contato, enquanto que, um **cone ou um cilindro secantes** geram ambos duas linhas de contato.
- A figura no slide anterior, mostra que um **plano tangente** à superfície da esfera ou do elipsoide gera um ponto de contato, enquanto que, um **cone ou cilindro tangentes** geram ambos uma linha de contato.



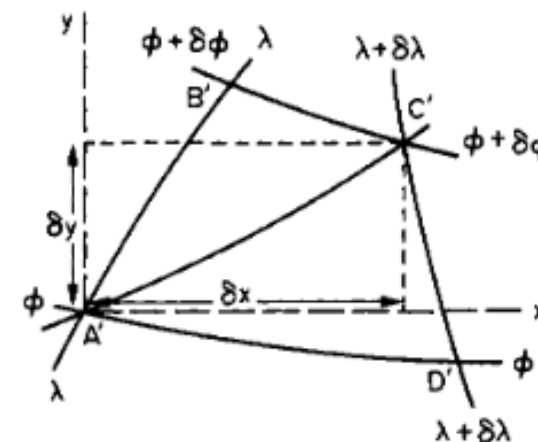
6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

ESCALAS PARTICULARES

- Na figura à direita em cima, está representada parte de uma superfície curva mostrando o **quadrilátero esférico** ($ABCD$) formado pela interseção de um par de meridianos (λ e $\delta\lambda$) com um par de paralelos (ϕ e $\delta\phi$), sendo $\delta\phi$ a diferença em latitude entre os paralelos e $\delta\lambda$ a diferença em longitude entre os meridianos.
- Na figura à direita em baixo, está a **representação plana** desse mesmo quadrilátero esférico ($A'B'C'D'$).
- Tendo sido definida uma **função matemática**, os lados e a diagonal de $A'B'C'D'$ podem ser compostos por curvas e os ângulos entre os lados podem assumir qualquer valor.



$$\begin{aligned}
 & A (\quad , \quad) \\
 & B (\quad + \quad , \quad) \\
 & C (\quad + \quad , \quad) \\
 & D (\quad , \quad + \quad)
 \end{aligned}$$

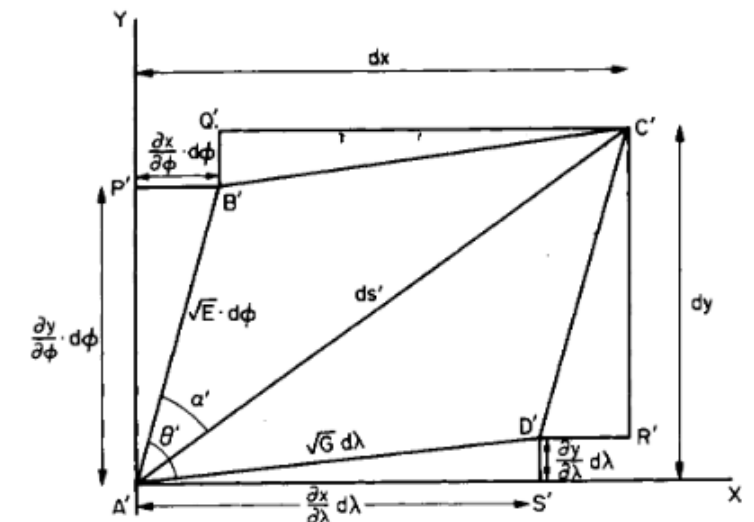
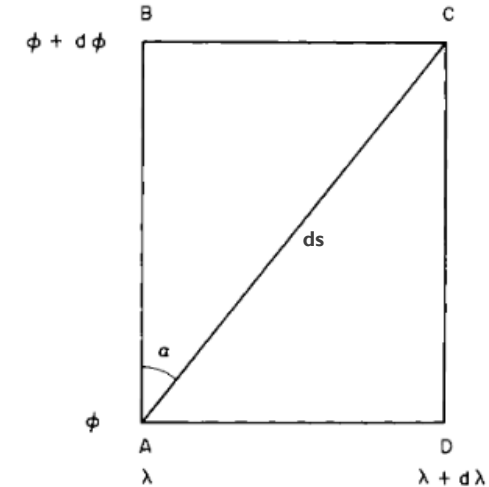


$$\begin{aligned}
 & A' (x, y) \\
 & C' (x + \delta x, y + \delta y)
 \end{aligned}$$

6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

GEOMETRIA DIFERENCIAL DA ESFERA E DO PLANO

- Considerar o **quadrilátero esférico** e a sua **projeção** como tendo uma dimensão finita, ou seja, ambas as figuras como sendo **infinitamente pequenas**, tem como consequência que:
 - As formas de linhas correspondentes na esfera e na carta se aproximam a linhas retas;
 - Os ângulos formados pelas interseções de pares de linhas mantêm-se inalterados.
- Consequentemente, tem-se que:
 - O quadrilátero esférico (infinitamente pequeno) formado originalmente por pares de meridianos e paralelos que se intersectam em ângulos retos ($ABCD$), é transformado numa figura retilínea em que os quatro ângulos são também ângulos retos;
 - Na representação plana ($A'B'C'D'$) do quadrilátero esférico (infinitamente pequeno), os lados e diagonais da projeção são transformados em linhas retas, mas os ângulos, tais como θ' , são preservados.



6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

GEOMETRIA DIFERENCIAL DA ESFERA E DO PLANO

- Tendo os pontos A e A' as coordenadas (ϕ, λ) e (x, y) , respetivamente, $d\phi$, $d\lambda$, dx e dy , denotam os incrementos infinitesimais em latitude, longitude, x e y , respetivamente.
- Logo, a partir das equações (4.01) e (4.02) podemos expressar o comprimento do elemento do arco meridional, ds_m , e o comprimento do elemento do arco de paralelo, ds_p , que passa por A , como (sendo R o raio da esfera):

$$ds_m = R \cdot d\phi \quad (6.08)$$

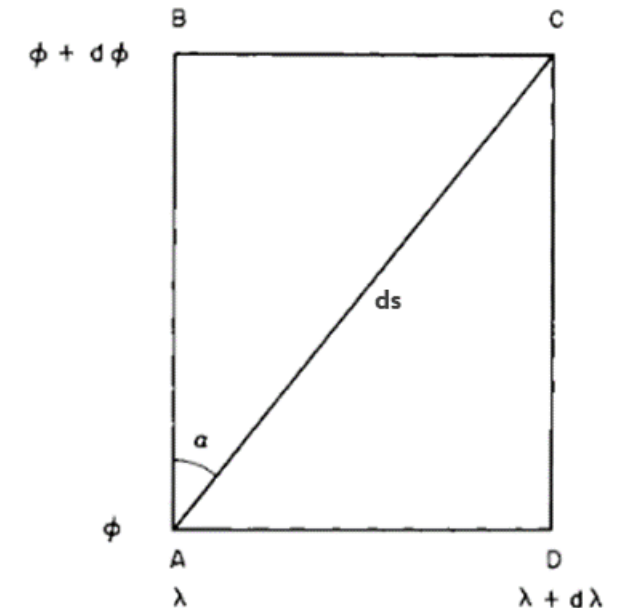
$$ds_p = R \cdot \cos \phi \cdot d\lambda \quad (6.09)$$

- Como os ângulos nos quatro cantos de $ABCD$ são ângulos retos, usando o Teorema de Pitágoras, tem-se que o comprimento do elemento de arco diagonal, AC , é:

$$ds^2 = ds_m^2 + ds_p^2 = R^2 \cdot d\phi^2 + R^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot d\lambda^2 \quad (6.10)$$

$$s_m = R \cdot \delta\phi \quad (4.01)$$

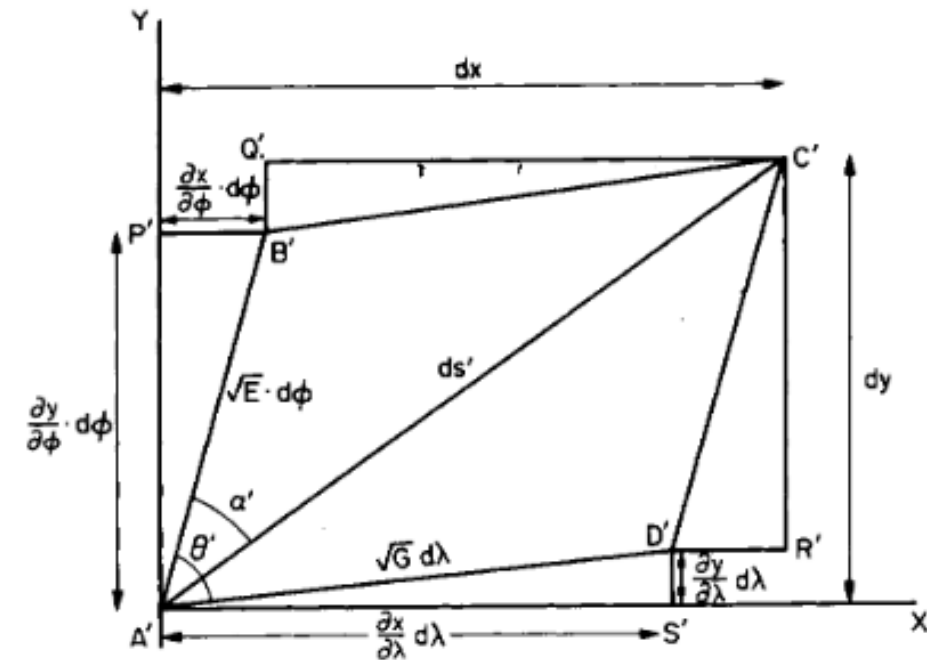
$$s_p = R \cdot \cos \phi \cdot \delta\lambda \quad (4.02)$$



6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

GEOMETRIA DIFERENCIAL DA ESFERA E DO PLANO

- No plano, o ponto A' e C' têm as coordenadas (x, y) e $(x + dx, y + dy)$, respetivamente, sendo as coordenadas dos pontos B' e D' , respetivamente, $((\delta x / \delta \phi) d\phi, (\delta y / \delta \phi) d\phi)$ e $((\delta x / \delta \lambda) d\lambda, (\delta y / \delta \lambda) d\lambda)$.
- Cada uma das linhas na figura à direita tem um significado geométrico, o qual pode ser representado simbolicamente usando a **notação da derivação parcial**:
 - $A'P'$, incremento em y que resulta de um incremento $d\phi$ em latitude $(\delta y / \delta \phi) d\phi$;
 - $P'B'$, incremento em x que resulta de um mesmo incremento $d\phi$ em latitude $(\delta x / \delta \phi) d\phi$;
 - $A'S'$, incremento em x que resulta de um incremento $d\lambda$ em longitude $(\delta x / \delta \lambda) d\lambda$;
 - $D'S'$, incremento em y que resulta de um mesmo incremento $d\lambda$ em longitude $(\delta y / \delta \lambda) d\lambda$.



$A'B'$, arco de meridiano que passa por A'
 $A'D'$, arco de paralelo que passa por A'
 $A'C'$, qualquer arco que passe por A' e que faça um azimute α' com o meridiano que passa também por A'

6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

GEOMETRIA DIFERENCIAL DA ESFERA E DO PLANO

- Da figura podemos deduzir que o incremento dx entre A' e C' é composto por dois elementos lineares $B'P'$ e $Q'C'$, logo:

$$dx = B'P' + Q'C' = (\delta x / \delta \phi) d\phi + (\delta x / \delta \lambda) d\lambda \quad (6.11)$$

- De igual modo, o incremento dy entre A' e C' é composto pelos elementos lineares $A'P'$ e $B'Q'$, logo:

$$dy = A'P' + B'Q' = (\delta y / \delta \phi) d\phi + (\delta y / \delta \lambda) d\lambda \quad (6.12)$$

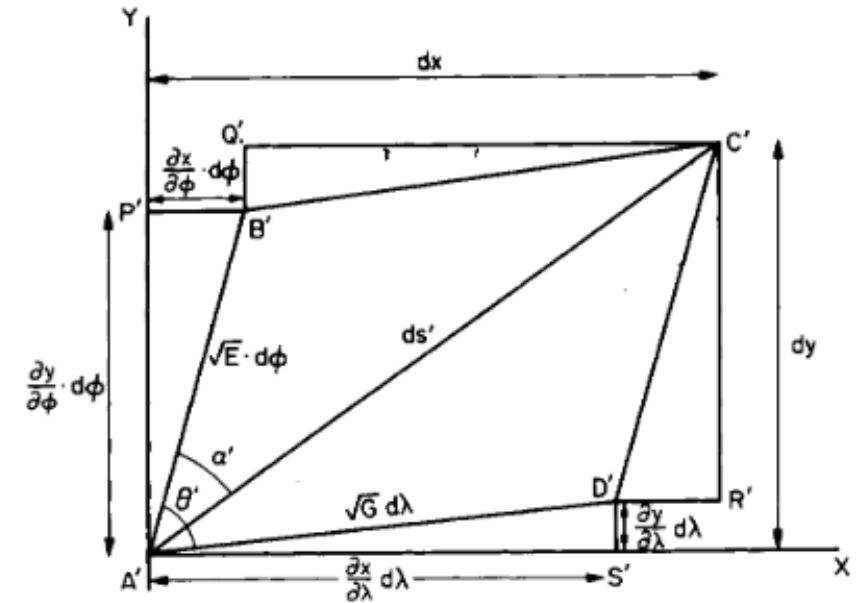
sendo que, ambas as expressões podem ser derivadas algebricamente a partir das funções (6.01) e (6.02).

- Aplicando de novo o Teorema de Pitágoras, a diagonal da figura $A'B'C'D'$ pode ser expressa por:

$$x = f_1(\phi, \lambda) \quad (6.01)$$

$$y = f_2(\phi, \lambda) \quad (6.02)$$

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 = [(\delta x / \delta \phi) d\phi + (\delta x / \delta \lambda) d\lambda]^2 + [(\delta y / \delta \phi) d\phi + (\delta y / \delta \lambda) d\lambda]^2 \quad (6.13)$$



$$A'B'^2 = A'P'^2 + B'P'^2$$

$$A'D'^2 = A'S'^2 + D'S'^2$$

$$A'C'^2 = B'P'^2 + Q'C'^2 + A'P'^2 + B'Q'^2 = dx^2 + dy^2$$

6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

COEFICIENTES SUPERFICIAIS DE GAUSS

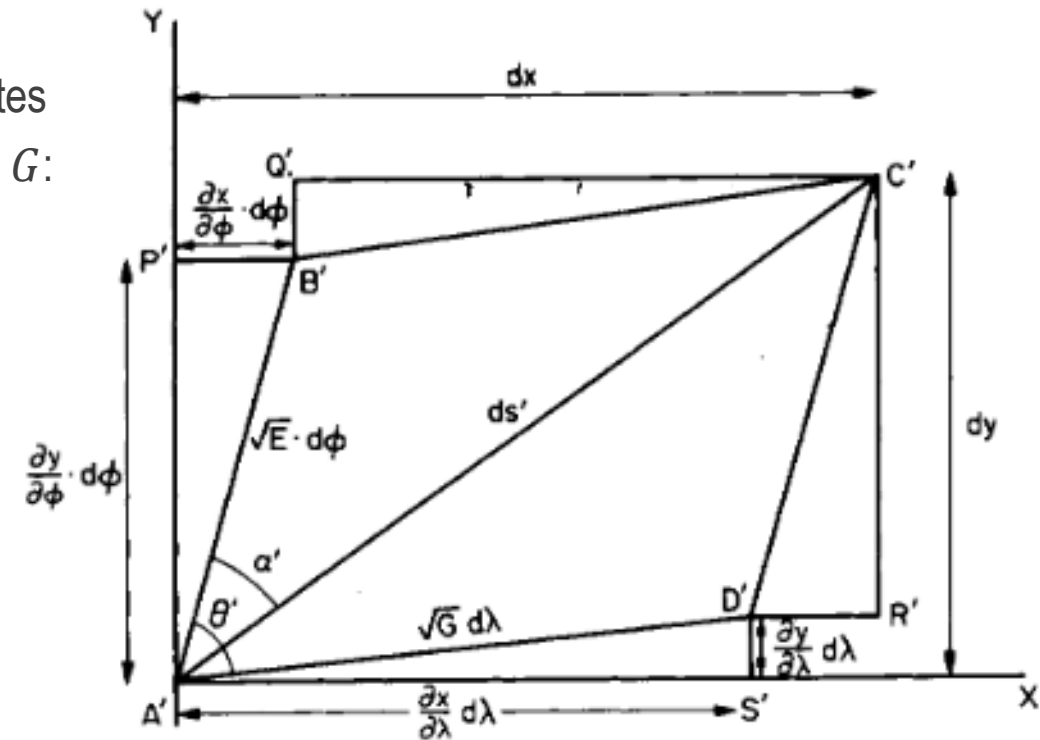
- Uma simplificação da equação (6.13) pode obter-se efetuando as seguintes substituições, considerando os coeficientes superficiais de Gauss E , F e G :

$$E = (\delta x / \delta \phi)^2 + (\delta y / \delta \phi)^2 \quad (6.14)$$

$$F = [(\delta x / \delta \phi) \cdot (\delta x / \delta \lambda)] + [(\delta y / \delta \phi) \cdot (\delta y / \delta \lambda)] \quad (6.15)$$

$$G = (\delta x / \delta \lambda)^2 + (\delta y / \delta \lambda)^2 \quad (6.16)$$

$$ds'^2 = E \cdot d\phi^2 + 2F \cdot d\phi \cdot d\lambda + G \cdot d\lambda^2 \quad (6.17)$$



- Com base nestas últimas equações, é possível determinar três escalas relativas ao ponto A' na carta, a **escala ao longo do meridiano**, a **escala ao longo do paralelo**, e a **escala ao longo de qualquer arco** que passe por A e que faça um azimute α com o meridiano que passa também por A .

6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

COEFICIENTES SUPERFICIAIS DE GAUSS

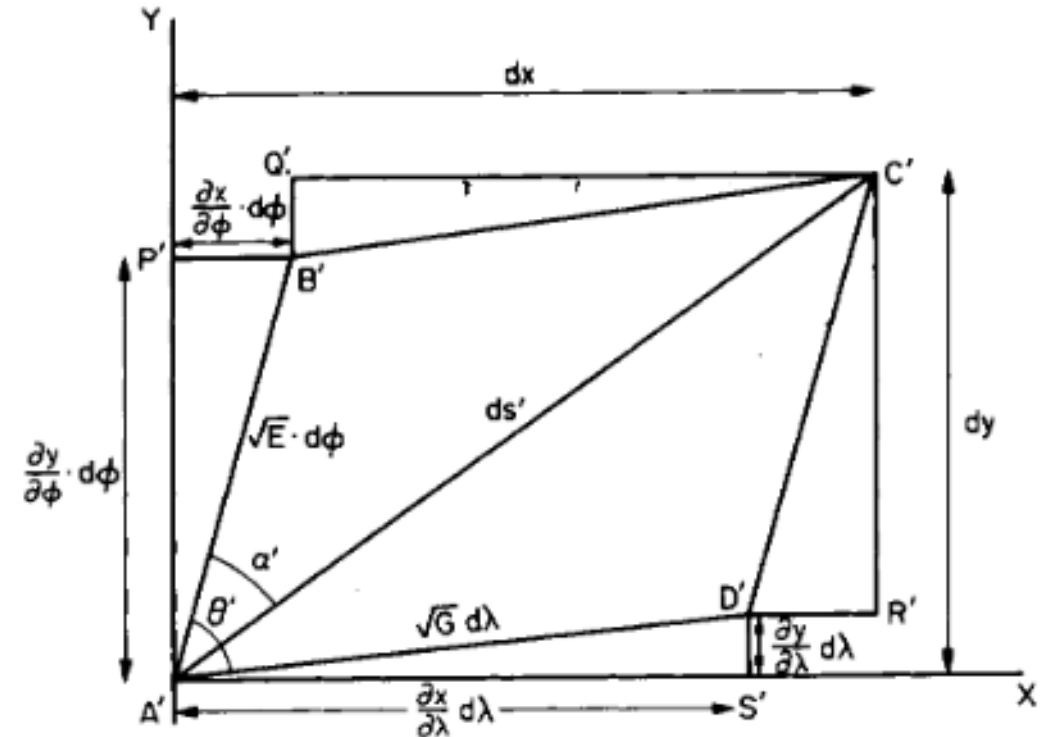
ESCALA AO LONGO DO PARALELO

- Corresponde à razão entre o comprimento AD na superfície da esfera e o respetivo comprimento $A'D'$ na projeção cartográfica:

$$k = A'D'/AD = \sqrt{G}/(R \cdot \cos \phi) \quad (6.20)$$

sendo esta escala relacionada com a escala principal, pode colocar-se $R = 1$, pelo que:

$$k = \sqrt{G}/\cos \phi \quad (6.21)$$



$$A'D'^2 = A'S'^2 + D'S'^2 = [(\delta x/\delta \lambda)d\lambda]^2 + [(\delta y/\delta \lambda)d\lambda]^2 = G \cdot d\lambda^2$$

$$AD = ds_p = R \cdot \cos \phi \cdot d\lambda \quad (6.09)$$

6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

COEFICIENTES SUPERFICIAIS DE GAUSS

ESCALA AO LONGO DE UM QUALQUER ARCO

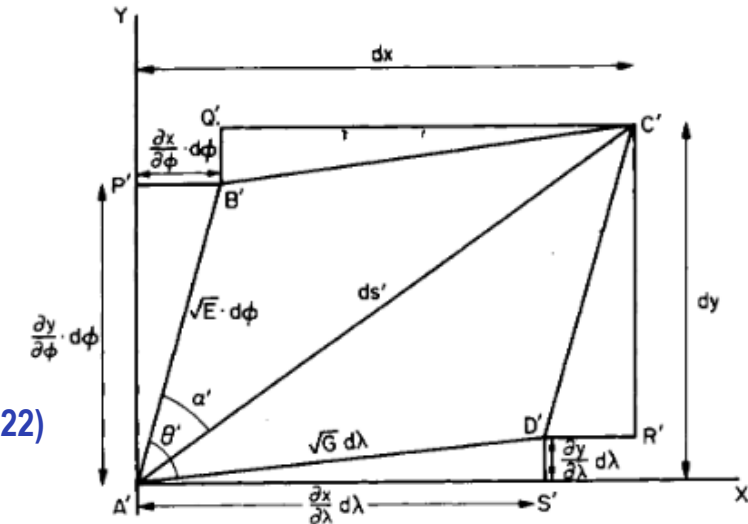
- Corresponde à razão entre o comprimento AC na superfície da esfera e o respectivo comprimento $A'C'$ na projeção cartográfica:

$$\mu = A'C'/AC = ds'/ds = [E \cdot d\phi^2 + 2F \cdot d\phi \cdot d\lambda + G \cdot d\lambda^2]^{1/2} / [R^2 \cdot d\phi^2 + R^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot d\lambda^2]^{1/2} \quad (6.22)$$

sendo esta escala relacionada com a escala principal, pode colocar-se $R = 1$, pelo que:

$$\mu = [E \cdot d\phi^2 + 2F \cdot d\phi \cdot d\lambda + G \cdot d\lambda^2]^{1/2} / [d\phi^2 + \cos^2 \phi \cdot d\lambda^2]^{1/2} \quad (6.23)$$

- Estas três escalas são conhecidas como **escalas particulares** num dado ponto, podendo ser definidas como a relação entre uma distância linear infinitesimal em qualquer direção e em qualquer ponto da projeção cartográfica e a correspondente distância linear na esfera.



$$ds'^2 = E \cdot d\phi^2 + 2F \cdot d\phi \cdot d\lambda + G \cdot d\lambda^2 \quad (6.17)$$

$$ds^2 = R^2 \cdot d\phi^2 + R^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot d\lambda^2 \quad (6.10)$$

6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

COEFICIENTES SUPERFICIAIS DE GAUSS

- Na figura à direita, α' é o azimute da linha $A'C'$ medido em A' na projeção cartográfica, correspondente ao azimute α da linha AC na esfera. O ângulo θ' é o ângulo em A' resultante da interseção do meridiano e do paralelo que passa por A' na projeção cartográfica, pelo que se pode mostrar que:

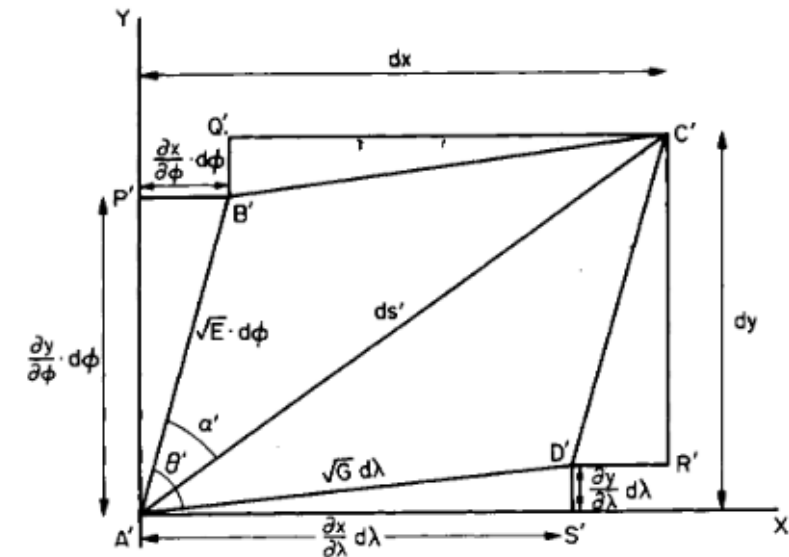
$$\cos \theta' = F / (h \cdot k \cdot \cos \phi) \quad (6.24)$$

- O **azimute** α' pode também ser descrito em função de E , F e G , pelo que é possível escrever a equação (6.23) em função de α' :

$$\mu_{\alpha'}^2 = (E/R^2) \cdot \cos^2 \alpha' + (F/R^2 \cdot \cos \phi) \cdot \sin 2\alpha' + (G/R^2 \cdot \cos^2 \phi) \cdot \sin^2 \alpha'$$

$$\mu_{\alpha'}^2 = h^2 \cdot \cos^2 \alpha' + h \cdot k \cdot \cos \theta' \cdot \sin 2\alpha' + k^2 \cdot \sin^2 \alpha' \quad (6.25)$$

em que $\mu_{\alpha'}$ é a **escala particular na direção de α'** e considerando $R = 1$.



6. Fundamentos matemáticos das projeções cartográficas

COEFICIENTES SUPERFICIAIS DE GAUSS

- Como os coeficientes superficiais E , F e G , variam continuamente com a latitude e longitude, **as escalas particulares variam com as posições na projeção cartográfica, e também com a direção a partir de um dado ponto.**
- Embora diversas escalas particulares possam ser avaliadas para um dado ponto, as **quatro escalas necessárias para analisar as distorções** numa qualquer projeção cartográfica são as seguintes:

- ESCALA PARTICULAR AO LONGO DO MERIDIANO, h ;
- ESCALA PARTICULAR AO LONGO DO PARALELO, k ;
- ESCALA PARTICULAR MÁXIMA NUM DADO PONTO, a ;
- ESCALA PARTICULAR MÍNIMA NUM DADO PONTO, b .

$$h = \sqrt{E} \quad (6.19)$$

$$k = \sqrt{G} / \cos \phi \quad (6.21)$$

sendo que, as duas últimas escalas precisam ainda de ser determinadas.