

Meteorologia

LEEA

LMOG

Pedro Matos Soares | pmsoares@fc.ul.pt | 8.3.26

Miguel Lima | malima@fc.ul.pt | 8.3.15



INSTITUTO
DOM LUIZ



Ciências
ULisboa

Sumário

Consequências da Lei de Pascal: Redução da pressão, altimetria barométrica;

Flutuação.

Revisão de Termodinâmica: estado e processo; leis da Termodinâmica.

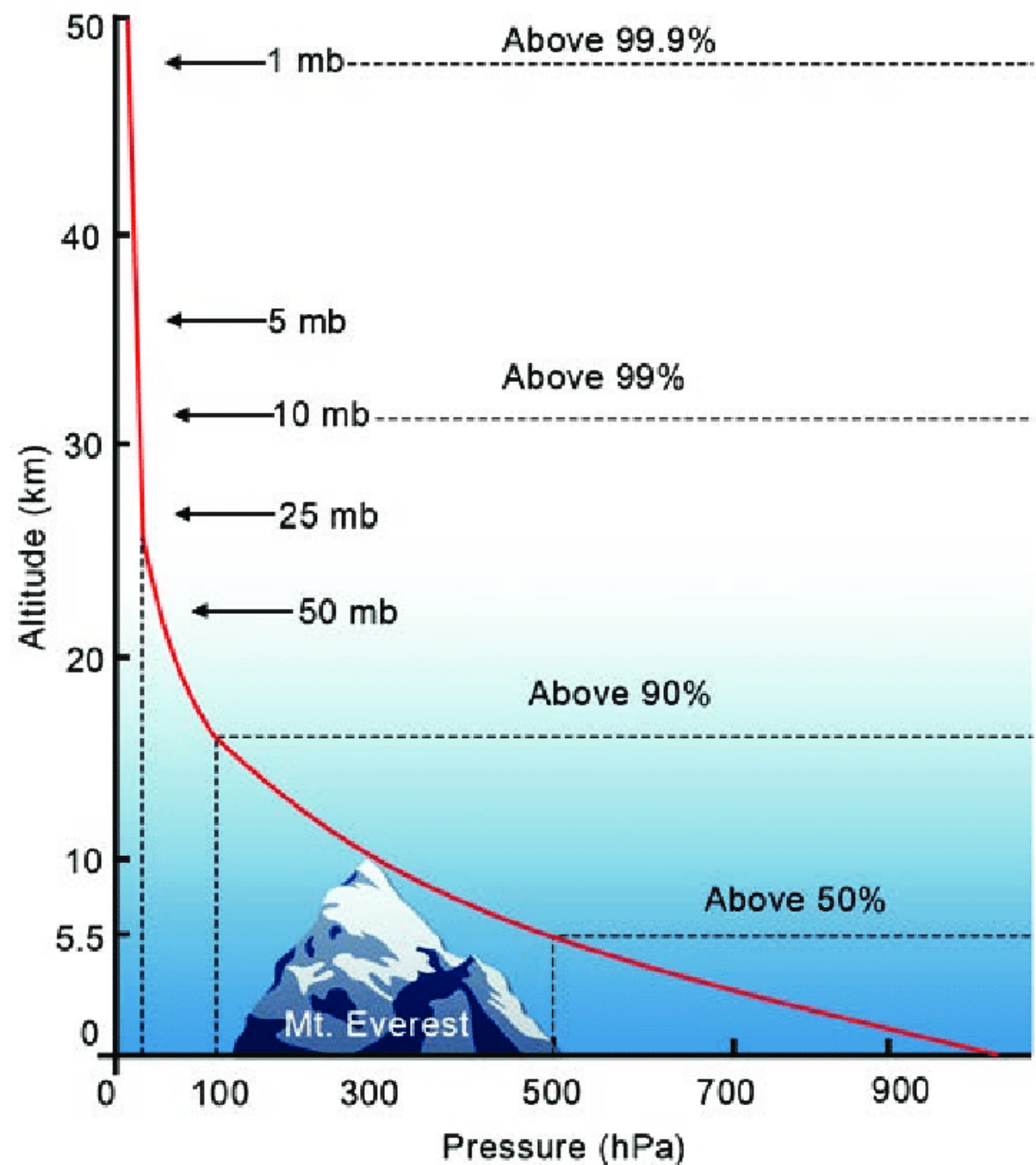
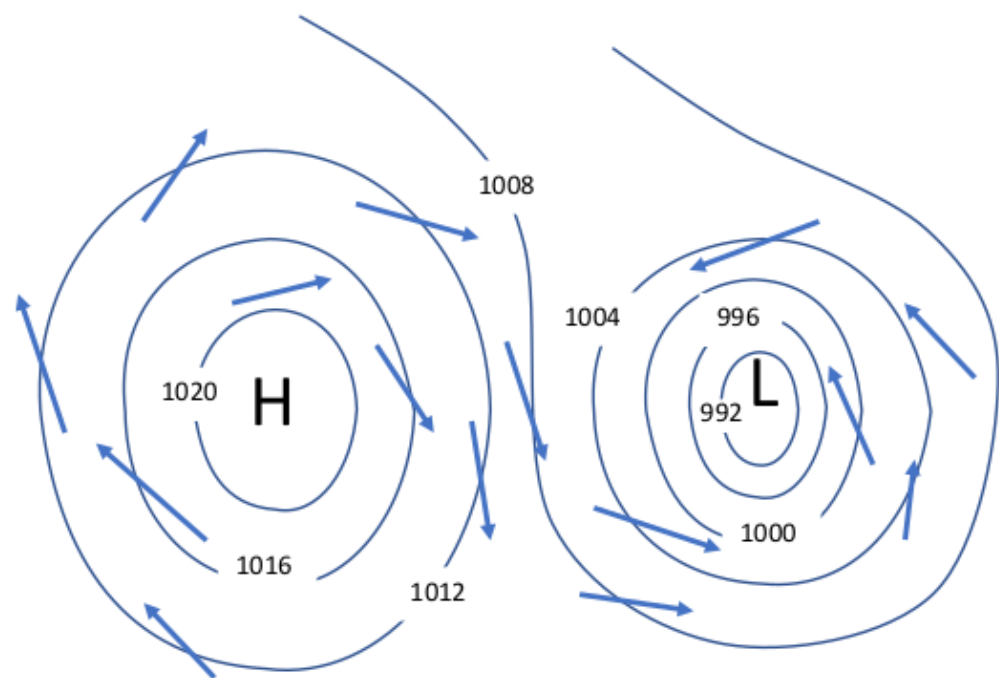
Termodinâmica da água

Processos isobáricos do ar húmido.

$$P = R_d \rho T$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_d T} dz \Rightarrow p = p_0 e^{\frac{g}{R_d} \overline{\left(\frac{1}{T}\right)} (z_0 - z)}$$

A pressão varia quase **exponencialmente** com a altitude. Por isso, sobre terra um mapa da pressão à superfície só nos permite



$$P = R_d \rho T$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_d T} dz \Rightarrow p = p_0 e^{\frac{g}{R_d} \overline{\left(\frac{1}{T}\right)} (z_0 - z)}$$

A pressão varia quase **exponencialmente** com a altitude. Por isso, sobre terra um mapa da pressão à superfície só nos permite ver onde estão as montanhas... E não é isso que queremos, mas sim localizar depressões e anticiclones.

Se conhecermos $T(z)$, e medirmos $P_{z_0} = P(z = z_0)$, a lei de Pascal pode ser integrada para calcular a pressão “reduzida” ao nível do mar ($z = 0$):

$$p_{z=0} = p_{z_0} e^{\frac{g}{R_d} \overline{\left(\frac{1}{T}\right)} (z - z_0)}$$

onde $\overline{(\quad)}$ é um valor “médio” na camada $[0, z_0]$.

$$P = \rho R_d T_v$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_d T_v} dz$$

O efeito da humidade (vapor) inclui-se substituindo T por T_v :

$$p_{z=0} = p_{z_0} e^{\frac{g}{R_d \bar{T}_v} z_0}$$

onde $\bar{T}_v$ é um valor “médio” de T_v na camada $[0, z_0]$.

Se a camada for muito pouco espessa (z_0 pequeno) pode usar-se a media aritmética de T_v . Caso contrário, divide-se em camadas pequenas e **integra-se numericamente** (e.g. pelo método do trapézio ou do ponto médio, cf Laboratório Numérico).

Altimetria (barométrica)

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_d T_v} dz \Rightarrow \int_{z_0}^{z_1} dz = - \int_{P_0}^{P_1} \frac{R_d T_v}{g} \frac{dp}{p}$$

Fórmula **hipsométrica**

$$z_1 - z_0 = \frac{R_d}{g} \bar{T}_v \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)$$

A fórmula pode ser aplicada diretamente para uma camada pouco espessa, no caso de uma camada espessa usa-se um **método numérico** por subcamadas (e.g., **método do ponto médio**):

$$\Delta Z = z_N - z_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{R_d}{g} \frac{T_{v_k} + T_{v_{k+1}}}{2} \ln \left(\frac{p_k}{p_{k+1}} \right)$$

Hypsometric Equation

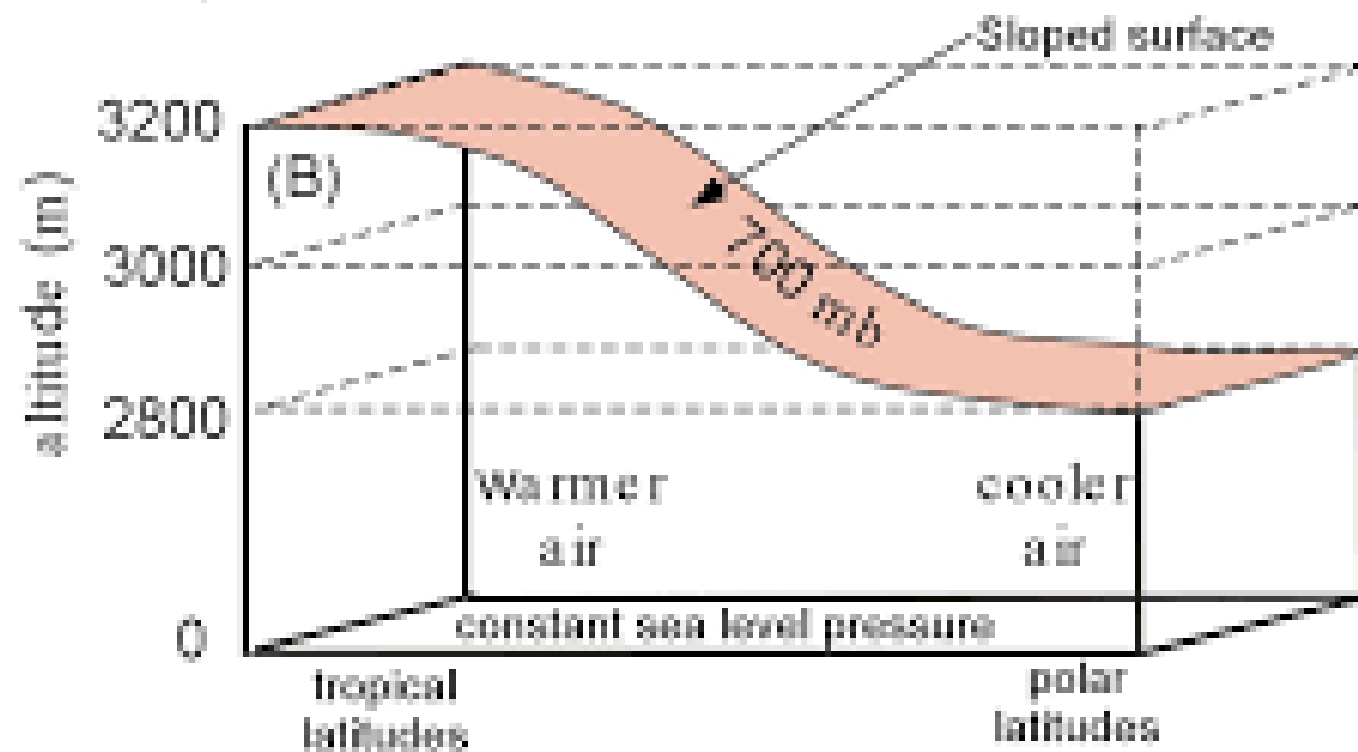
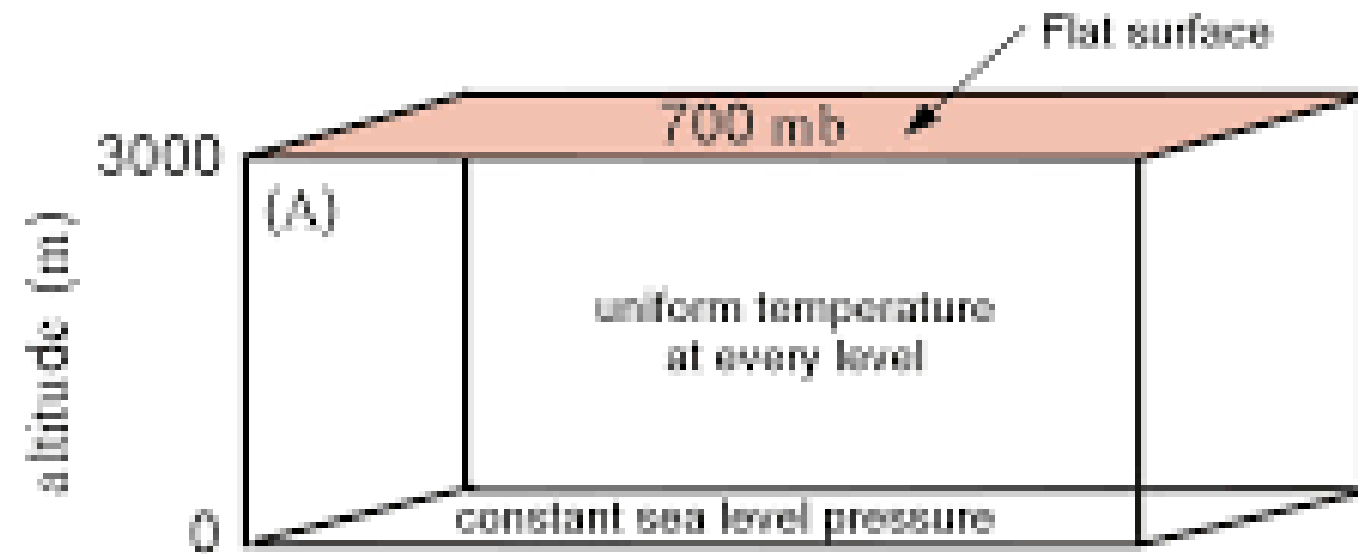
What it means: The thickness between any two pressure levels is proportional to the mean temperature within that layer

Warmer layer → Greater thickness
Pressure decrease slowly with height

Colder layer → Less thickness
Pressure decreases rapidly with height

Derivation: Integrate the Hydrostatic Approximation between two pressure levels

$$z_2 - z_1 = \frac{R\bar{T}}{g} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$



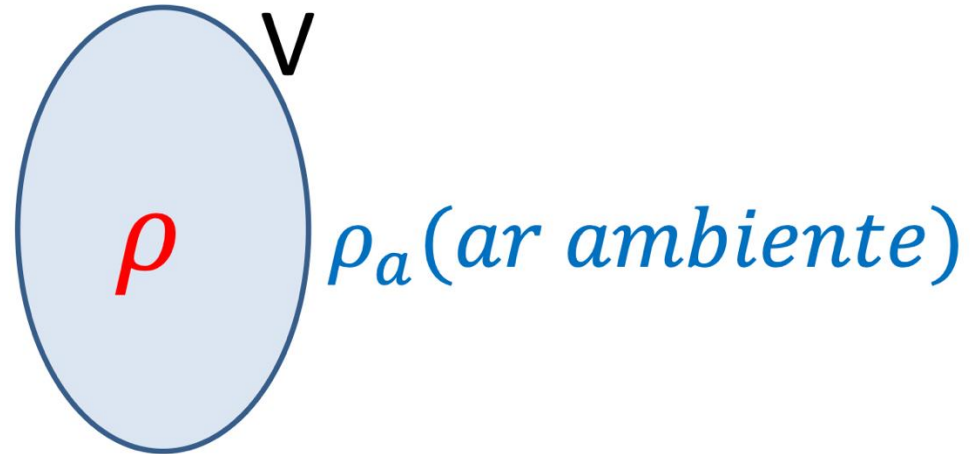
Da lei de Pascal resulta o **Princípio de Arquimedes**

Flutuação=Impulsão – Peso

Arquimedes: Impulsão=“Peso do fluido deslocado”

$$F = I - P = \rho_a V g - \rho V g$$

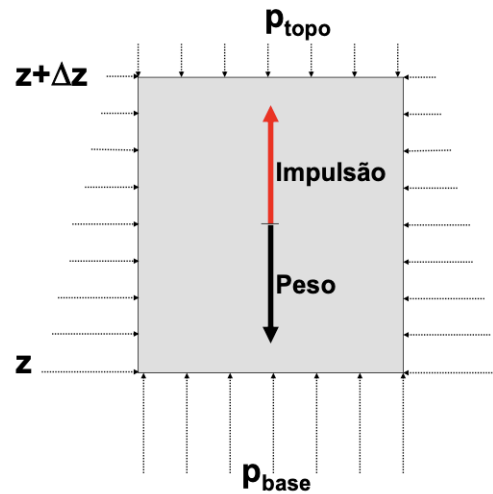
$$F = (\rho_a - \rho) V g$$



Flutuação (*buoyancy*) de um **partícula** de ar seco

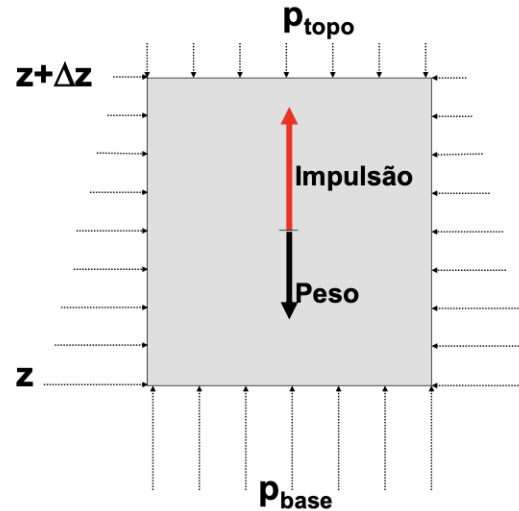
A pressão no interior da partícula é sempre igual à pressão exterior ao mesmo nível

Ar exterior = ar partícula



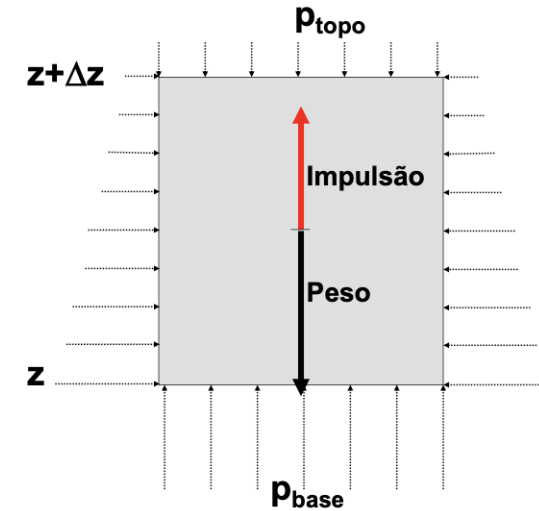
Flutuação=0

Partícula “quente”



Flutuação>0

Partícula “fria”



Flutuação<0

Flutuação = Impulsão - Peso

$$\rho = \frac{p}{R_d T}$$

De volta à Termodinâmica

A Termodinâmica estabelece relações entre **variáveis de estado** (T,P,V,U,S,...) de um **sistema** em **equilíbrio**.

Em Meteorologia, o sistema é uma **partícula** de ar (muitas moléculas para se aplicar a Termodinâmica, pouco volume para estar em equilíbrio).

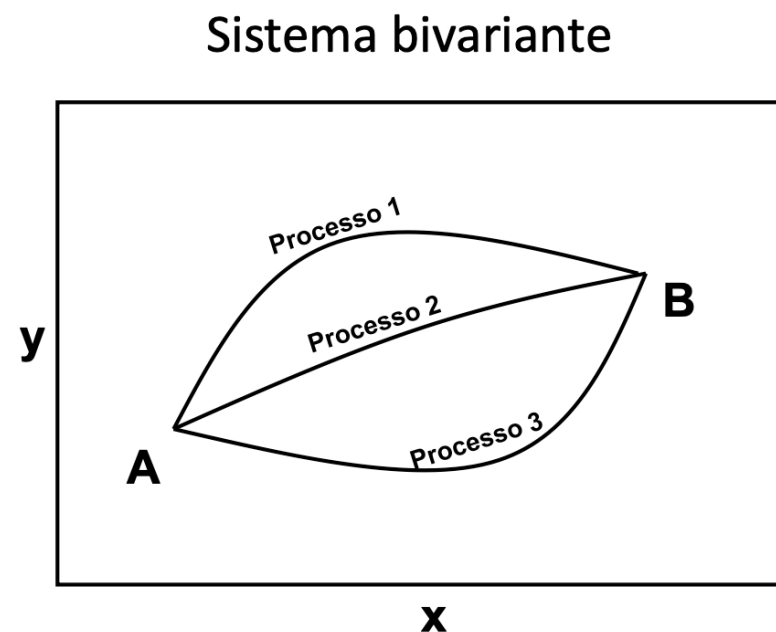
O ar seco é bivalente (2 variáveis independentes): o seu estado pode representar-se num diagrama 2D. É um **sistema termodinâmico simples**.

Apesar de se admitir equilíbrio, o interessante é estudar mudanças de estado: **processos**

Mesmo num sistema simples há infinitos processos entre quaisquer 2 estados (A,B).

Seja qual for o processo, as variáveis de estado partem de um valor bem definido em **A** e chegam a um outro valor bem definido em **B** (ou vice-versa).

O processo ocorre porque o sistema interage com outro(s) sistema(s) (o seu ambiente): essa **interação depende do processo!**



Processos termodinâmicos entre 2 estados (A e B). x e y são as variáveis de estado.

Como a interação entre um sistema e o exterior é feita na sua fronteira, os constrangimentos podem ser definidos como propriedades dessa fronteira, geralmente designada por **parede**.

exemplos:

- uma parede rígida obriga o sistema a evoluir sem alteração do volume (processo isocórico);
- um sistema com uma parede condutora de calor imerso num banho a temperatura constante segue um processo isotérmico;
- um sistema com uma parede não condutora de calor segue um processo adiabático

Tabela 2-1 – Alguns processos termodinâmicos

Processo		Parede	Obs
Isotérmico	$T = \text{const}$	Diatérmica	Em contacto com reservatório de calor
Isocórico	$V = \text{const}$	Rígida	
Isobárico	$P = \text{const}$	Móvel	Em contacto com reservatório de volume
Adiabático	$\text{Calor} = 0$	Não condutora de calor	
Isolado	$U = \text{const}$	Rígida, Não condutora de calor	

Leis da Termodinâmica

Lei Zero estabelece que cada **Sistema termodinâmico** é caracterizado por uma **variável de estado** designada por **temperatura**;

dois sistemas a temperaturas diferentes em contacto diatérmico (isto é separados por uma parede condutora de calor) trocam calor até atingirem uma temperatura comum.

Leis da Termodinâmica

Primeira Lei da Termodinâmica é uma versão da **lei geral de conservação de energia** e pode escrever-se no seguinte modo:

Um sistema termodinâmico é caracterizado por uma variável de estado designada por **energia interna**;

num sistema isolado a energia interna é constante; em geral, as variações da energia interna são a soma dos fluxos de calor e trabalho recebidos pelo sistema.

Esta definição pressupõe que conhecemos intuitivamente o significado de calor e trabalho, esclarecendo que se trata das duas formas possíveis de transferir energia interna entre sistemas.

$$dU = \delta Q + \delta W$$

onde U representa a energia interna, dU a sua variação, δQ o calor e δW o trabalho transferidos nesse processo. Calor e trabalho não são variáveis de estado, daí a utilização do símbolo δ para simbolizar uma quantidade infinitesimal de calor ou trabalho, em vez do símbolo d utilizado para simbolizar a variação infinitesimal de uma propriedade de estado.

Leis da Termodinâmica

No caso de um gás ideal a energia interna inclui sempre uma componente cinética, associada ao movimento molecular e depende unicamente da temperatura:

$$dU = mc_v dT$$

onde c_v é o calor específico a volume constante do gás.

Leis da Termodinâmica

A Segunda Lei da Termodinâmica

“Um sistema termodinâmico é caracterizado por uma variável de estado designada por **entropia**; num sistema isolado, a entropia não pode diminuir”.

Permite calcular a variação de entropia entre dois estados, recorrendo a variáveis conhecidas. De facto, pode mostrar-se que no caso dos processos reversíveis, processos muito lentos nos quais a entropia total dos sistemas envolvidos se mantém constante, a variação da entropia está relacionada com o fluxo de calor:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \tag{2-3}$$

A expressão (2-3) permite calcular a variação de entropia entre dois estados A e B, pois existe sempre um processo reversível que faz uma das transformações ($A \rightarrow B$ ou $B \rightarrow A$).

Calor e Temperatura

Calor é uma forma de transferência de energia, tem unidades de energia (J - joule) e não é uma variável de estado

Temperatura, por sua vez, é uma variável de estado: cada sistema termodinâmico em equilíbrio tem uma temperatura. No sistema SI, a temperatura é medida K kelvin.

Quando um sistema recebe ou cede calor, num dado processo, observa-se, em geral, uma variação da sua temperatura. No caso de **sistemas incompressíveis**, por exemplo a água líquida, verifica-se em boa aproximação uma relação de proporcionalidade entre aquelas duas quantidades (calor transferido e variação de temperatura), o que permite definir uma importante propriedade física do sistema, o **calor específico**, c , dado por:

$$\delta Q = mc \, dT$$

onde m é a massa do sistema. O produto mc é designado por **capacidade calorífica**.

Calor e Temperatura

No caso dos gases, **sistemas compressíveis**, o valor do **calor específico depende fortemente do processo** seguido.

Dois processos assumem particular importância, os processos isobáricos (a pressão constante) e os processos isocóricos (a volume constante), pois para cada um dele o calor específico é aproximadamente constante (para variações limitadas da temperatura). Assim pode escrever-se, para o processo a pressão constante:

$$\delta Q = mc_p dT$$

e para o processo a volume constante:

$$\delta Q = mc_v dT$$

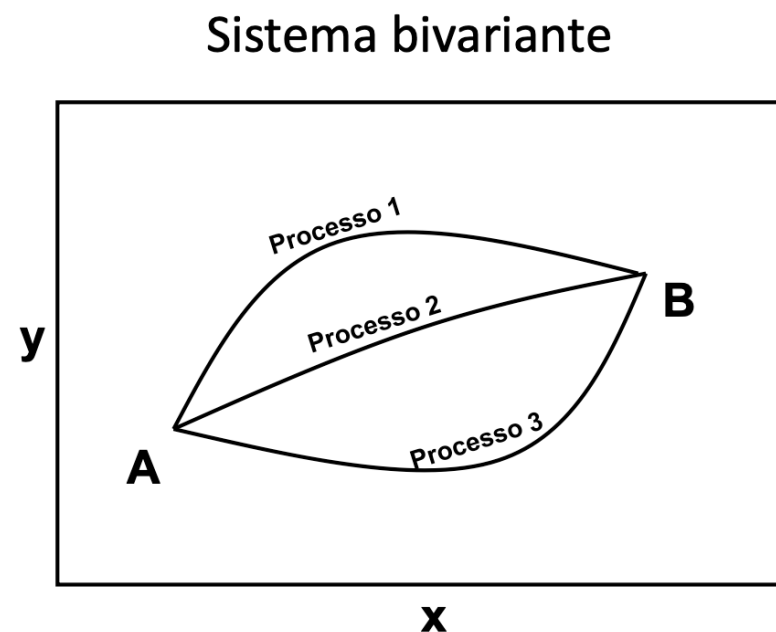
c_p e c_v são os calores específicos a pressão constante e a volume constante, respectivamente.

Apesar de se admitir equilíbrio, o interessante é estudar mudanças de estado: **processos**

Mesmo num sistema simples há infinitos processos entre quaisquer 2 estados (A,B).

Seja qual for o processo, as variáveis de estado partem de um valor bem definido em **A** e chegam a um outro valor bem definido em **B** (ou vice-versa).

O processo ocorre porque o sistema interage com outro(s) sistema(s) (o seu ambiente): essa **interação depende do processo!**



Processos termodinâmicos entre 2 estados (A e B). x e y são as variáveis de estado.

A interação dá-se através da parede

Na interação existe transferência de propriedades.

Num sistema **isolado** (sem interações) a **Energia Interna** (U) é constante.

Em geral:

$$dU = \delta Q + \delta W$$

Num sistema simples, de massa constante:

$$u = \frac{U}{m}, s = \frac{S}{m}, v = \frac{V}{m}$$

$$du = Tds - pdv$$

O **calor** e o **trabalho não são** variáveis de estado: são energia em trânsito (através da parede): dependem do processo!

O calor pode ser calculado a partir das variáveis de estado

Em processos **quase-estáticos reversíveis**: (Notar que T varia...)

$$\delta Q = TdS$$

Em processos **isobáricos** (P=const):

$$\delta Q = mc_p dT$$

Em processos **isocóricos** (V=const):

$$\delta Q = mc_v dT$$

Calores específicos: c_p , c_v , dependem da temperatura (mas variam lentamente com T).

Propriedades termodinâmicas do ar

Material	Massa volúmica kg m ⁻³	Calor específico J kg ⁻¹ K ⁻¹	Condutividade térmica W m ⁻¹ K ⁻¹
Ar seco (0°C, 1 atm)	1.293	1005 (c_{p_d}); 719 (c_{v_d})	0.024
Vapor de água (0°C, 1 atm)	0.804	1.85×10^3 (c_{p_v}); 1.39×10^3 (c_{v_v})	
Água líquida (0°C)	1000	4218	0.6
Gelo (0°C)	917	2106	2.1
Asfalto	2.11×10^3	0.92×10^3	0.75
Cobre (300 K)	8.96×10^3	385	401
Cortiça	0.16×10^3	1.80×10^3	0.05

Ar é **mau condutor**

Vapor de água é menos denso que o ar (menor massa molar)

Calores específicos do vapor são maiores que os do ar.

Calores específicos

Relação de Mayer molar:

$$c_p - c_v = R$$

mássica (para o ar seco):

$$c_{p_d} - c_{v_d} = R_d$$

Ar húmido:

$$(m_d + m_v)c_p = m_d c_{p_d} + m_v c_{p_v}$$

$$c_p = \frac{1}{1 + r} c_{p_d} + \frac{r}{1 + r} c_{p_v} \approx c_{p_d} (1 + 0.85 r)$$

Exercício 2-1. Calcule o valor do calor específico a pressão constante do ar húmido, com uma razão de mistura de vapor de 3 g kg⁻¹.

1003 g de ar húmido nas condições referidas contém 1000 g de ar seco e 3 g de vapor de água. Assim, podemos escrever para a massa

Exercício 2-1. Calcule o valor do calor específico a pressão constante do ar húmido, com uma razão de mistura de vapor de 3 g kg⁻¹.

1003 g de ar húmido nas condições referidas contém 1000 g de ar seco e 3 g de vapor de água. Assim, podemos escrever para a massa

$$m = m_d + m_v$$

e para a capacidade calorífica (c_p é o calor específico do ar húmido, c_{p_d} e c_{p_v} são os calores específicos do ar seco e do vapor, respetivamente, cf. Tabela 2-2)

$$(m_d + m_v)c_p = m_d c_{p_d} + m_v c_{p_v}$$

Logo:

$$c_p = \frac{m_d}{m_d + m_v} c_{p_d} + \frac{m_v}{m_d + m_v} c_{p_v} = \frac{1}{1+r} c_{p_d} + q c_{p_v} = \frac{1}{1+r} c_{p_d} + \frac{r}{1+r} c_{p_v}$$

Com os valores indicados e recorrendo à Tabela 2-2 pode estimar-se:

$$c_p = \frac{1}{1+3 \times 10^{-3}} 1005 + 3 \times \frac{10^{-3}}{1+3 \times 10^{-3}} 1850 \approx 1007.5 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

Estado de um gás ideal num diagrama termodinâmico

O estado de um sistema bivariante descreve uma superfície.

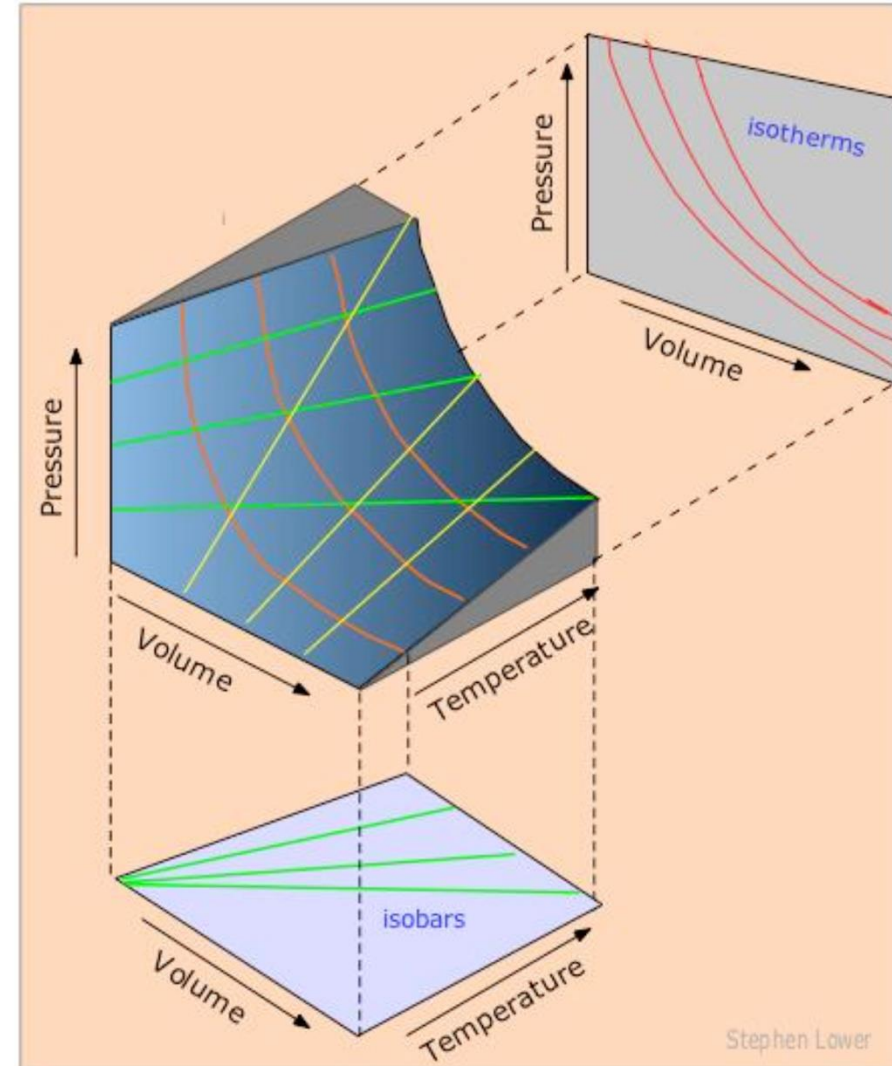
Gás ideal

$$PV = nRT$$

$$PV = mR_dT$$

$$Pv = R_dT$$

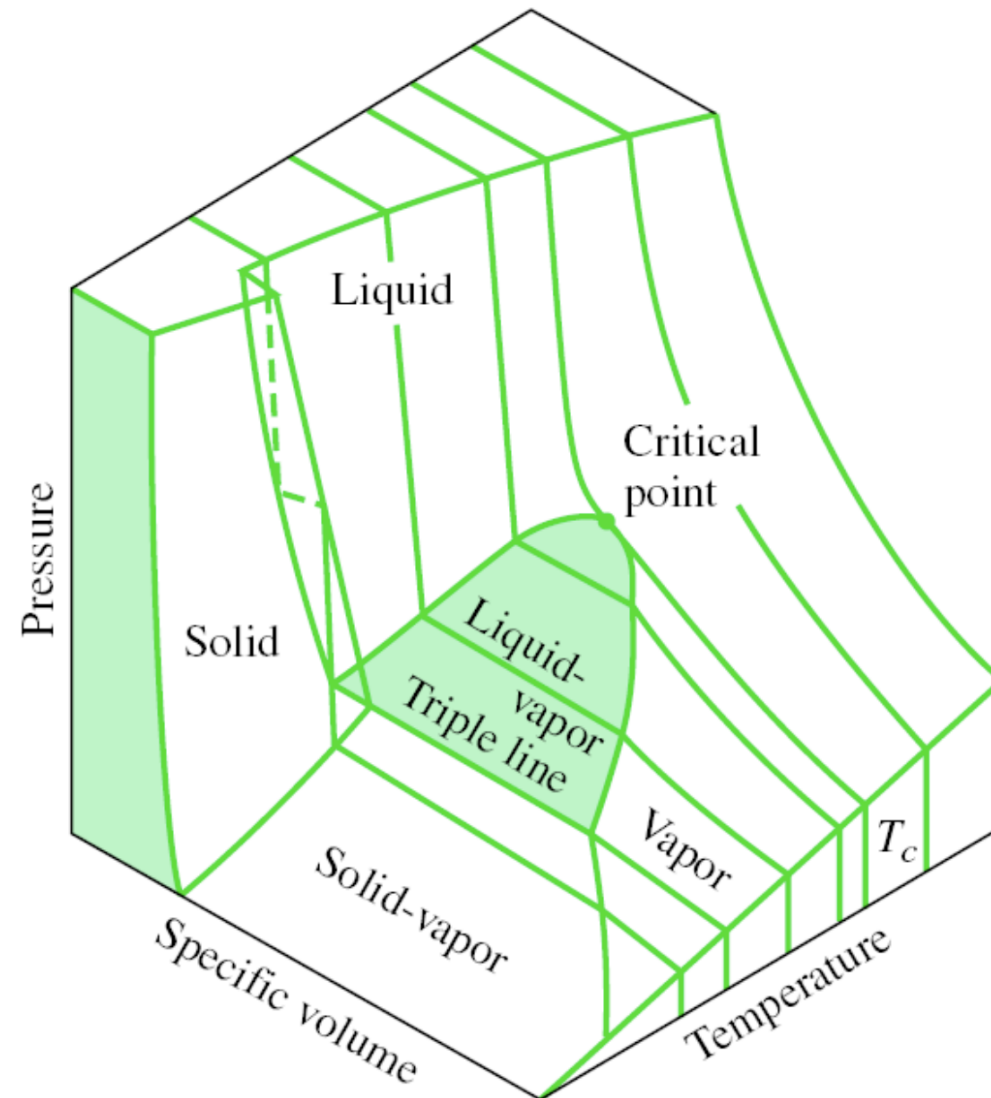
Essa superfície pode ser projetada num plano.



A água pura é também um sistema simples (bivariante)

Mas a sua superfície de estado **não é suave, nem continua.**

Certas zonas (planas) são proibidas (são instáveis): quando a água atinge a sua fronteira as suas propriedades mudam descontinuamente: existe uma **transição de fase**.

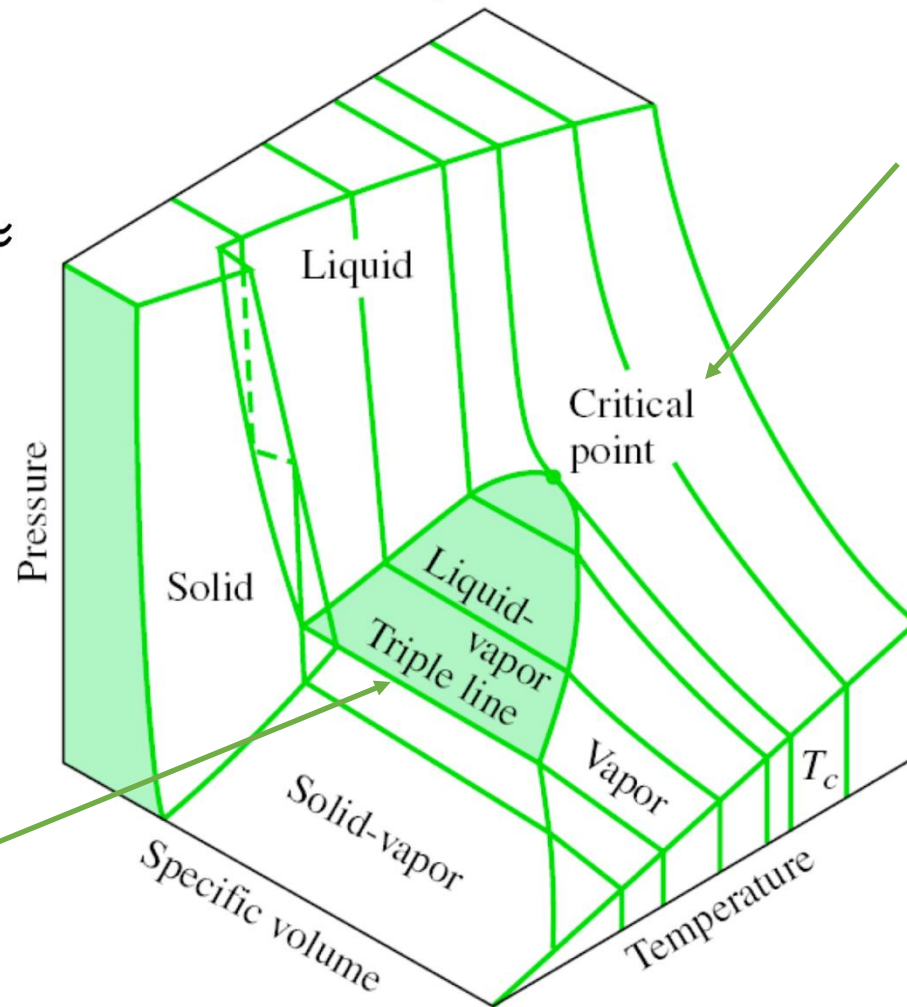


É importante perceber a equação de estado da água... (nas suas diferentes fases)

Ponto crítico ($T_c \approx 374^\circ\text{C}$)

Linha tripla ($T = 0.01^\circ\text{C}$, $p \approx 611\text{Pa}$)

Zonas de coexistência de fases.



Acima deste ponto,
**não existe distinção
entre líquido e vapor**
→ forma-se um fluido
supercrítico

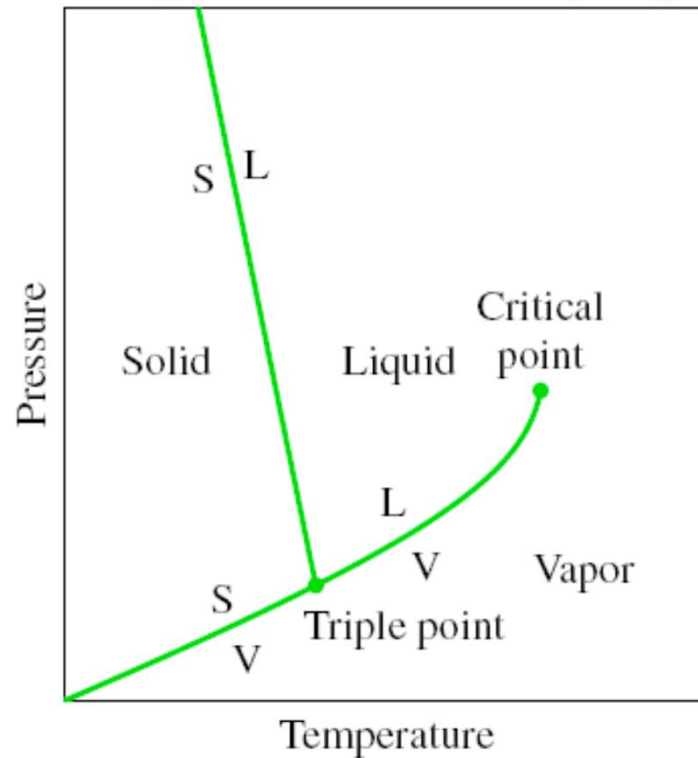
Linha tripla (Triple line)

É a interseção das três superfícies de coexistência.

Representa a condição em que **sólido, líquido e vapor coexistem em equilíbrio**.

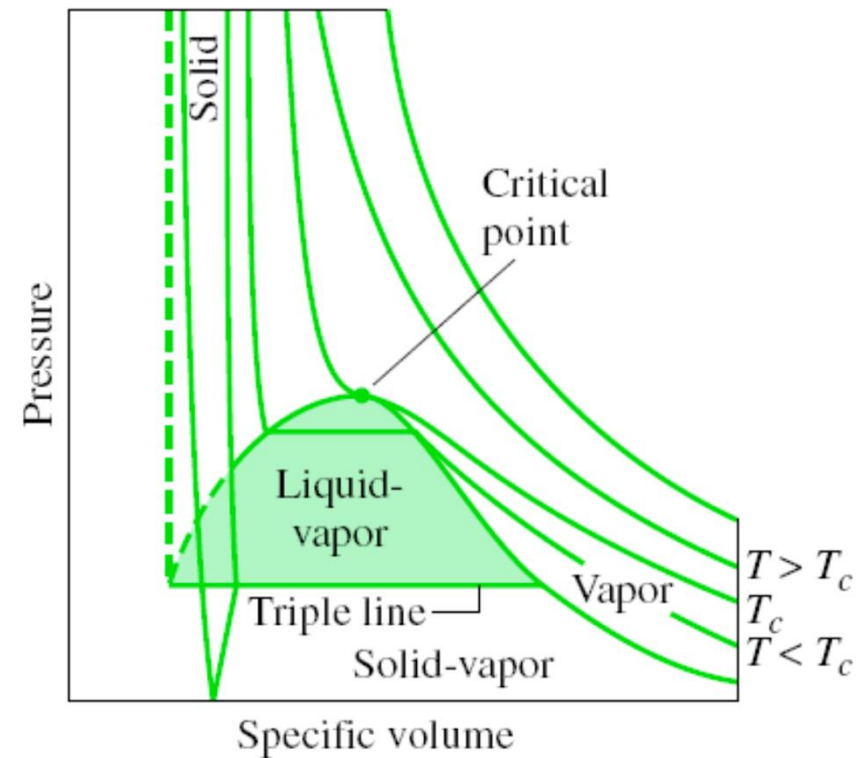
Projeção nos planos (P, T) , (P, v)

Diagrama de fases (esquema)



(b)

Diagrama de Clapeyron

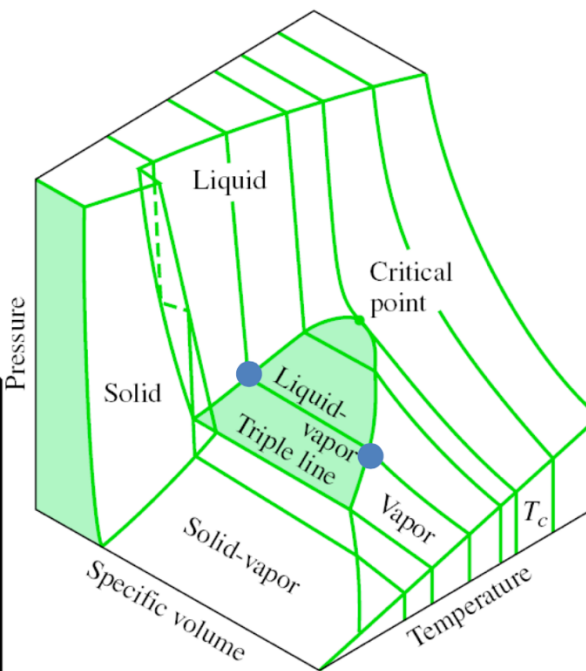
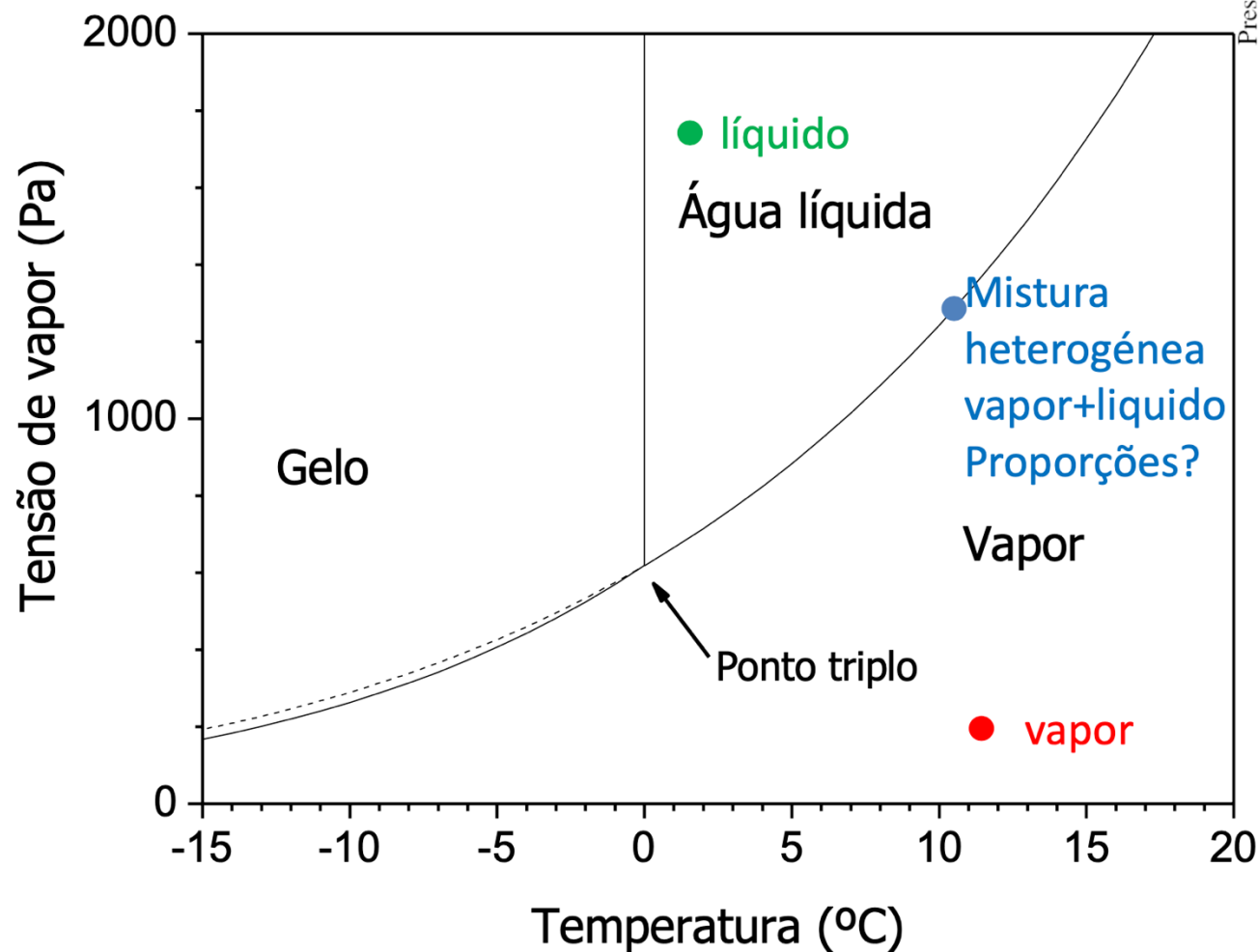


(c)

Compressibilidade: $\beta = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p}$

Vapor muito compressível, líquido e sólidos incompressíveis

Diagrama de fases (calculado)



A quantidade máxima de vapor que pode existir no ar a uma dada temperatura é dada pelo diagrama de fases (ou por uma tabela de tensões de vapor), definindo para cada valor da temperatura uma tensão de saturação *esat* (curva na Figura)

se a **tensão de vapor atingir a saturação dá-se o início de um processo de transição de fase**, formando-se água líquida ou, se a temperatura for inferior a 0°C, gelo.

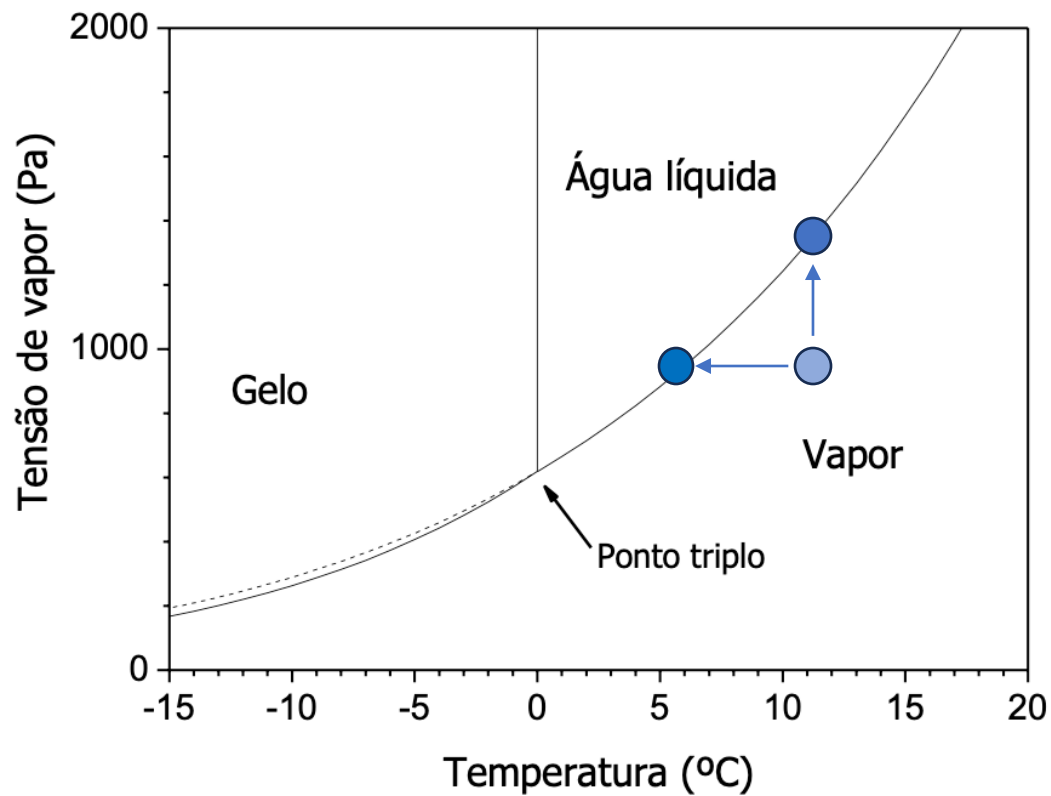
A existência de um valor máximo permitido para a concentração de vapor a cada temperatura permite definir uma nova medida da humidade atmosférica, com grande utilidade prática, a **humidade relativa**:

$$RH = \frac{e}{e^{sat}} \quad (2-9)$$

ou, recorrendo à aproximação (1-10):

$$RH = \frac{r}{r^{sat}} \quad (2-10)$$

$$\begin{cases} p_d V = n_d RT \\ e V = n_v RT \end{cases} \Rightarrow \frac{e}{p_d} = \frac{n_v}{n_d} = \frac{m_v / M_{H_2O}}{m_d / \bar{M}_d} = \frac{r}{\varepsilon} \Rightarrow r = \frac{\varepsilon e}{p_d} = \frac{\varepsilon e}{p - e} \approx \frac{\varepsilon e}{p} \quad (1-10)$$



Quando a humidade relativa atinge os 100% ($e=e_{sat}$),

o que pode ser conseguido, quer por arrefecimento do ar (redução de e_{sat}), quer por adição de vapor (aumento de e),

qualquer arrefecimento ou humidificação posterior traduz-se na condensação (ou sublimação) **de parte de vapor**, com a criação de gotículas de água (ou cristais de gelo) em suspensão no ar.

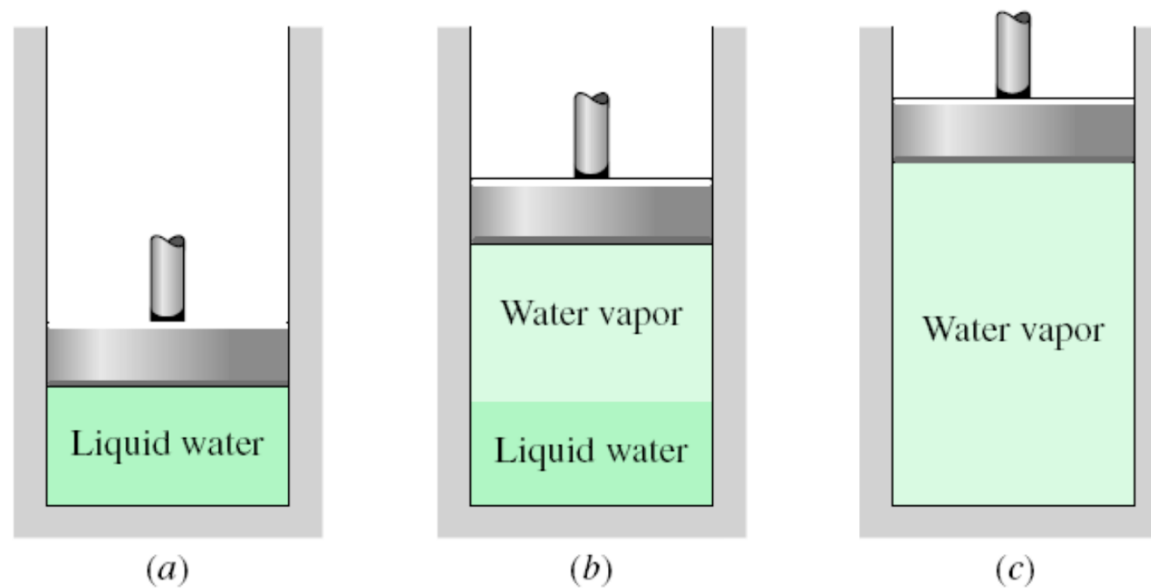
No diagrama de fases (Figura), o estado do ar húmido será então representado como um ponto sobre a linha de saturação do vapor - **concentração em água líquida ser estimada indiretamente a partir da conservação da água total (vapor + condensado)**.

Quando se dá a transição de fase, a reorganização da substância água que então tem lugar implica uma transferência de energia designada por **calor latente**.

no caso da **vaporização**, i.e. na transição de líquido para vapor, como na nova fase inicial (líquida) existem forças de ligação entre as moléculas, é necessária energia para quebrar essas ligações, observando-se absorção de **calor latente de vaporização** (lv).

Na transição simétrica, a **condensação**, a mesma quantidade de calor será libertada.

Transição de fase ($T = \text{const}$, $p = \text{const}$, v de cada fase varia descontinuamente)



◀ **Figure 3.4** Illustration of constant-pressure change from liquid to vapor for water.

Transferência de calor para o sistema – início do processo de evaporação

Durante toda a ebulição, **líquido e vapor coexistem**.

O volume do sistema aumenta à medida que mais líquido se transforma em vapor, mas T e p continuam constantes.

O calor fornecido neste processo é o **calor latente de vaporização**.

Calores latentes da água

Processo	Transição	Calor latente (a 0°C)
Evaporação/Condensação	Líquido $\leftrightarrow$ Vapor	$l_v = \pm 2.5 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Fusão/Congelação	Sólido $\leftrightarrow$ Líquido	$l_f = \pm 3.34 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Sublimação/Sublimação	Sólido $\leftrightarrow$ Vapor	$l_s = l_v + l_f$

A transição de fase é um **processo reversível**: a **mesma** quantidade de calor libertada na condensação é absorvida na evaporação (se à mesma temperatura).

Os calores latentes diminuem com a temperatura (aprox. 1%/10K).

Os calores latentes da água têm valores elevados.

Arrefecimento isobárico do ar húmido

Ar húmido = Ar seco + vapor de água + condensados (liq/sol)

No caso homogéneo (monofásico): ar seco + água, existem 3 variáveis independentes, por exemplo (T,P,e) ou (T,P,r). Em processos isobáricos ($p=\text{const}$) ficam 2 variáveis e os estados e processos podem ser representados num **diagrama 2D**.

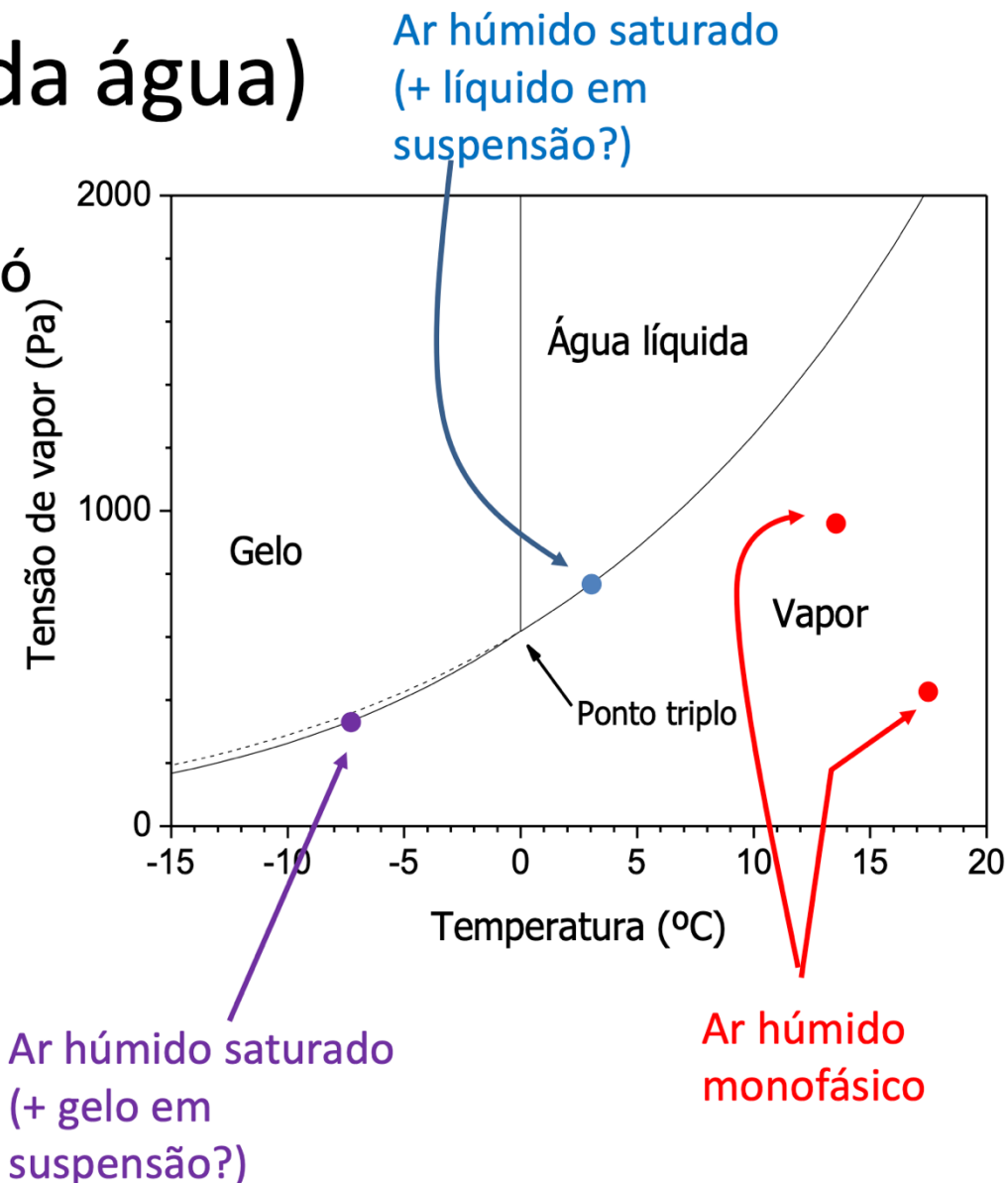
Se existirem condensados, o número de graus de liberdade diminui: só pode existir líquido na **curva de saturação** vapor/líquido; só pode existir gelo na curva de saturação vapor/gelo; só podem existir as 3 fases no **ponto triplo** (regra das fases de Gibbs).

Diagrama de fases (da água)

Apesar do diagrama de fases só representar a água, ele pode representar o ar húmido se $p = \text{const.}$

Notar:

1. É preciso conhecer a **pressão**
2. A **quantidade de condensados** não é dada pelo diagrama (mas pode ser calculada)



Lendo o diagrama de fases

$$RH = \frac{e}{e^{sat}} \approx 58 \%$$

Variáveis base: T, e

Pode calcular-se:

$$r \approx \frac{\varepsilon e}{p}$$

onde se tem a densidade do vapor em relação ao ar:

$$\varepsilon = \frac{M_{H_2O}}{M_d} \approx 0.622$$

$r = \frac{m_v}{m_d}$ é **adimensional**, como é um número pequeno é descrito em g/kg

