

ANÁLISE MATEMÁTICA III

Exame 30/1/2026

versão A

A duração do exame é de 2h30m. O exame é sem consulta. Não é permitido o uso de telemóveis ou calculadoras.

Pergunta 1 (4 valores)

- a) Seja (X, d) um espaço métrico. Defina os conceitos de conjunto aberto e de conjunto fechado.
- b) Considere agora o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a distância discreta

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

Nesta métrica, o conjunto $[-2, 2]$ é fechado? É aberto?

Pergunta 2 (3 valores)

A função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^3}{4}$ é uma contracção?

Pergunta 3 (3 valores)

Determine $u'(x)$, onde $u(x) = \int_1^3 \frac{\sin(xt)}{t} dt$.

Pergunta 4 (4 valores)

Mostre que a série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n^2 x^7)}{n^3}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Pergunta 5 (6 valores)

Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (e^x \cos y - \sin y, e^x \sin y + \cos y)$.

- a) Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ a função F é difeomorfismo local?
- b) F é globalmente invertível?
- c) Seja G a inversa local de F numa vizinhança de $(0, 0)$. Calcule a matriz jacobiana de G no ponto $F(0, 0) = (1, 1)$.