



Ciências | Engenharia Geográfica,
ULisboa Geofísica e Energia

Fundamentos de Cartografia

Aulas Práticas

Licenciatura em Engenharia Geoespacial

2025/2026

1. Escala da carta e outros aspetos relacionados com a representação do terreno na cartografia analógica

1.1. Sabendo que a distância entre os vértices geodésicos SANTA SUSANA e CRUTO da Rede Geodésica Nacional (RGN) medida com uma régua na folha n.º 339 da Carta Militar de Portugal (Série M888) é igual a 9.9 cm, calcule a correspondente distância horizontal no terreno.

1.2. O erro máximo que poderá afetar o valor de uma distância horizontal no terreno (ε_D), determinada a partir de uma medição sobre uma carta, é calculado com base no erro máximo que se comete nessa medição (ε_d), sendo este função do erro de graficismo (ε_g), do erro do instrumento de medição (ε_m) e do erro de deformação do suporte da carta (ε_f). Logo, o valor máximo de (ε_D) é igual ao valor de (ε_d) convertido à escala da carta:

$$\varepsilon_d = \varepsilon_g + \varepsilon_m + \varepsilon_f$$

$$\varepsilon_D = \varepsilon_d \cdot N$$

Sabendo que se mediu com uma régua graduada em mm uma distância de 3.3 cm entre os vértices geodésicos MARCO GRANDE e CABEÇA RUIVA na folha n.º 30-A da Carta Corográfica de Portugal à escala 1:50 000, e ainda que se considera o suporte da carta indeformável, calcule a correspondente distância horizontal no terreno e o erro máximo que poderá afetar o valor dessa distância.

1.3. Uma carta regular é aquela em que o erro do levantamento não tem representação por, reduzido à escala da carta, ser inferior ao erro de graficismo. A primeira carta regular abrangendo toda a área de Portugal Continental foi executada na escala 1:100 000. Qual foi o erro máximo admissível no respetivo levantamento?

1.4. Considerando os dois níveis de detalhe (NdD1 e NdD2) da Cartografia Topográfica que constam nas “Normas e especificações técnicas para a cartografia topográfica vetorial e de imagem”¹ definidas pela Direção-Geral do Território (DGT), e em concreto o que é determinado em termos de exatidão posicional planimétrica dos objetos (secção 7.3, página 173), determine as maiores escalas que podem ser utilizadas nesses dois níveis de detalhe.

¹ <https://www.dgterritorio.gov.pt/sites/default/files/ficheiros-cartografia/NormasEspecificacoesTecnicasCartTopV2.0.2.pdf>

TOLERÂNCIA	O EMQ deve assumir valores iguais ou melhores a:				
		NdD1		NdD2	
		1:1000	1:2000	1:5000	1:10000
	Exatidão posicional planimétrica (m)	0,18	0,30	0,75	1,50
	Exatidão posicional altimétrica (m)	0,25	0,40	1,00	1,70
	90% dos pontos avaliados devem assumir valores iguais ou melhores a:				
		NdD1		NdD2	
		1:1000	1:2000	1:5000	1:10000
	Planimetria (m)	0,27	0,45	1,25	2,30
	Altimetria (m)	0,41	0,65	1,65	2,75
ÂMBITO DE APLICAÇÃO	Todos os objetos com geometria.				

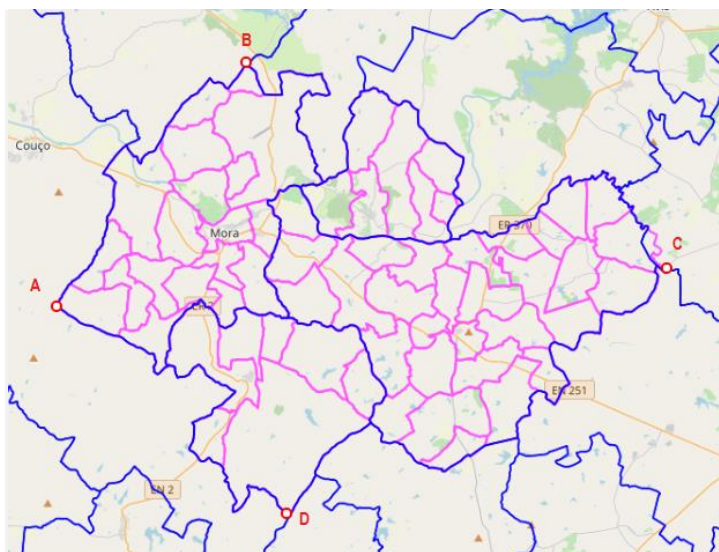
Tabela 108: Parâmetro de qualidade 3.1.1 – Exatidão posicional absoluta dos objetos

1.5. Mostre que uma folha de uma carta na escala 1:5 000, de dimensões 64 x 40 cm², abrange a mesma superfície de terreno que 4 folhas de dimensões 80 x 50 cm² de uma carta na escala 1:2 000.

1.6. Tendo uma folha de papel com uma área útil de 80 cm x 50 cm, calcule a maior escala possível para representar uma propriedade quadrada com 18.35 ha (1 hectare é equivalente a 10 000 m²), cujos lados estão alinhados aproximadamente com a direção Norte-Sul e Este-Oeste.

1.7. Considerando que o vértice geodésico CAVALEIROS tem as seguintes coordenadas M= -65.25 km e P= -118.90 km na Carta Corográfica de Portugal na escala 1:50 000, produzida pela DGT, calcule as coordenadas de um ponto localizado, nessa mesma carta, 3.2 cm a Oeste e 2.1 cm a Norte do vértice.

1.8. Considerando a informação vetorial relativa ao Cadastro Geométrico da Propriedade Rústica do Concelho de Mora, Distrito de Évora, representada na figura, calcule quantas folhas de papel com uma área útil de 80 cm x 50 cm, respetivamente na direção Este-Oeste e Norte-Sul, seriam necessárias para representar esta informação à escala 1:10 000.



Coordenadas retangulares PT-TM06/ETRS89

A (-12 040 m, -84 377 m)

B (-1 607 m, -71 033 m)

C (21 533 m, -82 268 m)

D (617 m, -95 732 m)

1.9. Sabendo que as coordenadas dos vértices geodésicos MARCO GRANDE e CABEÇA RUIVA da Rede Geodésica Nacional (RGN)² no sistema de referência PT-TM06/ETRS89, são respetivamente (-104 009.12 m, -58 072.99 m) e (-102 586.00 m, -58 910.19 m), e que as respetivas altitudes ortométricas (cotas) são 135.5 m e 125.3 m:

- Calcule a distância horizontal entre esses dois pontos e a correspondente distância inclinada;
- Compare a distância obtida na alínea anterior com a obtida no exercício 1.2, que resultou da medição dessa mesma distância na Carta Corográfica de Portugal à escala 1:50 000.

² Lista dos vértices geodésicos da Rede Geodésica Nacional (RGN), a qual pode ser descarregada da página de internet da DGT <https://www.dgterritorio.gov.pt/geodesia/infraestrutura-geodesica>

2. Análise de cartografia em formato analógico e identificação dos principais elementos

2.1. Consultando o sítio de internet da DGT³ e o do IGEOE⁴, identifique as principais características da Carta Corográfica de Portugal, à escala 1:100 000 e 1:50 000, e da Carta Militar de Portugal, à escala 1:25 000.

- a) Designação da série cartográfica;
- b) N° de folhas;
- c) Seccionamento (área de terreno representada numa folha);
- d) Código EPSG⁵ do sistema de referência.

Designação da série cartográfica	N° de folhas	Seccionamento	Código EPSG
Carta Corográfica 1:100 000			
Carta Corográfica 1:50 000			
Carta Militar de Portugal 1:25 000			

2.2. Analisando uma qualquer folha da Carta Militar de Portugal à escala 1:25 000, identifique os seguintes elementos constituintes da carta:

- a) Designação da carta. Número de código da carta.
- b) Entidade que a publica.
- c) Escala numérica. Escala gráfica.
- d) Identificação da folha.
- e) Designação da folha pelo nome da povoação mais importante.
- f) Quadro de indicação das folhas contíguas.
- g) Sinais convencionais. Equidistância das curvas de nível. Datum altimétrico.
- h) Datum planimétrico (o elipsoide e o seu posicionamento). Projeção cartográfica.
- i) Referenciais de coordenadas.
- j) Diagrama de declinação e convergência de meridianos. Escala de tangentes.
- k) Data da aquisição de dados. Data de publicação.

³ <https://www.dgterritorio.gov.pt/cartografia/cartografia-topografica>

⁴ <https://www.igeoe.pt/index.php?id=38&cat=3>

⁵ <https://epsg.io/>

2.3. Consultando o sítio de internet da DGT⁶ e o do CIGeoe⁷, descarregue:

- a) Os ficheiros do seccionamento das cartas à escala 1:100 000 e 1:50 000 (formato vetorial – shapefile) e utilize a aplicação informática QGIS para os visualizar;
- b) O cartograma com o seccionamento da cartografia às escalas 1:250 000, 1:50 000, e 1:25 000.

2.4. Com base no cartograma que descarregou no exercício anterior e sabendo que na projeção adotada a meridiana origem separa as folhas 23 e 24 e a perpendicular origem separa as folhas 24 e 28, calcule:

- a) As coordenadas TM/WGS84 do ponto médio da folha n.º 253 (Pampilhosa da Serra) da Carta Militar de Portugal à escala 1:25 000;
- b) As coordenadas TM/WGS84 do ponto médio da folha n.º 23-3 (Leiria) da Carta Militar de Portugal à escala 1:50 000;
- c) As coordenadas PT-TM06/ETRS89 do ponto médio da folha n.º 23-C (Leiria) da Carta Corográfica de Portugal à escala 1:50 000.
- d) As coordenadas PT-TM06/ETRS89 do ponto médio da folha n.º 30 (Torres Vedras) da Carta Corográfica de Portugal à escala 1:100 000.

⁶ <https://www.dgterritorio.gov.pt/cartografia/cartografia-topografica>

⁷ https://www.igeoe.pt/downloads/file97_pt.pdf

3. Coordenadas nos diferentes sistemas de referência representados na cartografia analógica

3.1. Calcule para o vértice geodésico _____ representado na folha n.º _____ da Carta Corográfica de Portugal (escala 1:50 000), as correspondentes coordenadas retangulares PT-TM06/ETRS89, UTM-ETRS89 e UTM-ED50. Compare as coordenadas retangulares PT-TM06/ETRS89 obtidas com as coordenadas que constam no ficheiro Excel com a lista dos vértices geodésicos da Rede Geodésica Nacional (RGN)⁸. Teça algumas considerações relativas às diferenças observadas.

3.2. Calcule as coordenadas retangulares do vértice geodésico _____ da folha n.º _____ da Carta Militar de Portugal (escala 1:25 000) referentes às seguintes quadrículas:

- a) Transversa de Mercator/WGS84;
- b) UTM-WGS84;

3.3. Converta as coordenadas retangulares calculadas nas alíneas a) e b) do exercício anterior nas correspondentes coordenadas em notação militar.

3.4. Considerando o mesmo vértice que adotou nos exercícios anteriores, calcule, com base na respetiva Carta Militar de Portugal (escala 1:25 000), as coordenadas geográficas desse mesmo vértice referente à rede geodésica WGS84.

3.5. Transforme as seguintes coordenadas retangulares em notação militar nas respetivas coordenadas retangulares M e P.

- a) G 462.875
- b) C 0527.7685
- c) X 87046.00034

3.6. Sabendo que as coordenadas geográficas WGS84 do centro da cidade de Paris (França) são $\phi = 48^\circ 51' 12.28''$ N e $\lambda = 2^\circ 20' 55.68''$ E, calcule o fuso, zona e quadrado (coluna e linha) das respetivas coordenadas retangulares militares UTM/WGS84⁹.

⁸ <https://www.dgterritorio.gov.pt/geodesia/infraestrutura-geodesica>

⁹ <http://www.csgnetwork.com/degreetlenllavcalc.html> A uma latitude de 49° , o comprimento de 1° de latitude é 111 209.70 m e o comprimento de 1° de longitude é 73 171.77 m

3.7. Sabendo que as coordenadas geográficas WGS84 da estação MAS100ESP (Maspalomas, Espanha) da rede global de estações permanentes IGS¹⁰ são $\phi = 27.764^\circ \text{ N}$ e $\lambda = 15.633^\circ \text{ W}$, utilize a seguinte ligação de internet¹¹ para calcular as correspondentes coordenadas retangulares UTM/WGS84 na notação militar.

3.8. Considerando a folha n.º 353 da Carta Militar de Portugal à escala 1:25 000, e sabendo que as coordenadas geográficas WGS84 dos quatro cantos da carta são ($39^\circ 18' 23''.9 \text{ N}$, $08^\circ 41' 22''.6 \text{ W}$; $39^\circ 18' 26''.6 \text{ N}$, $08^\circ 30' 14''.8 \text{ W}$; $39^\circ 13' 02''.3 \text{ N}$, $08^\circ 30' 13''.1 \text{ W}$; $39^\circ 12' 59''.7 \text{ N}$, $08^\circ 41' 20''.0 \text{ W}$), calcule a convergência de meridianos no centro da folha considerando a quadrícula UTM, Fuso 29 - WGS84.

3.9. Considerando os vértices geodésicos MARCO GRANDE e CABEÇA RUIVA da RGN no sistema de referência PT-TM06/ETRS89 utilizados no exercício 1.9, calcule:

- a) O azimute Cartográfico (ou Rum) relativo ao Norte Cartográfico da direção MARCO GRANDE-CABEÇA RUIVA, e o correspondente azimute verdadeiro (ou azimute geográfico) relativo ao Norte verdadeiro (ou Norte Geográfico), sabendo que a convergência de meridianos no centro da folha n.º 30-A da Carta Corográfica de Portugal à escala 1:50 000 é $0^\circ 49' \text{ W}$;
- b) O correspondente azimute magnético à época 2010.5, sabendo que o ângulo entre o Norte cartográfico e o Norte magnético na época 2006.5 (data de publicação da carta) era $3^\circ 04' \text{ W}$ com uma variação anual de $-10'$.

3.10. Efetue um script com a linguagem PYTHON (biblioteca pyproj¹²) que leia um ficheiro .txt (com delimitadores Tab) com as coordenadas geográficas ETRS89 (EPSG: 4258) de sete vértices geodésicos distribuídos por Portugal Continental e que gere um ficheiro .txt com:

- a) as correspondentes coordenadas retangulares relativas ao sistema de referência PT-TM06/ETRS89 (EPSG: 3763);
- b) e, ainda, os valores da convergência de meridianos, escala ao longo do meridiano, escala ao longo do paralelo, distorção angular, distorção areal, semieixo maior e semieixo menor da elipse de Tissot¹³.

¹⁰ <https://igs.org/network-resources#about>

¹¹ <http://rcn.montana.edu/resources/Converter.aspx>

¹² <https://pyproj4.github.io/pyproj/stable/api/proj.html>

¹³ <https://pyproj4.github.io/pyproj/stable/api/proj.html#pyproj.proj.Factors>

Ficheiro de entrada

 pontos_PT_epsg4258.txt - Notepad

File Edit Format View Help

SANTA LUZIA (05A)	41.84975178	-7.046050972
LUZ (08A)	41.66298344	-6.307017444
MELRIÇA-TF4 (24C)	39.69414006	-8.1301465
CASCAIS-TGGS (34C)	38.69009208	-9.426122722
ELVAS (37A)	38.87886422	-7.051706722
TORRE DE ASPA-PE (51B)	37.08551133	-8.951764361
CABEÇA (50D)	37.10981456	-7.782487528
PC - PONTO ORIGEM	39.66825833	-8.133108333

Ficheiro de saída

 pontos_PT_epsg3763_factors.txt - Notepad

File Edit Format View Help

Name	Easting (m)	Northing (m)	Convergence	Meridian Scale	Parallel Scale	Angular Distortion
SANTA LUZIA (05A)	90275.69	242824.66	0.725311	1.000100	1.000100	0.000000
LUZ (08A)	152091.74	223120.60	1.214122	1.000285	1.000285	0.000000
MELRIÇA-TF4 (24C)	254.05	2873.61	0.001892	1.000000	1.000000	0.000000
CASCAIS-TGGS (34C)	-112498.27	-107801.37	-0.808358	1.000156	1.000156	0.000000
ELVAS (37A)	93838.65	-87083.22	0.678819	1.000108	1.000108	0.000000
TORRE DE ASPA-PE (51B)	-72788.94	-286380.80	-0.493676	1.000065	1.000065	0.000000
CABEÇA (50D)	31164.46	-283939.69	0.211547	1.000012	1.000012	0.000000
PC - PONTO ORIGEM	0.00	-0.00	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000

...

Angular Distortion	Areal Distortion	Tissot Semimajor	Tissot Semiminor
0.000000	1.000200	1.000100	1.000100
0.000000	1.000569	1.000285	1.000285
0.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.000000	1.000312	1.000156	1.000156
0.000000	1.000217	1.000108	1.000108
0.000000	1.000130	1.000065	1.000065
0.000000	1.000024	1.000012	1.000012
0.000000	1.000000	1.000000	1.000000

4. Transformação de coordenadas numa dada projeção cartográfica

4.1. Usando a linguagem PYTHON, calcule o arco de meridiano, m , entre o paralelo correspondente à latitude da origem da projeção de Gauss no sistema de referência PT-TM06/ETRS89 e o paralelo que passa pelo vértice geodésico CASCAIS-TGGSS, recorrendo às equações (5.12) e (5.13) nos slides 108 e 109 do PowerPoint com a matéria teórica.

Vértice Geodésico	Folha da Carta Corográfica de Portugal 1:50 000	Ordem do VG	Coordenadas Geodésicas	Coordenadas Retangulares
CASCAIS-TGGS	34C	1ª	38° 41' 24.3315" N 09° 25' 34.0418" W 65.82 m	-112 498.27 m -107 801.37 m 12.47 m

4.2. Usando a linguagem PYTHON, converta as coordenadas geográficas (ϕ , λ) no sistema de referência ETRS89 (EPSG: 4258) do vértice geodésico CASCAIS-TGGS, nas correspondentes coordenadas retangulares (M , P) no sistema de referência PT-TM06/ETRS89 (EPSG: 3763), recorrendo às equações (10.36) e (10.37) no slide 224 do PowerPoint com a matéria teórica.

Esta conversão corresponde à projeção Transversa de Mercator, também designada por Gauss-Krüger, no sentido direto, ou seja, transforma coordenadas geográficas (ϕ , λ) nas correspondentes coordenadas retangulares (M , P).

4.3. Complementar o *script* elaborado com base nos exercícios 4.1 e 4.2 por forma a este calcular a mesma transformação (Gauss Direta), adotando o sistema de coordenadas retangulares UTM/ETRS89 – Fuso 29N (EPSG: 25829). Utilize a aplicação “Transform coordinates”¹⁴ da epsg.io, para calcular as coordenadas UTM/ETRS89 – Fuso 29N correspondentes às coordenadas geográficas do qualquer vértice geodésico CASCAIS-TGGS, para validar os seus resultados.

Transform coordinates

Online converter for lat & long coordinates, geodetic datums and projected systems

Input coordinate system

EPSG:4258 ETRS89 [Change](#)

Input coordinates

Longitude:

Latitude:

Transform

Swap ⇄

Output coordinate system

EPSG:25829 ETRS89 / UTM zone 29N [Change](#)

Output coordinates

X:

Y:

¹⁴ https://epsg.io/transform#s_srs=4326&t_srs=3857&x=NaN&y=NaN

4.4. Usando a linguagem PYTHON, converta as coordenadas retangulares (M, P) nos sistemas definidos nos exercícios anteriores, ou seja, PT-TM06/ETRS89 (EPSG: 3763) e UTM/ETRS89 – Fuso 29N (EPSG: 25829) do vértice geodésico CASCAIS-TGGS, nas correspondentes coordenadas geográficas (ϕ, λ) no sistema de referência ETRS89 (EPSG: 4258), de acordo com o processo iterativo descrito nos slides 227 a 229 do PowerPoint com a matéria teórica.

Esta conversão corresponde à projeção Transversa de Mercator, também designada por Gauss-Krüger, no sentido inverso, ou seja, transforma coordenadas retangulares (M, P) nas correspondentes coordenadas geográficas (ϕ, λ).

4.5. Complementar o *script* elaborado com base nos exercícios 4.1 a 4.4 por forma a este calcular a convergência de meridianos (γ) recorrendo às equações (10.38) e (3.01) no slide 225, e o fator de escala (k) recorrendo à equação (10.39) no slide 226 do PowerPoint com a matéria teórica.

4.6. Usando a linguagem PYTHON, calcule:

- o comprimento da loxodrómica entre os pontos Halifax, Nova Escócia, Canadá ($44^{\circ} 40' N, 63^{\circ} 35' W$) e Lerwick, Shetland, Reino Unido ($60^{\circ} 09' N, 01^{\circ} 09' W$) e o seu azimute constante, considerando uma esfera de raio igual a 6 371 km e também o elipsoide WGS84 (solução mais rigorosa), recorrendo às equações no slide 213, utilize a aplicação RhumbSolve¹⁵ para validar estes valores;
- o comprimento do correspondente círculo máximo (geodésica) e o seu azimute inicial, considerando uma esfera de raio igual a 6 371 km, recorrendo às equações (10.26) e (10.27) no slide 214, e também o elipsoide WGS84, utilizando a aplicação GeodSolve¹⁶.

4.7. Considerando que as coordenadas geográficas (ϕ, λ) no sistema ETRS89 e as correspondentes coordenadas retangulares (M, P) no sistema PT-TM06/ETRS89, de três vértices geodésicos da RGN, calcule:

Vértices	(ϕ, λ)	(M, P)
Ponto A - SEIXO (folha 24C)	($39^{\circ} 43' 55.7827'' N, 8^{\circ} 7' 52.5551'' W$)	(158.00, 7 095.10)
Ponto B1 - FRAGA DA NAVE (folha 21D)	($40^{\circ} 01' 30.5512'' N, 6^{\circ} 54' 39.9879'' W$)	(104 314.43, 40 342.10)
Ponto B2 - FERRONHO (folha 11D)	($41^{\circ} 07' 48.9820'' N, 6^{\circ} 53' 21.2107'' W$)	(104 449.13, 163 091.32)

¹⁵ <https://geographiclib.sourceforge.io/cgi-bin/RhumbSolve>

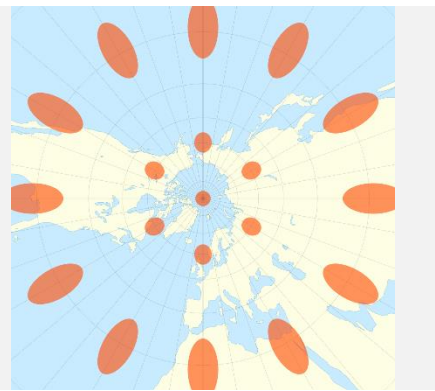
¹⁶ <https://geographiclib.sourceforge.io/cgi-bin/GeodSolve>

- a) a correção do arco à corda (δ) a aplicar para converter o azimuth da geodésica (α) entre $AB1$ e entre $AB2$, no azimuth da corda (α_0) correspondente a essas geodésicas, recorrendo à equação (10.48) no slide 232;
- b) a correção de redução aos comprimentos finitos a aplicar para determinar a distância elipsoidal $AB1$ e $AB2$ a partir da correspondente distância plana, recorrendo às equações nos slides 235 e 236. Confirme o valor obtido para o comprimento das geodésicas, utilizando a aplicação GeodSolve¹⁷;
- c) o azimuth da geodésica (α) e o azimuth da corda correspondente (α_0), utilizando as expressões no slide 237. Discuta os valores obtidos nas três alíneas.

4.8. Considerando as expressões algébricas da **projeção gnomónica**¹⁸ para o cálculo das coordenadas polares (r, θ) a partir das coordenadas geográficas (ϕ, λ), calcule:

$$r = \tan \chi$$

$$\theta = \lambda$$



- a) o semieixo maior (a) e semieixo menor (b) da elipse de Tissot para um ponto com as seguintes coordenadas geográficas (40°.42 N, 3°.70 W);
- b) a deformação areal (p) e a deformação angular (ω), para esse mesmo ponto e, com base nos resultados obtidos, mencione algumas características desta projeção.

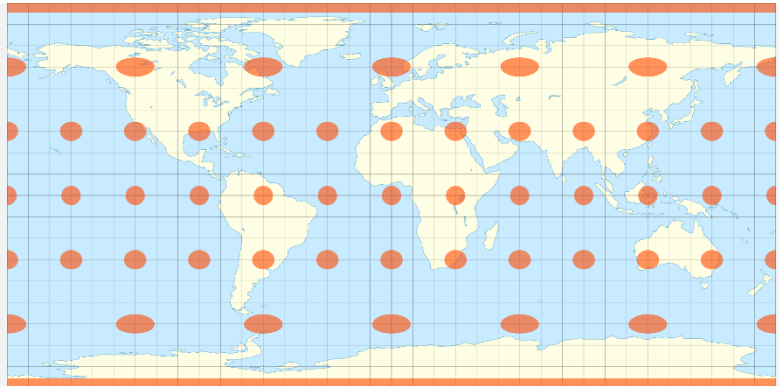
¹⁷ <https://geographiclib.sourceforge.io/cgi-bin/GeodSolve>

¹⁸ Na projeção gnomónica as geodésicas são representadas como linhas retas.

4.9. Considerando as expressões algébricas da **projeção de Plate Carrée** para o cálculo das coordenadas retangulares (M, P) a partir das coordenadas geográficas (ϕ, λ), calcule:

$$x = \lambda$$

$$y = \phi$$

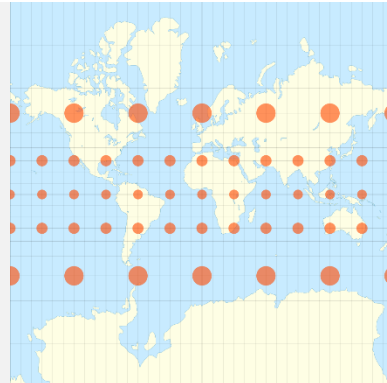


- o semieixo maior (a) e semieixo menor (b) da elipse de Tissot para um ponto com as seguintes coordenadas geográficas ($40^{\circ}.42\text{ N}$, $3^{\circ}.70\text{ W}$);
- as coordenadas retangulares (M, P) para esse mesmo ponto, considerando uma esfera de raio igual a 6 371 km;
- identifique qual a propriedade especial (conformidade, equivalência ou equidistância) que caracteriza esta projeção.

4.10. Considerando as expressões algébricas da **projeção de Mercator** para o cálculo das coordenadas retangulares (M, P) a partir das coordenadas geográficas (ϕ, λ), calcule:

$$x = \lambda$$

$$y = \ln \tan(\pi/4 + \phi/2)$$



- o semieixo maior (a) e semieixo menor (b) da elipse de Tissot para um ponto com as seguintes coordenadas geográficas ($40^{\circ}.42\text{ N}$, $3^{\circ}.70\text{ W}$);
- as coordenadas retangulares (M, P) para esse mesmo ponto, considerando uma esfera de raio igual a 6 371 km;
- calcule a deformação areal (p) para esse mesmo ponto.