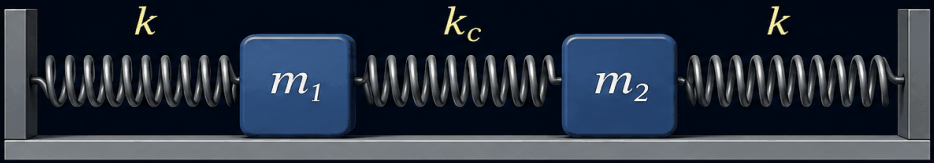
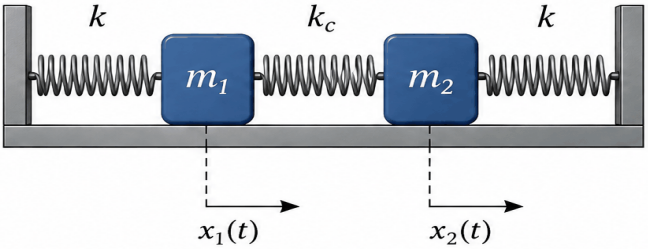
Osciladores acoplados e modos normais



- Quando vários osciladores interagem entre si, o movimento de cada um depende dos restantes.
- O sistema pode oscilar em **frequências próprias** características.
- Cada frequência própria está associada a um **modo normal**.
- Os modos normais permitem compreender a **dinâmica colectiva** de sistemas com muitos graus de liberdade.

Dois osciladores acoplados

- Consideremos duas massas m_1 e m_2 ligadas a molas e acopladas entre si.
- As extremidades estão fixas a suportes rígidos.
- As posições de equilíbrio são tomadas como origem.
- Pequenas oscilações ao longo de uma linha recta horizontal.
- Coordenadas generalizadas:
  $x_1(t)$ e $x_2(t)$
  deslocamentos das massas a partir das posições de equilíbrio.



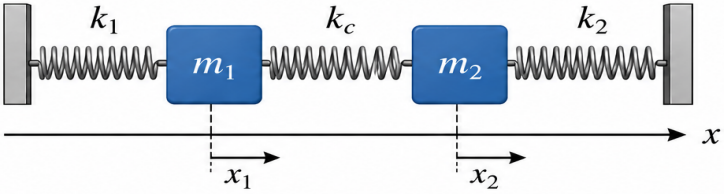
k – constante elástica das molas externas,
k_c – constante elástica da mola de acoplamento.

Hipóteses: molas ideais (massa desprezável), atrito desprezável, movimentos pequenos.

Forças restauradoras e força de acoplamento

Sistema

- Duas massas m_1 e m_2.
- Ligadas por molas.
- Constantes diferentes nas extremidades: k_1 e k_2.
- Constante de acoplamento k_c entre as massas.



Forças sobre cada massa

Massa m_1

- Força da mola da esquerda:

$$\vec{F}_1^{(k1)} = -k_1 x_1 \, \vec{u}_x$$

- Força da mola de acoplamento:

$$\vec{F}_1^{(c)} = -k_c \, (x_1 - x_2) \, \vec{u}_x$$

Força total em m_1:

$$\vec{F}_1 = -k_1 x_1 \, \vec{u}_x - k_c \, (x_1 - x_2) \, \vec{u}_x$$

Massa m_2

- Força da mola da direita:

$$\vec{F}_2^{(k2)} = -k_2 x_2 \, \vec{u}_x$$

- Força da mola de acoplamento:

$$\vec{F}_2^{(c)} = -k_c \, (x_2 - x_1) \, \vec{u}_x = k_c \, (x_1 - x_2) \, \vec{u}_x$$

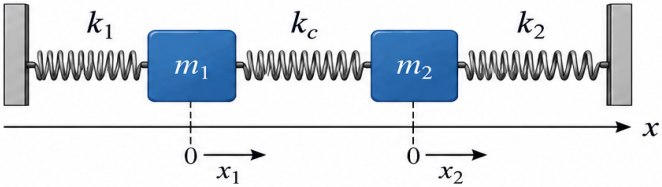
Força total em m_2:

$$\vec{F}_2 = -k_2 x_2 \, \vec{u}_x + k_c \, (x_1 - x_2) \, \vec{u}_x$$

Equações de movimento (caso geral)

Sistema

- Duas massas m_1 e m_2.
- Constantes k_1, k_2 e k_c.



Equações de movimento

Pela 2.ª lei de Newton:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_c)\, x_1 + k_c\, x_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -(k_2 + k_c)\, x_2 + k_c\, x_1$$

Movimento acoplado

- Cada massa sente a força da sua mola e a força de acoplamento.
- O movimento de uma massa depende do movimento da outra.

Forma matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

com

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{pmatrix}$$

Procura das frequências próprias

Procuramos movimentos em que ambas as massas oscilam à mesma frequência ω.

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t) \qquad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t)$$

tomando a parte real de $A\, e^{i\omega t}$

Substituindo nas equações de movimento

$$m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_c)\, x_1 + k_c\, x_2$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -(k_2 + k_c)\, x_2 + k_c\, x_1$$

Obtemos o sistema algébrico

$$\left[(k_1 + k_c) - m_1\omega^2\right] A_1 - k_c\, A_2 = 0$$
$$-k_c\, A_1 + \left[(k_2 + k_c) - m_2\omega^2\right] A_2 = 0$$

Forma matricial

$$\mathbf{D}(\omega) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

com

$$\mathbf{D}(\omega) = \begin{pmatrix} (k_1 + k_c) - m_1\omega^2 & -k_c \\ -k_c & (k_2 + k_c) - m_2\omega^2 \end{pmatrix}$$

Para existir uma solução não trivial, os coeficientes têm de satisfazer uma condição adicional.

Modos normais e frequências próprias

Condição de não trivialidade

- O sistema homogéneo

$$D(\omega)\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tem solução não trivial se

$$\det D(\omega) = 0$$

Frequências próprias

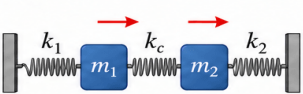
- A condição $\det D(\omega) = 0$ fornece duas frequências próprias: ω_1 e ω_2.
- A cada frequência própria corresponde um modo normal, dado pelo respectivo vector (A_1, A_2).

Interpretação física

- Em cada modo normal, as duas massas oscilam à mesma frequência.
- A razão das amplitudes A_2/A_1 é fixa.
- O movimento ocorre sem transferência **líquida** de energia entre as massas.

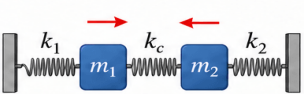
Formas típicas dos modos

Modo de menor frequência
(em fase)



$A_2/A_1 > 0$

Modo de maior frequência
(em oposição)



$A_2/A_1 < 0$

Com $k_1 \neq k_2$ ou $m_1 \neq m_2$, as amplitudes deixam de ser iguais; o sinal de A_2/A_1 mantém-se

Procurar soluções colectivas

- As equações de movimento são acopladas:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_c\,(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k_c\,(x_2 - x_1) \end{cases}$$

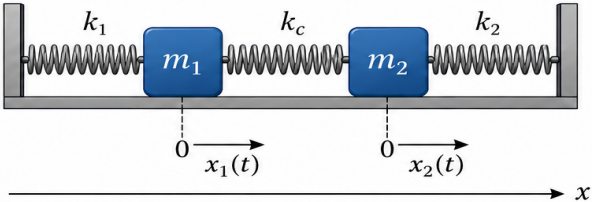
- Procuramos soluções em que os dois osciladores vibram com a **mesma frequência angular** ω, mantendo uma **relação fixa** entre as amplitudes.
- Propomos soluções harmónicas do tipo

$$x_1(t) = A_1e^{i\omega t}, \qquad x_2(t) = A_2e^{i\omega t}$$

com A_1, A_2 constantes (podem ter sinal).

- Estas soluções descrevem **movimentos colectivos** em frequências especiais, chamadas **frequências próprias** do sistema.
- Cada frequência própria corresponde a um **modo normal**.

Dois osciladores acoplados



Características das soluções colectivas

- Ambos os osciladores vibram à mesma frequência ω.
- A razão A_2/A_1 é fixa (pode ser positiva ou negativa).
- A forma temporal é a mesma para ambos (apenas a amplitude relativa pode mudar de sinal).
- Cada solução colectiva corresponde a uma frequência própria e a um **modo normal**.

Condição para as frequências próprias

Equações de movimento na forma matricial

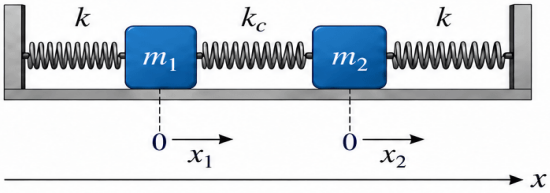
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

com

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k + k_c & -k_c \\ -k_c & k + k_c \end{pmatrix}$$

com $k_1 = k_2 = k$



Procuramos soluções harmónicas

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\, e^{i\omega t}$$

Substituindo, obtemos

$$\mathbf{D}(\omega)\,\mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{D}(\omega) = \mathbf{K} - \omega^2\,\mathbf{M}$$

Para um movimento não trivial, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.
Logo, a matriz $\mathbf{D}(\omega)$ tem de ser singular:

$$\det \mathbf{D}(\omega) = 0$$

Esta equação determina as frequências próprias do sistema.

Primeira frequência própria: movimento em fase

Solução colectiva em fase

$$x_1(t) = x_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \phi_0)$$

Condição neste modo

$$x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad F_c = -k_c(x_1 - x_2) = 0$$

A mola de acoplamento não está deformada.

Cálculo da frequência

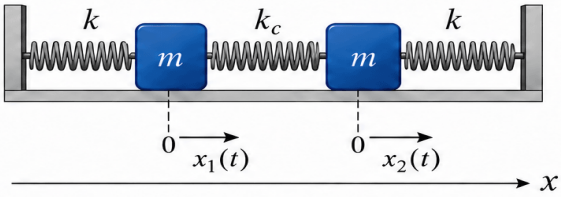
Com $m_1 = m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k$, procuramos $x_1 = x_2$

$$m\ddot{x} = -kx - k_c(x - x) = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

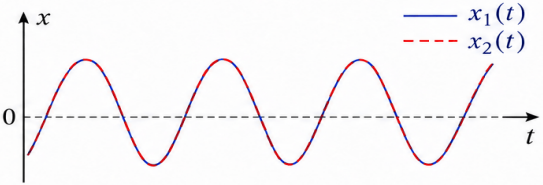
Logo,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Duas massas idênticas acopladas



Evolução temporal (exemplo)



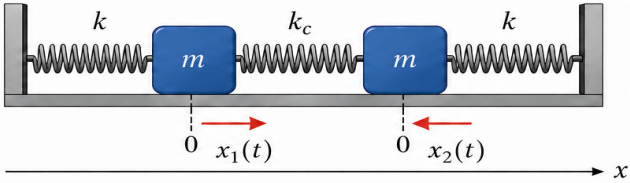
Segunda frequência própria: movimento em oposição de fase

Solução colectiva com os dois osciladores em oposição de fase

$$x_1(t) = A\cos(\omega_2 t + \phi_0)$$
$$x_2(t) = -A\cos(\omega_2 t + \phi_0)$$
ou $x_2 = -x_1$

- As massas movem-se em sentidos opostos, com a mesma amplitude.
- A mola de acoplamento é deformada e exerce uma força restauradora adicional.

Sistema: duas massas idênticas acopladas



Cálculo da frequência

Se $x_2 = -x_1$, então

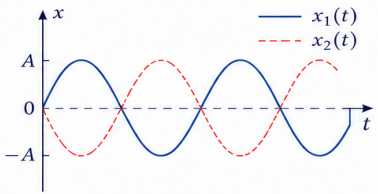
$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_c(x_1 - x_2)$$
$$= -(k + 2k_c)x_1$$

logo

$$\ddot{x}_1 + \frac{k + 2k_c}{m}x_1 = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_c}{m}}$$

Evolução temporal (exemplo)



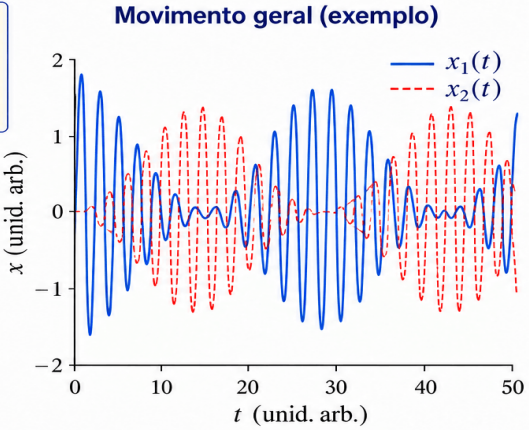
Quando uma massa avança, a outra recua.

Combinação dos modos normais

Um movimento geral dos dois osciladores pode ser escrito como a sobreposição dos dois modos normais:

$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

- Cada modo oscila com a sua própria frequência.
- As condições iniciais determinam as amplitudes e fases.
- O movimento observado resulta da sobreposição dos dois modos.



Coordenadas normais

Transformação para coordenadas normais

Definimos as coordenadas normais

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \qquad \text{(modo em fase)}$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \qquad \text{(modo em oposição de fase)}$$

A transformação inversa é

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2) \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

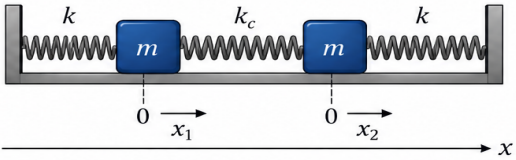
Equações de movimento

Nas coordenadas normais, o sistema desacopla-se:

$$\ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = 0 \qquad \ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = 0$$

Cada coordenada normal descreve um oscilador harmónico independente com frequência própria ω_1 e ω_2.

Sistema considerado



Modos nas coordenadas normais

Modo 1: em fase (Q_1)

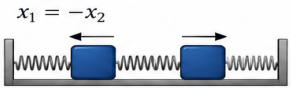
$x_1 = x_2$



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Modo 2: em oposição de fase (Q_2)

$x_1 = -x_2$



$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_c}{m}}$$

Energia nos modos normais

Energia total em coordenadas normais

Para os dois osciladores acoplados sem amortecimento, a energia total escreve-se como

$$E = \frac{1}{2} m\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2} kQ_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{Q}_2^2 + \frac{1}{2}(k + 2k_c) Q_2^2$$

Energia de cada modo

A energia separa-se em duas parcelas independentes:

Modo em fase (Q_1)

$$E_1 = \frac{1}{2} m\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2} kQ_1^2$$

Modo em oposição de fase (Q_2)

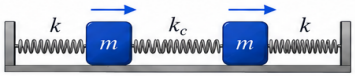
$$E_2 = \frac{1}{2} m\dot{Q}_2^2 + \frac{1}{2}(k + 2k_c) Q_2^2$$

$$E = E_1 + E_2$$

Na ausência de amortecimento, E_1 e E_2 permanecem constantes.

Modos normais e energia associada

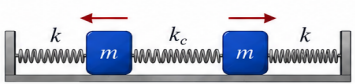
Modo em fase (Q_1)



Ambas as massas movem-se juntas.

Energia: E_1

Modo em oposição de fase (Q_2)



As massas movem-se em sentidos contrários.

Energia: E_2

Energias dos modos



Em cada modo, a energia permanece constante no tempo.

Batimentos e transferência de energia

Solução geral

Os deslocamentos são a combinação dos dois modos:

$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Caso típico: excitação de uma massa

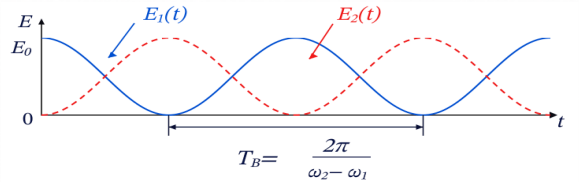
Condições iniciais: $x_1(0) = A, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

Os movimentos são

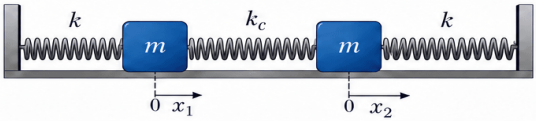
$$x_1(t) = A \cos(\Delta\omega t) \cos(\bar{\omega} t)$$
$$x_2(t) = A \sin(\Delta\omega t) \sin(\bar{\omega} t)$$

com $\quad \bar{\omega} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad , \quad \Delta\omega \equiv \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

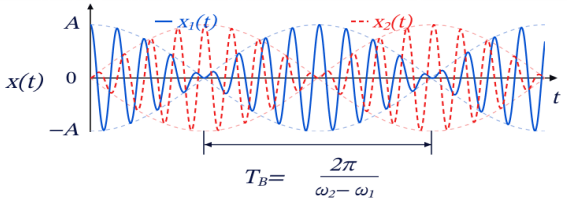
Energias das massas



Sistema: duas massas idênticas acopladas



Deslocamentos das massas



Transferência de energia

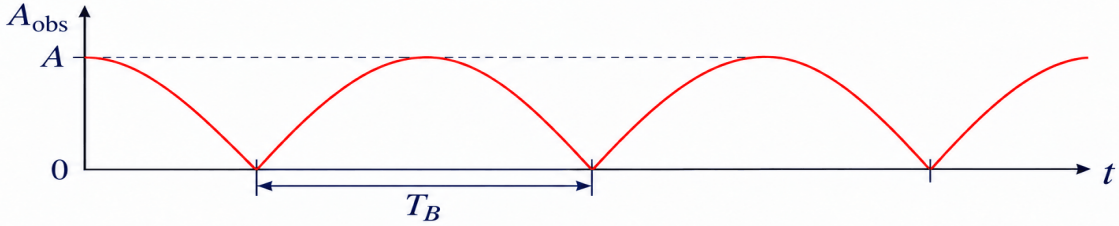
- A energia oscila periodicamente entre as duas massas com período de batimentos T_B.
- Quando uma massa tem energia máxima, a outra tem energia mínima.
- A amplitude é modulada por $\Delta\omega$; a energia oscila com frequência $2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

O que é um batimento?

Duas frequências próximas, $\omega_1 \approx \omega_2$, produzem uma oscilação rápida com frequência média $\bar{\omega}$. A amplitude observada varia lentamente: $A_{\text{obs}}(t) = A\left|\cos(\Delta\omega t)\right|$.

Definição

Um **batimento** é o intervalo entre dois mínimos consecutivos da amplitude.



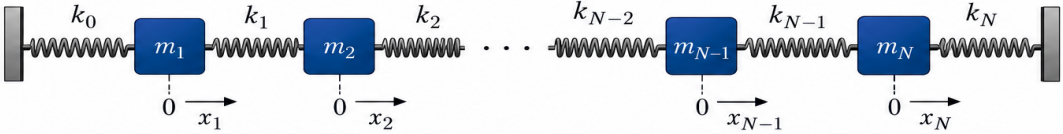
$$T_B = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \qquad f_B = \left|f_2 - f_1\right|$$

A envolvente $\cos(\Delta\omega t)$ muda de sinal; $\left|\cos(\Delta\omega t)\right|$ repete-se em metade do período.

Batimentos nítidos: $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ (acoplamento fraco, $k_c \ll k$).

Generalização para muitos osciladores

Cadeia linear de N massas acopladas



Sejam $x_i(t)$ os deslocamentos das massas m_i em torno do equilíbrio $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Equações de movimento

As equações lineares podem escrever-se na forma matricial

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\,\mathbf{x} = 0$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$,
$\mathbf{M} = \mathrm{diag}(m_1, m_2, \ldots, m_N)$ é a matriz de massas (diagonal e definida positiva) e $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez (simétrica).

Problema das frequências próprias

Procuramos soluções harmónicas da forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\,\cos(\omega t + \phi).$$

Substituindo, obtém-se o problema de autovalores

$$\mathbf{K}\,\mathbf{a} = \omega^2\,\mathbf{M}\,\mathbf{a}$$

Existem N valores próprios positivos

$$0 < \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \cdots \leq \omega_N^2$$

e N vectores próprios $\mathbf{a}^{(r)}$ linearmente independentes.

Generalização para muitos osciladores

Modos normais

Os vectores próprios $\mathbf{a}^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$ descrevem os N modos normais do sistema.

Cada modo r tem frequência própria ω_r e forma espacial

$$x_i^{(r)}(t) = A_r a_i^{(r)} \cos(\omega_r t + \phi_r), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

$\mathbf{a}^{(r)}$ define a forma do modo; A_r é a sua amplitude.

Ortogonalidade

Os modos próprios podem ser escolhidos ortogonais com respeito ao produto escalar definido por $\mathbf{M}$:

$$(\mathbf{a}^{(r)})^{\mathrm{T}} \mathbf{M}\, \mathbf{a}^{(s)} = 0 \quad \text{se} \quad r \neq s.$$

Escolhendo-os normalizados de modo que

$$(\mathbf{a}^{(r)})^{\mathrm{T}} \mathbf{M}\, \mathbf{a}^{(s)} = \delta_{rs},$$

os modos formam uma base ortonormal para o espaço das coordenadas.

Solução geral

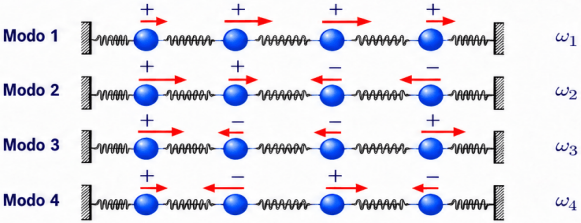
O movimento de qualquer condição inicial é uma combinação dos modos normais:

$$x_i(t) = \sum_{r=1}^{N} A_r a_i^{(r)} \cos(\omega_r t + \phi_r), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

onde as amplitudes A_r e as fases ϕ_r são determinadas pelas condições iniciais.

Exemplo: cadeia de quatro massas iguais

Para uma cadeia com $N = 4$ e acoplamento entre vizinhos, existem quatro modos normais:

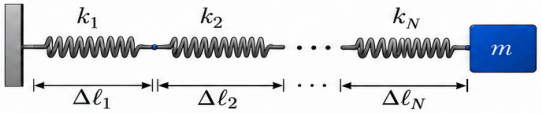


$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 \ .$$

Molas em série e em paralelo

Molas em série

- As molas estão ligadas extremo a extremo.
- A força é a mesma em todas.



Alongamento total

$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \cdots + \Delta\ell_N$$

Lei de Hooke

$F = k_i \Delta\ell_i$ (F é o módulo da força, igual em todas)

Constante elástica equivalente

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k_i}$$

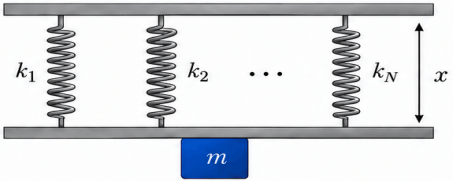
Caso de duas molas

$$k_{\text{eq}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Em série, a rigidez equivalente é menor que qualquer uma das constantes individuais.

Molas em paralelo

- As molas estão ligadas entre os mesmos dois pontos.
- O alongamento é o mesmo em todas.



Força total

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_N = \left(\sum_{i=1}^{N} k_i \right) x$$

Constante elástica equivalente

$$k_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^{N} k_i$$

Caso de duas molas

$$k_{\text{eq}} = k_1 + k_2$$

Em paralelo, a rigidez equivalente é maior que qualquer uma das constantes individuais.

Comportamento caótico

Sistemas dinâmicos não lineares

- Em sistemas não lineares, pequenas diferenças nas condições iniciais podem crescer exponencialmente.
- O movimento torna-se imprevisível a longo prazo, embora seja determinístico.
- Este comportamento é chamado **caótico.**

Sensibilidade às condições iniciais

Duas trajectórias inicialmente muito próximas divergem como

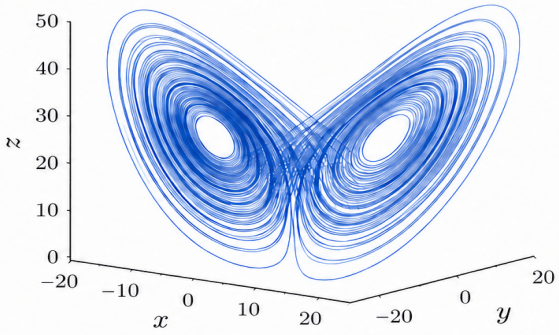
$$|\delta x(t)| \approx |\delta x(0)|\, e^{\lambda t}$$

onde $\lambda > 0$ é o maior expoente de Lyapunov.

Exemplos

- Pêndulo duplo
- Sistema de Lorenz (modelação atmosférica)
- Mapas iterativos (por exemplo, mapa logístico)

Atactor caótico do sistema de Lorenz



Trajectória no espaço de fases (x, y, z) do sistema de Lorenz.
O movimento é irregular e não periódico,
mas confinado a uma região finita do espaço de fases.

O comportamento caótico é determinístico, mas imprevisível a longo prazo.

Exemplo: amortecedor de massa sintonizada no Taipei 101

Enunciado

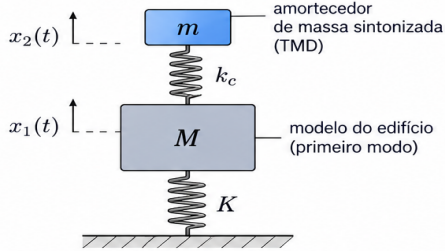
O Taipei 101, em Taipé, utiliza um amortecedor de massa sintonizada (TMD) de 660 toneladas para reduzir as oscilações do edifício provocadas pelo vento e por sismos ligeiros.



Taipei 101, Taipé (508 m)

- Modelo simplificado: o primeiro modo de vibração do edifício é descrito por uma massa efectiva M ligada ao solo por uma mola de rigidez K.
- Uma segunda massa m (o TMD) está ligada ao edifício por uma mola de rigidez k_c.
- A frequência própria do edifício (sem o TMD) é $f_0 = 0{,}14\ \text{Hz}$.
- A massa do TMD é $m = 6{,}60 \times 10^5\ \text{kg}$ (660 toneladas).

Modelo físico



Dados

Massa efectiva do edifício:	$M = 1{,}0 \times 10^8\ \text{kg}$
Massa do TMD:	$m = 6{,}60 \times 10^5\ \text{kg}$
Frequência própria do edifício (sem o TMD):	$f_0 = 0{,}14\ \text{Hz}$

Objectivos

1. Determinar a rigidez equivalente K do edifício.
2. Escolher a rigidez k_c do TMD para o sintonizar com o edifício.
3. Determinar as frequências próprias do sistema acoplado.
4. Discutir o efeito do TMD na redução das oscilações.

Exemplo resolvido: amortecedor de massa sintonizada

1. Rigidez equivalente do edifício

A frequência própria do edifício (sem o TMD) é

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 0{,}14 = 0{,}880 \ \mathrm{rad\,s^{-1}}$$

Logo, a rigidez equivalente é

$$K = M\omega_0^2 = (1{,}0 \times 10^8)(0{,}880)^2$$
$$K = 7{,}74 \times 10^7 \ \mathrm{N\,m^{-1}}$$

2. Sintonização do amortecedor

Escolhe-se a rigidez k_c para que o TMD tenha a mesma frequência do edifício:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k_c}{m}} = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad k_c = m\omega_0^2$$

$$k_c = (6{,}60 \times 10^5)(0{,}880)^2$$
$$k_c = 5{,}11 \times 10^5 \ \mathrm{N\,m^{-1}}$$

3. Modos normais do sistema acoplado

As equações de movimento são

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + (K + k_c)x_1 - k_c x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - k_c x_1 + k_c x_2 = 0 \end{cases}$$

As frequências próprias obtêm-se de

$$\det \begin{pmatrix} K + k_c - M\omega^2 & -k_c \\ -k_c & k_c - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

4. Resultados numéricos

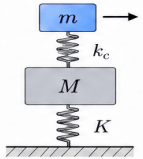
Com $M = 1{,}0 \times 10^8 \ \mathrm{kg}$, $m = 6{,}60 \times 10^5 \ \mathrm{kg}$, $K = 7{,}74 \times 10^7 \ \mathrm{N\,m^{-1}}$ e $k_c = 5{,}11 \times 10^5 \ \mathrm{N\,m^{-1}}$, obtém-se

$$\omega_1 = 0{,}845 \ \mathrm{rad\,s^{-1}} \quad (f_1 = 0{,}134 \ \mathrm{Hz})$$
$$\omega_2 = 0{,}916 \ \mathrm{rad\,s^{-1}} \quad (f_2 = 0{,}146 \ \mathrm{Hz})$$

5. Formas dos modos

Modo 1 (baixa frequência)

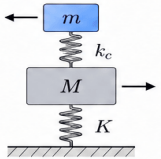
$f_1 = 0{,}134$ Hz



As massas movem-se em fase.

Modo 2 (alta frequência)

$f_2 = 0{,}146$ Hz



As massas movem-se em oposição de fase.

6. Discussão

- O TMD introduz um segundo modo e redistribui a energia vibratória.
- A energia transferida para a massa auxiliar reduz a amplitude do movimento do edifício na frequência de excitação.

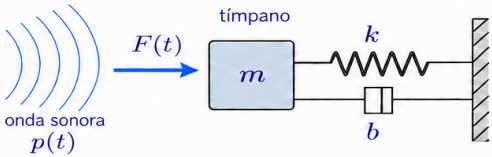
Exemplo resolvido: vibrações mecânicas na audição

Enunciado

O tímpano pode ser modelado como um oscilador harmónico amortecido, submetido a uma força periódica devida à variação da pressão sonora.

Considere um modelo massa–mola–amortecedor com os parâmetros da figura.

Calcule a amplitude de vibração do tímpano para um som de frequência 1,0 kHz e nível de pressão sonora de 60 dB.



Dados

Massa efectiva:	$m = 1{,}0 \times 10^{-6}\ \text{kg}$
Constante elástica:	$k = 100\ \text{N m}^{-1}$
Coeficiente de amortecimento:	$b = 1{,}0 \times 10^{-4}\ \text{kg s}^{-1}$
Nível de pressão sonora:	$L_p = 60\ \text{dB}$
Frequência do som:	$f = 1{,}0\ \text{kHz}$

Resolução

1. Força de excitação

A variação de pressão sonora exerce uma força

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)\ , \qquad \Omega = 2\pi f\ .$$

O nível de pressão sonora (valor eficaz) é

$$L_p = 20 \log_{10}\left(\frac{p_{\text{rms}}}{p_{\text{ref}}}\right), \qquad p_{\text{ref}} = 20\ \mu\text{Pa}\ .$$

Para $L_p = 60\ \text{dB}$:

$$p_{\text{rms}} = 2{,}0 \times 10^{-2}\ \text{Pa}\ .$$

Para uma pressão sinusoidal, o valor de pico é

$$p_0 = \sqrt{2}\, p_{\text{rms}} \approx 2{,}8 \times 10^{-2}\ \text{Pa}\ .$$

A área do tímpano é aproximadamente $S = 8{,}0 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$, logo

$$F_0 = p_0 S \approx 2{,}26 \times 10^{-6}\ \text{N}\ .$$

2. Amplitude de vibração

A amplitude em regime estacionário de um oscilador forçado é

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (b\Omega)^2}}\ , \qquad \Omega = 2\pi f\ .$$

Para $f = 1{,}0\ \text{kHz}$ ($\Omega \approx 6{,}28 \times 10^3\ \text{rad s}^{-1}$):

$$X = \frac{2{,}26 \times 10^{-6}}{\sqrt{(100 - 1{,}0 \times 10^{-6} \times (6{,}28 \times 10^3)^2)^2 + (1{,}0 \times 10^{-4} \times 6{,}28 \times 10^3)^2}}\ ,$$

3. Resultado

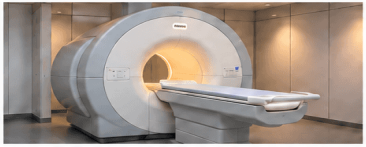
$$X \approx 3{,}7 \times 10^{-8}\ \text{m} \quad (37\ \text{nm}).$$

Exemplo resolvido: redução de vibrações em MRI

Enunciado

Em equipamentos de ressonância **magnética**, os gradientes de campo magnético sofrem oscilações rápidas que podem induzir vibrações mecânicas na estrutura.

Considere um painel de massa $M = 10\,\mathrm{kg}$, montado sobre suportes elásticos de rigidez K, que é excitado por uma força periódica de frequência Ω. Para reduzir a amplitude de vibração na frequência de operação, instala-se um absorvedor de massa sintonizada com massa m e rigidez k_c.



Equipamento de ressonância magnética

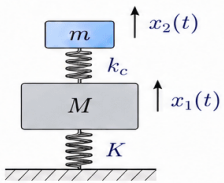
Dados

Massa do painel:	$M = 10\,\mathrm{kg}$
Massa do absorvedor:	$m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$
Frequência de operação:	$f = 60\,\mathrm{Hz} \quad (\Omega = 2\pi f)$

Objectivos

1. Determinar K a partir da frequência de operação.
2. Sintonizar o absorvedor (k_c) para essa frequência.
3. Calcular as frequências próprias do sistema acoplado.
4. Determinar a redução da amplitude de vibração na frequência de operação.

Modelo físico



1. Rigidez do painel

$$\Omega = 2\pi f = 2\pi \times 60 = 377\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

$$K = M\Omega^2 = 10 \times 377^2 = 1{,}42 \times 10^6\,\mathrm{N\,m^{-1}}$$

2. Sintonização do absorvedor

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k_c}{m}} = \Omega \quad \Rightarrow \quad k_c = m\Omega^2 = 1{,}0 \times 377^2 = 1{,}42 \times 10^5\,\mathrm{N\,m^{-1}}$$

3. Frequências próprias do sistema acoplado

As frequências próprias são as soluções de

$$\det \begin{pmatrix} K + k_c - M\omega^2 & -k_c \\ -k_c & k_c - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Resultado

$$\omega_1 = 322\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \quad (f_1 = 51{,}2\,\mathrm{Hz}) \qquad \omega_2 = 441\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \quad (f_2 = 70{,}2\,\mathrm{Hz})$$

4. Redução da amplitude na frequência de operação

Na frequência $\Omega = 377\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, a amplitude de x_1 é fortemente reduzida devido à transferência de energia para a massa m.

Porque reduz o absorvedor a vibração?

Sintonização

No exemplo, a força excita o painel a 60 Hz.

$$\Omega = 2\pi f = 377 \text{ rad s}^{-1}$$

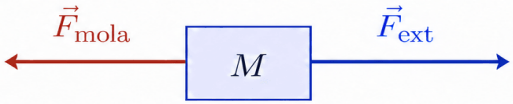
Ajusta-se a mola da massa auxiliar:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k_c}{m}} = \Omega$$

A relação $K = M\omega^2$ pressupõe que o painel isolado ressoa a 60 Hz.

Compensação da força

A força externa é $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, em que F_0 é a sua amplitude.



$$X_1 = 0$$

$$F_0 + k_c X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_2 = -\frac{F_0}{k_c}$$

Na sintonia ideal, a massa auxiliar oscila e o painel permanece imóvel.