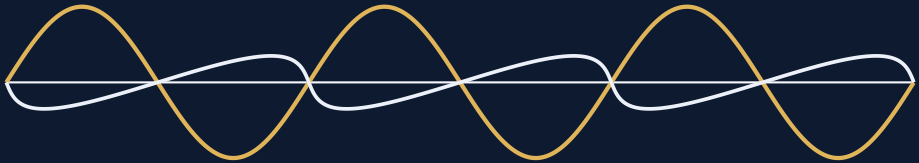
Luz como onda electromagnética

Equações de Maxwell, energia e pressão de radiação



Quatro perguntas

- Como é que a luz atravessa o vazio, sem nenhum meio que oscile?
- Quanto empurra a luz do Sol?
- Porque é que, sem matéria escura, não haveria galáxias?
- Que campo eléctrico tem o feixe de um ponteiro laser?

CONCEITOS

O que vamos usar

- Equação de onda: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, com soluções $f(x \mp vt)$.
- Onda harmónica: $\cos(kx - \omega t)$, com $\omega = vk$.
- Faraday: $\vec{B}$ variável cria $\vec{E}$. Ampère: uma corrente cria $\vec{B}$.
- Intensidade: energia por unidade de tempo e de área.
- Oscilador harmónico: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

PERGUNTA: A LUZ NO VAZIO

As equações de Maxwell no vazio

Como atravessa a luz o vazio, sem nenhum meio que oscile?

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Sem cargas: as linhas de campo não começam nem acabam.
- Faraday: $\vec{B}$ variável cria $\vec{E}$. Maxwell: $\vec{E}$ variável cria $\vec{B}$, mesmo sem corrente.

PERGUNTA: A LUZ NO VAZIO

Campos que se sustentam

- Um campo eléctrico que varia cria um campo magnético à volta.
- Esse campo magnético, também a variar, cria um campo eléctrico mais à frente.
- Os dois avançam juntos, sem precisar de matéria: é uma onda feita só de campos.

O termo de Maxwell, $\mu_0 \varepsilon_0 \, \partial \vec{E} / \partial t$, é o que fecha o ciclo.

PERGUNTA: A LUZ NO VAZIO

A equação de onda

Uma onda que avança em x, com $\vec{E} = E_y\,\hat{y}$ e $\vec{B} = B_z\,\hat{z}$. As duas equações dos rotacionais dão:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Derivando a primeira em x e a segunda em t, elimina-se B_z:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

PERGUNTA: A LUZ NO VAZIO

A velocidade da luz

Comparando com a equação de onda, $1/v^2 = \mu_0 \varepsilon_0$:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8{,}854 \times 10^{-12}}} = 3{,}00 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Duas constantes medidas com ímanes e condensadores dão a velocidade medida por Fizeau.

Em 1865, Maxwell concluiu: a luz é uma onda electromagnética.

RESPOSTA

Uma onda sem meio

- Na luz, o que oscila são os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, e não uma matéria.
- Cada um cria o outro ao variar: a onda transporta-se a si própria.
- A velocidade, $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, é uma propriedade do próprio vazio.

A onda plana

Uma solução harmónica:

$$E_y = E_0 \cos(kx - \omega t), \qquad B_z = B_0 \cos(kx - \omega t)$$

Na equação de Faraday, $\partial E_y/\partial x = -\partial B_z/\partial t$ dá $kE_0 = \omega B_0$:

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

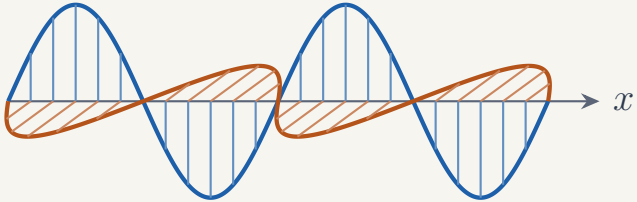
$\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{k}$ são perpendiculares; $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estão em fase.

Os dois campos

Azul: $\vec{E}$, vertical.

Laranja: $\vec{B}$, em profundidade.

A onda avança em x, no sentido de $\vec{E} \times \vec{B}$.



ENERGIA

A energia dos campos

Do Electromagnetismo, as densidades de energia:

$$u_E = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2, \qquad u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Com $B = E/c$ e $c^2 = 1/(\mu_0\varepsilon_0)$:

$$u_B = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = u_E$$

Metade da energia em cada campo: $u = \varepsilon_0 E^2$.

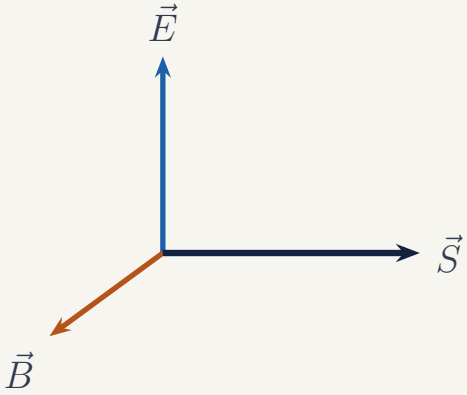
ENERGIA

O vector de Poynting

Em Δt, a energia contida num cilindro de base A e comprimento $c\,\Delta t$ atravessa a base: o fluxo é uc. Em vector:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \times \vec{B}$$

Aponta no sentido de propagação; $|\vec{S}| = \varepsilon_0 c E^2$ é a potência por unidade de área.



ENERGIA

A intensidade

A média de $\cos^2$ é $\frac{1}{2}$:

$$I = \langle S \rangle = \tfrac{1}{2}\, c\, \varepsilon_0 E_0^2$$

É a constante que faltava em $I \propto E_0^2$.

Luz do Sol junto à Terra, $I = 1361\,\mathrm{W\,m^{-2}}$:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{V\,m^{-1}}, \qquad B_0 = \frac{E_0}{c} = 3{,}4\,\mu\mathrm{T}$$

PERGUNTA: O EMPURRÃO DO SOL

A luz transporta momento

Quanto empurra a luz do Sol?

Uma carga q de um corpo que absorve, com $\vec{E}$ segundo y e $\vec{B}$ segundo z, $B = E/c$. O campo $\vec{E}$ põe-na em movimento, v_y:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = qEv_y, \qquad \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = qv_yB = \frac{qv_yE}{c}$$

O trabalho é de $\vec{E}$; o empurrão, segundo x, é de $q\vec{v} \times \vec{B}$. Comparando:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; p = \frac{U}{c}$$

PERGUNTA: O EMPURRÃO DO SOL

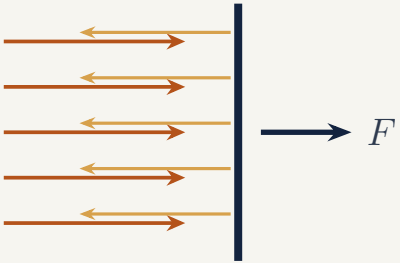
A pressão da luz solar

Num espelho, a luz volta para trás: o momento passa de $+I/c$ a $-I/c$, e a pressão é $2I/c$:

$$P = \frac{2I}{c} = \frac{2 \times 1361}{3{,}00 \times 10^8} = 9{,}1 \times 10^{-6}\,\text{Pa}$$

Um metro quadrado sente $9\,\mu$N: o peso de um grão de areia de $1\,$mm.

Num corpo absorvente, metade: I/c.



RESPOSTA

O empurrão do Sol

- Junto à Terra, a luz do Sol exerce $4{,}5\,\mu$Pa numa superfície negra e $9{,}1\,\mu$Pa num espelho.
- É pouco, mas actua sempre: as caudas de poeira dos cometas apontam para longe do Sol.
- Uma vela solar de grande área e pouca massa acelera continuamente, sem combustível.

PERGUNTA: A MATÉRIA ESCURA

Um oscilador sem mola

Porque é que, sem matéria escura, não haveria galáxias?

Primeiro, uma pergunta: o que acontece a um oscilador quando se lhe tira a mola?

$$\ddot{x} + \kappa\, x = 0$$

- $\kappa > 0$: a mola puxa para o equilíbrio, x oscila.
- $\kappa < 0$: uma «mola ao contrário» afasta do equilíbrio, x cresce.

PERGUNTA: A MATÉRIA ESCURA

Dois fluidos no universo jovem

Antes dos $380\,000$ anos, a matéria normal está presa à luz: fotões e matéria normal movem-se juntos, como um só fluido. A matéria escura não sente a luz.

Numa região, o **contraste de densidade** é

$$\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$$

$\delta = 0{,}01$: a região está $1\,\%$ mais densa do que a média.

PERGUNTA: A MATÉRIA ESCURA

A mola é a luz

Comprime-se uma região: a luz lá dentro fica mais concentrada, a pressão sobe e empurra para fora. É a mola do som.

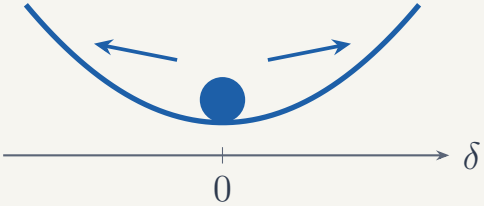
A luz é difícil de comprimir: o som anda a $v = c/\sqrt{3}$.

$$\ddot{\delta} + \big(\underbrace{v^2 k^2}_{\text{pressão}} - \underbrace{4\pi G \rho}_{\text{gravidade}} \big)\, \delta = 0$$

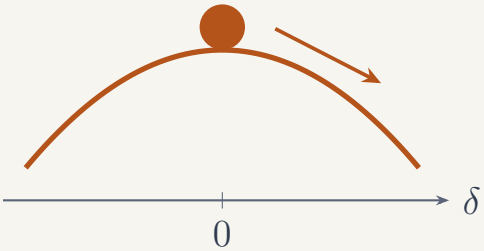
A pressão empurra para fora, a gravidade puxa para dentro. Ganha o termo maior.

PERGUNTA: A MATÉRIA ESCURA

O vale e o cume



Matéria normal com luz



Matéria escura

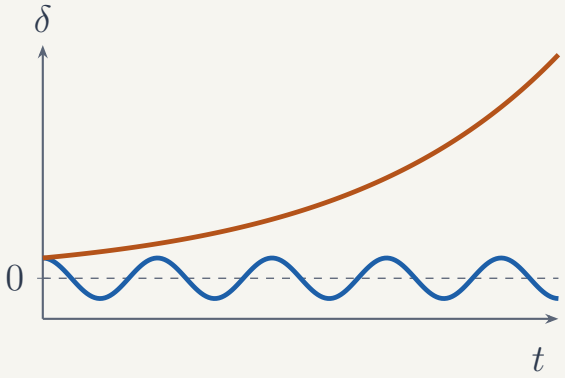
O eixo é δ. O cume é a densidade uniforme; descer é a matéria a juntar-se.

PERGUNTA: A MATÉRIA ESCURA

Com mola e sem mola

Matéria normal (azul): $v = c/\sqrt{3}$, a pressão ganha e δ oscila. São ondas sonoras.

Matéria escura (laranja): $v \approx 0$, sobra $-4\pi G\rho$ e δ cresce. Quanto mais densa, mais matéria atrai.



PERGUNTA: A MATÉRIA ESCURA

A expansão trava o crescimento

- Sem expansão, uma região mais densa atrai cada vez mais matéria: δ cresce exponencialmente.
- Mas o universo expande-se: o próprio espaço afasta a matéria que está a cair.
- O resultado é um crescimento muito mais lento: δ cresce na mesma proporção que o tamanho do universo.

PERGUNTA: A MATÉRIA ESCURA

As contas não fecham

Só com matéria normal:

- Aos $380\,000$ anos, a radiação cósmica de fundo mostra $\delta \approx 10^{-5}$.
- Depois, δ cresce como o tamanho do universo, que aumentou cerca de 1100 vezes (a radiação arrefeceu de $3000\,\mathrm{K}$ para $2{,}7\,\mathrm{K}$).
- Hoje: $\delta \approx 10^{-5} \times 1100 \approx 10^{-2}$, um universo quase liso.

As galáxias exigem $\delta \gtrsim 1$: faltam duas ordens de grandeza.

PERGUNTA: A MATÉRIA ESCURA

Os poços já estavam cavados

- A matéria escura nunca oscilou: começou a acumular-se muito antes dos $380\,000$ anos.
- Quando a matéria normal se solta da luz, encontra poços gravíticos já fundos e cai neles depressa.
- As galáxias formam-se onde a matéria escura já estava concentrada.

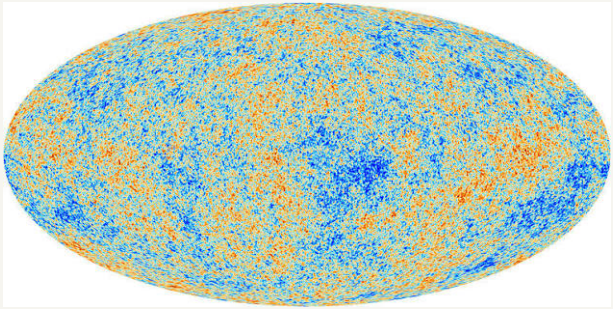
RESPOSTA

A matéria escura

- Sem ela, as perturbações não teriam tido tempo de crescer até formar galáxias.
- A matéria escura também muda a altura relativa dos picos da radiação cósmica de fundo, sobretudo do terceiro: o ajuste dá cerca de cinco vezes mais matéria escura do que normal.
- Não pode ser feita de átomos: se fosse, teria oscilado com a luz.

A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

O universo aos 380 000 anos

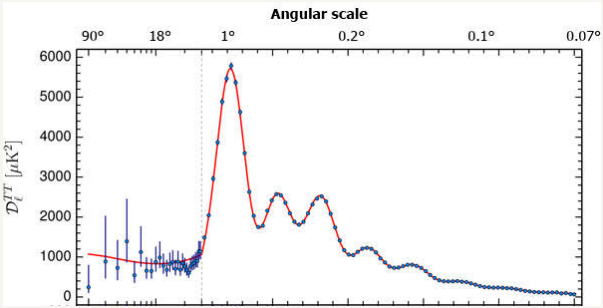


Céu inteiro medido pelo satélite Planck (ESA).

As cores são diferenças de temperatura de cerca de 10^{-5}: as sementes das galáxias.

A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

Os picos acústicos



Contraste em cada escala angular. Linha: modelo com matéria escura.

Os picos são as oscilações da mola de luz, congeladas aos $380\,000$ anos.

NUM MEIO

A luz num meio

Num material, $\varepsilon_0 \to \varepsilon_r \varepsilon_0$ (e $\mu_r \approx 1$ nos materiais transparentes):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \;\Rightarrow\; n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

- A intensidade passa a $I = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 E_0^2$.
- A água tem $\varepsilon_r = 80$ em campos estáticos, o que daria $n = 8{,}9$. Mas $n = 1{,}33$ no visível: ε_r depende da frequência.

NUM MEIO

Na fronteira entre dois meios

Das equações de Maxwell, nas fronteiras sem cargas nem correntes:

- a componente de $\vec{E}$ paralela à superfície é contínua;
- a componente de $\vec{B}$ paralela também (meios não magnéticos).

Na incidência normal há três ondas: a incidente, a reflectida e a transmitida. Em cada meio, $B = nE/c$.

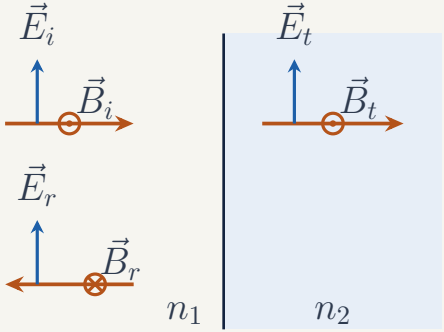
NUM MEIO

O sinal da onda reflectida

$\vec{E} \times \vec{B}$ aponta no sentido de propagação. A reflectida volta para trás: com o mesmo $\vec{E}$, o seu $\vec{B}$ inverte-se, $B_r = -n_1 E_r / c$.

Continuidade de E e de B:

$$E_i + E_r = E_t$$
$$n_1(E_i - E_r) = n_2 E_t$$



$\odot$ para fora, $\otimes$ para dentro.

NUM MEIO

Os coeficientes na incidência normal

Resolvendo as duas equações:

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \qquad t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

As intensidades levam o índice de cada meio:

$$R = r^2, \qquad T = \frac{n_2}{n_1}\, t^2, \qquad R + T = 1$$

Vidro de $1{,}5$: $R = 4\,\%$. É a fórmula usada nas películas e nos revestimentos.

PERGUNTA: O PONTEIRO LASER

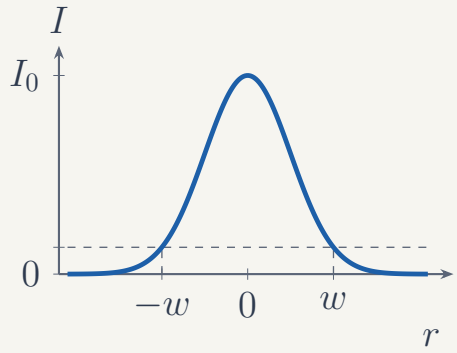
A intensidade no centro de um feixe

Que campo tem o feixe de um ponteiro laser?

A intensidade cai do centro para fora, $I = I_0\, e^{-2r^2/w^2}$; em $r = w$ desce a $13\,\%$.

Somando sobre anéis de área $2\pi r\ \mathrm{d}r$:

$$P = I_0\,\frac{\pi w^2}{2} \;\Rightarrow\; I_0 = \frac{2P}{\pi w^2}$$



No centro, o dobro da média $P/(\pi w^2)$.

RESPOSTA

O campo de um ponteiro laser

Ponteiro de $5\,\mathrm{mW}$, com $w = 0{,}5\,\mathrm{mm}$:

$$I_0 = \frac{2P}{\pi w^2} = 1{,}3 \times 10^4\,\mathrm{W\,m^{-2}}, \qquad E_0 = \sqrt{\frac{2I_0}{c\varepsilon_0}} = 3{,}1\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$$

- Três vezes o campo da luz do Sol.
- O campo que liga um electrão a um átomo é cerca de $5 \times 10^{11}\,\mathrm{V\,m^{-1}}$: muito maior.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Uma antena de rádio emite $50\,\mathrm{kW}$, igualmente em todas as direcções.

(a) Qual é a intensidade a $10\,\mathrm{km}$?

(b) Qual é a amplitude do campo eléctrico?

(c) E a do campo magnético?

(d) A que distância o campo eléctrico chega a $17\,\mathrm{V\,m^{-1}}$?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) A potência espalha-se por uma esfera:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{5 \times 10^4}{4\pi \times (1 \times 10^4)^2} = 4{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

(b) Da intensidade:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 4{,}0 \times 10^{-5}}{3 \times 10^8 \times 8{,}85 \times 10^{-12}}} = 0{,}17\,\mathrm{V\,m^{-1}}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(c) $B_0 = E_0/c = 5{,}8 \times 10^{-10}\,\mathrm{T}$, cem mil vezes menos do que o campo da Terra.

(d) $E_0 \propto 1/r$: para cem vezes mais campo, cem vezes mais perto:

$$r = \frac{10\,\mathrm{km}}{100} = 100\,\mathrm{m}$$

Aí $I = 0{,}40\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Uma vela solar reflectora de $100\,\mathrm{m} \times 100\,\mathrm{m}$ tem, com a nave, $100\,\mathrm{kg}$. Está junto à Terra, perpendicular ao Sol ($I = 1361\,\mathrm{W\,m^{-2}}$).

(a) Que força recebe?

(b) Que aceleração tem a nave?

(c) Que velocidade ganha em 30 dias, se a força se mantiver?

(d) Que força teria junto a Marte, $1{,}52$ vezes mais longe do Sol?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) Reflexão: pressão $2I/c$:

$$F = \frac{2IA}{c} = \frac{2 \times 1361 \times 1 \times 10^4}{3 \times 10^8} = 0{,}091\,\mathrm{N}$$

(b) $a = F/m = 9{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

(c) $v = at = 9{,}1 \times 10^{-4} \times 2{,}6 \times 10^6 = 2{,}4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(d) A intensidade cai com o quadrado da distância:

$$F = \frac{0{,}091\,\mathrm{N}}{1{,}52^2} = 0{,}039\,\mathrm{N}$$

A aceleração é pequena mas não acaba: ao fim de um ano, sem gastar combustível, a nave teria ganho dezenas de quilómetros por segundo.

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Numa pinça óptica, um laser de $100\,\mathrm{mW}$ é focado numa mancha de raio $w = 0{,}5\,\mu\mathrm{m}$, sobre uma célula de $10\,\mu\mathrm{m}$ de diâmetro e densidade $1050\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

(a) Qual é a intensidade no centro do foco?

(b) Qual é a amplitude do campo eléctrico?

(c) Que força exerceria a luz, se fosse toda absorvida?

(d) Compare essa força com o peso da célula.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) No centro do feixe:

$$I_0 = \frac{2P}{\pi w^2} = \frac{0{,}2}{\pi \times (0{,}5 \times 10^{-6})^2} = 2{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

(b) $E_0 = \sqrt{2I_0/(c\varepsilon_0)} = 1{,}4 \times 10^{7}\,\mathrm{V\,m^{-1}}$.

(c) Toda a potência absorvida:

$$F = \frac{P}{c} = \frac{0{,}1}{3 \times 10^{8}} = 3{,}3 \times 10^{-10}\,\mathrm{N} = 330\,\mathrm{pN}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(d) Massa e peso da célula:

$$m = \rho \tfrac{4}{3}\pi r^3 = 1050 \times \tfrac{4}{3}\pi \times (5 \times 10^{-6})^3 = 5{,}5 \times 10^{-13}\,\text{kg}$$

$$mg = 5{,}4 \times 10^{-12}\,\text{N} = 5{,}4\,\text{pN} \;\Rightarrow\; \frac{F}{mg} \approx 60$$

A luz chega para segurar e mover células. Na prática, a célula quase não absorve: a força vem do desvio dos raios, e é menor.