# Interferência

Duas fendas, películas finas e franjas de igual espessura



# Três perguntas

- Porque é que uma bolha de sabão tem cores?
- Porque é que as lentes dos óculos têm um reflexo colorido, muitas vezes esverdeado?
- Como se mede a espessura de um cabelo só com luz e duas lâminas de vidro?

CONCEITOS

# O que vamos usar

- Sobreposição: os campos de duas ondas somam-se.
- Intensidade: $I \propto \langle E^2 \rangle$, a média no tempo.
- Caminho óptico: $L = n\,d$; num meio, $\lambda = \lambda_0 / n$.
- Reflexão na incidência normal: $r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, como $r$ nas impedâncias acústicas.

INTERFERÊNCIA

# Duas ondas no mesmo ponto

Duas ondas da mesma frequência, com desfasamento $\delta$:

$$E = E_1 \cos \omega t + E_2 \cos(\omega t + \delta)$$

Ao quadrado e em média, $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$ e $\langle 2 \cos \omega t \cos(\omega t + \delta) \rangle = \cos \delta$:

$$\langle E^2 \rangle = \tfrac{1}{2} E_1^2 + \tfrac{1}{2} E_2^2 + E_1 E_2 \cos \delta$$

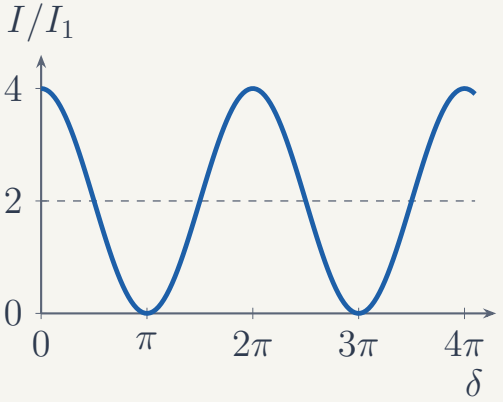
# A intensidade da soma

Com $I_i \propto \frac{1}{2}E_i^2$:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

O último termo é a **interferência**; sem ele, $2I_1$ (tracejado). Com $I_1 = I_2$:

$$I = 4I_1 \cos^2(\delta/2)$$



INTERFERÊNCIA

# Fase e caminho óptico

Num meio de índice $n$, uma distância $d$ contém $nd/\lambda_0$ comprimentos de onda. A fase acumulada é $2\pi\, nd/\lambda_0$. Para dois caminhos:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,\Delta L, \qquad \Delta L = L_2 - L_1$$

- $\Delta L = m\lambda_0$: construtiva, $I = 4I_1$.
- $\Delta L = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_0$: destrutiva, $I = 0$.

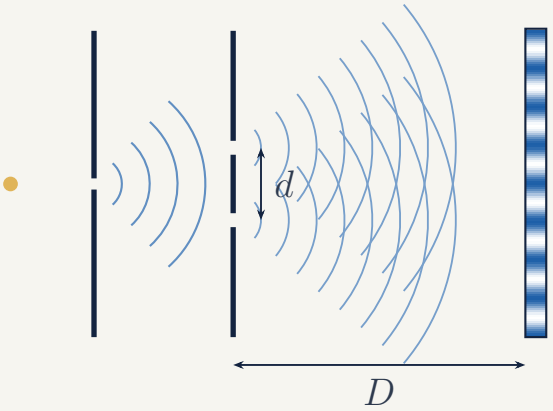
## DUAS FENDAS

# A experiência de Young

Uma fonte, uma fenda e duas fendas a distância $d$.

As duas fendas recebem a **mesma** onda: o desfasamento entre elas é fixo.

No ecrã, a $D \gg d$, vêem-se franjas claras e escuras.



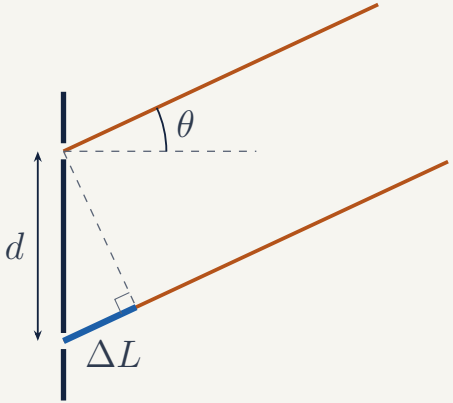
DUAS FENDAS

# A diferença de caminho

Com $D \gg d$, os dois raios até ao mesmo ponto do ecrã são quase paralelos, ao ângulo $\theta$.

O raio de baixo percorre a mais o segmento a azul, cateto do triângulo rectângulo:

$$\Delta L = d \sin \theta$$



DUAS FENDAS

# As franjas claras e escuras

A fase entre os dois raios é $\delta = 2\pi\,\Delta L/\lambda = 2\pi\,d\sin\theta/\lambda$. Como $I = 4I_1\cos^2(\delta/2)$:

- clara, $\cos^2 = 1$: $\delta = 2\pi m$;
- escura, $\cos^2 = 0$: $\delta = (2m+1)\pi$.

$$d\sin\theta = m\lambda \ \ \text{(claras)}, \qquad d\sin\theta = \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\lambda \ \ \text{(escuras)}$$

DUAS FENDAS

# A distância entre franjas

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ é a ordem da franja. Para ângulos pequenos, $\sin\theta \approx \tan\theta = y/D$, e a franja clara $m$ está em

$$y_m = m\,\frac{\lambda D}{d}$$

Duas franjas vizinhas distam

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d}$$

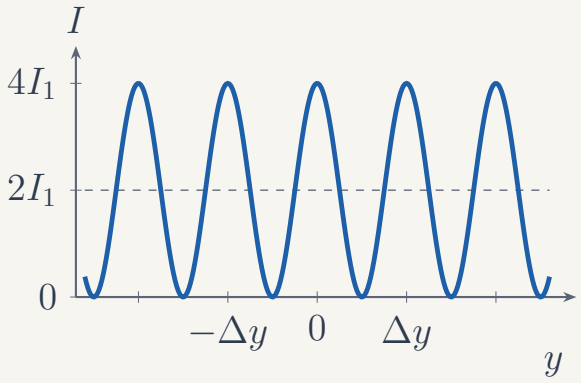
## DUAS FENDAS

# O padrão no ecrã

Para ângulos pequenos,
$\delta \approx 2\pi\, d\, y/(\lambda D) = 2\pi\, y/\Delta y$.
Em $I = 4I_1 \cos^2(\delta/2)$:

$$I(y) = 4I_1 \cos^2 \frac{\pi y}{\Delta y}$$

Máximos $4I_1$ em $y = m\,\Delta y$, zeros a meio. A média é $2I_1$: a luz não se cria, redistribui-se.



DUAS FENDAS

# Medir um comprimento de onda

Mede-se $\Delta y$ com uma régua e tira-se $\lambda$:

$$\lambda = \frac{d\,\Delta y}{D}$$

Com $d = 0{,}20\,\text{mm}$, $D = 1{,}50\,\text{m}$ e dez franjas em $39\,\text{mm}$, $\Delta y = 3{,}9\,\text{mm}$:

$$\lambda = \frac{0{,}20 \times 10^{-3} \times 3{,}9 \times 10^{-3}}{1{,}50} = 520\,\text{nm}$$

Uma distância de micrómetros passa a milímetros no ecrã.

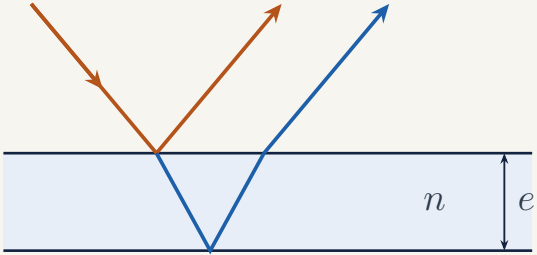
## PERGUNTA: A BOLHA DE SABÃO

# Películas finas

**Porque é que uma bolha de sabão tem cores?**

Uma película de índice $n$ e espessura $e$ reflecte nas duas faces, e os dois reflexos interferem.

Começamos pela incidência normal; a inclinada, da figura, vem depois.



PERGUNTA: A BOLHA DE SABÃO

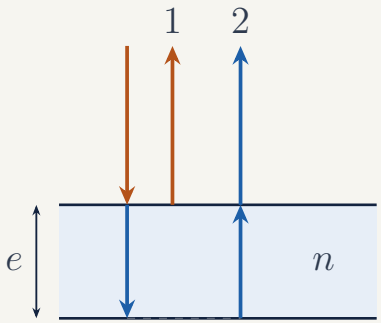
# O caminho óptico na película

Na incidência normal, o segundo reflexo desce e sobe: percorre exactamente $2e$ a mais. Lá dentro $\lambda = \lambda_0/n$, e em $2e$ cabem

$$\frac{2e}{\lambda_0/n} = \frac{2ne}{\lambda_0} \text{ comprimentos de onda}$$

É o **caminho óptico**:

$$\Delta L = 2ne, \qquad \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,\Delta L$$




Raios afastados para se verem.

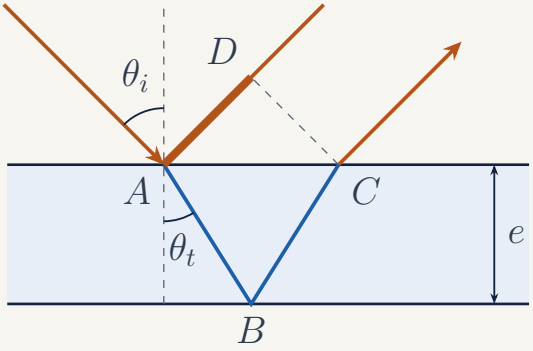
# Incidência oblíqua: os dois caminhos

Dentro, de $A$ a $B$ a $C$: comprimento $2e/\cos\theta_t$, caminho óptico $2ne/\cos\theta_t$.

Fora, o primeiro reflexo vai de $A$ a $D$, com $AC = 2e\tan\theta_t$:

$$AD = 2e\tan\theta_t \sin\theta_i$$

Depois de $C$ e $D$, os dois seguem lado a lado.



PERGUNTA: A BOLHA DE SABÃO

# Incidência oblíqua: a diferença de caminho

O caminho óptico de dentro menos o de fora:

$$\Delta L = \frac{2ne}{\cos\theta_t} - 2e\tan\theta_t \sin\theta_i$$

Com a lei de Snell, $\sin\theta_i = n\sin\theta_t$, fica $\dfrac{2ne}{\cos\theta_t}\left(1-\sin^2\theta_t\right)$:

$$\Delta L = 2ne\cos\theta_t$$

Com $\theta_t = 0$, volta-se a $2ne$.

PERGUNTA: A BOLHA DE SABÃO

# A mudança de fase na reflexão

Na incidência normal, o campo reflectido é $r = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ vezes o incidente.

- $n_2 > n_1$: $r < 0$, o reflexo vem invertido, um desfasamento de $\pi$. Como uma corda leve presa a uma pesada.
- $n_2 < n_1$: $r > 0$, não inverte.

Numa bolha: em cima, ar $\rightarrow$ água, inverte; em baixo, água $\rightarrow$ ar, não. Entre os dois reflexos há sempre $\pi$ a mais.

PERGUNTA: A BOLHA DE SABÃO

# Claro ou escuro

O desfasamento total soma o do caminho e o $\pi$ da reflexão:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\, 2ne\cos\theta_t + \pi$$

Na incidência normal, claro com $\delta = 2\pi(m+1)$, escuro com $\delta = (2m+1)\pi$:

$$2ne = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda_0 \ \text{(claro)}, \qquad 2ne = m\lambda_0 \ \text{(escuro)}$$

Com $e \to 0$ só fica o $\pi$: os reflexos anulam-se e a película é escura.

# Os dois reflexos

Cada reflexo leva $r^2$ da intensidade, $r = (n-1)/(n+1)$; na água, $r^2 = 0{,}020$. Entra $98\,\%$ da luz, e o segundo também leva quase $r^2$:

$$I_1 \approx I_2 \approx r^2 I_0$$

O caminho dá $4\pi ne/\lambda_0$; o reflexo de cima junta $\pi$:

$$\delta = \frac{4\pi ne}{\lambda_0} + \pi$$

## PERGUNTA: A BOLHA DE SABÃO

# A reflectância de uma película

Na intensidade da soma:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos\delta = 2r^2 I_0 + 2r^2 I_0 \cos\Big(\frac{4\pi ne}{\lambda_0} + \pi\Big)$$

Com $\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi$ e $R = I/I_0$:

$$R = 2r^2\Big(1 - \cos\frac{4\pi ne}{\lambda_0}\Big)$$

De zero, com $2ne = m\lambda_0$, a $4r^2 \approx 0{,}08$, com $2ne = (m + \frac{1}{2})\lambda_0$.

## PERGUNTA: A BOLHA DE SABÃO

# Onde ficam os máximos e os zeros

Em $R = 2r^2\big(1 - \cos(4\pi ne/\lambda_0)\big)$:

máximo: $\dfrac{4\pi ne}{\lambda_0} = (2m+1)\pi \;\Rightarrow\; \lambda_0 = \dfrac{4ne}{2m+1}$, zero: $\lambda_0 = \dfrac{2ne}{m}$

| $e$ | máximos | zeros |
|---|---|---|
| $100\,\text{nm}$ | **532**, 177 nm | 266, 133 nm |
| $250\,\text{nm}$ | 1330, **443** nm | **665**, 332 nm |

Só contam os que estão entre 400 e $700\,\text{nm}$, a negrito.

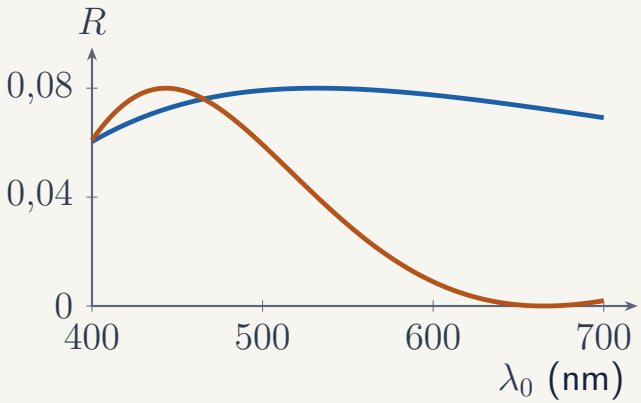
## PERGUNTA: A BOLHA DE SABÃO

# Cada espessura, as suas cores

Na luz branca, cada espessura reforça uns $\lambda_0$ e apaga outros.

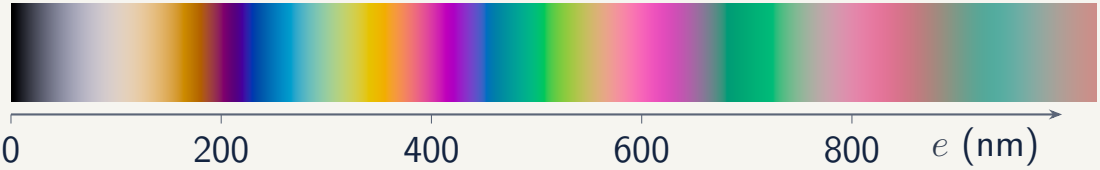
A azul, $100\,\text{nm}$: um máximo largo, nada se apaga. Reflexo quase branco.

A laranja, $250\,\text{nm}$: reforça o azul e apaga o vermelho. Reflexo azul.



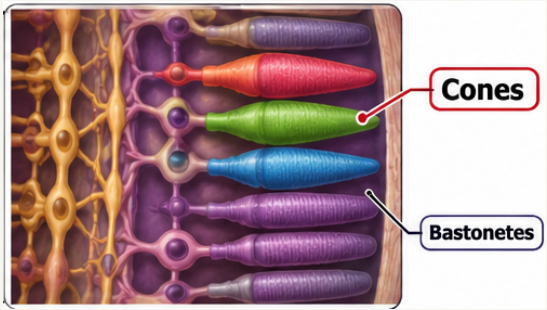
## PERGUNTA: A BOLHA DE SABÃO

# A cor de cada espessura




- Para cada $e$, o espectro $R(\lambda_0)$ convertido em cor pelos três tipos de cones.
- Até $50$ nm, negro e cinzento; $100$ nm, branco; depois amarelo, púrpura, azul.
- Acima de $300$ nm repetem-se, cada vez mais pálidas.

# Cones e bastonetes




Esquema da retina. As cores dos cones são simbólicas.

**Cones**: cerca de 6 milhões, concentrados na fóvea. Três tipos, com picos a 420, 530 e $560\,\mathrm{nm}$: dão a cor. Precisam de muita luz.

**Bastonetes**: cerca de 120 milhões, fora da fóvea. Um só tipo, muito sensível: visão nocturna, sem cor.

RESPOSTA

# A bolha de sabão

- Cada espessura reflecte uma cor: as que $R(\lambda_0)$ reforça.
- A gravidade faz a película escorrer: mais fina em cima, mais espessa em baixo. As cores formam faixas horizontais.
- Antes de rebentar, o topo fica negro: $e \ll \lambda$, só resta o $\pi$, e os reflexos anulam-se.

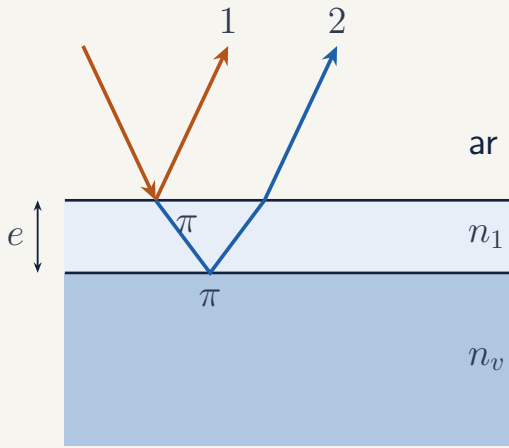
## PERGUNTA: O REFLEXO DAS LENTES

# Revestimento anti-reflexo

**Porque é que as lentes dos óculos têm um reflexo colorido?**

O vidro, $n_v = 1{,}52$, reflecte $r^2 \approx 4\,\%$ em cada face.

Põe-se por cima uma camada fina, de índice $n_1$ e espessura $e$. Passa a haver dois reflexos, e o segundo pode anular o primeiro.



## PERGUNTA: O REFLEXO DAS LENTES

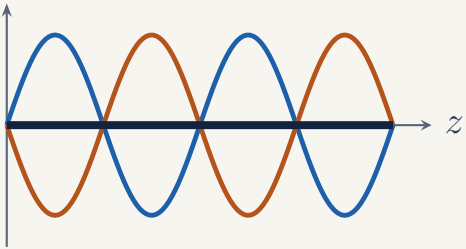
# A espessura: um quarto de onda

Com $1 < n_1 < n_v$, as duas reflexões são para meios mais densos: ambas invertem, e os $\pi$ cancelam-se.

Só conta o caminho. Para se anularem, meia onda:

$$2n_1 e = \frac{\lambda_0}{2} \;\Rightarrow\; e = \frac{\lambda_0}{4n_1}$$

$MgF_2$, $n_1 = 1{,}38$, a $550\,\text{nm}$: $e = 100\,\text{nm}$.




Reflexo 1 (azul), reflexo 2 (laranja), meia onda atrás: a soma é zero.

# O índice: amplitudes iguais

Para a soma ser zero, as amplitudes têm de ser iguais:

$$\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} = \frac{n_v - n_1}{n_v + n_1}$$

Multiplicando em cruz e simplificando, sobra $2n_1^2 = 2n_v$:

$$n_1 = \sqrt{n_v}$$

Vidro: $n_1 = 1{,}23$. Usa-se $MgF_2$, $n_1 = 1{,}38$, o mais próximo.

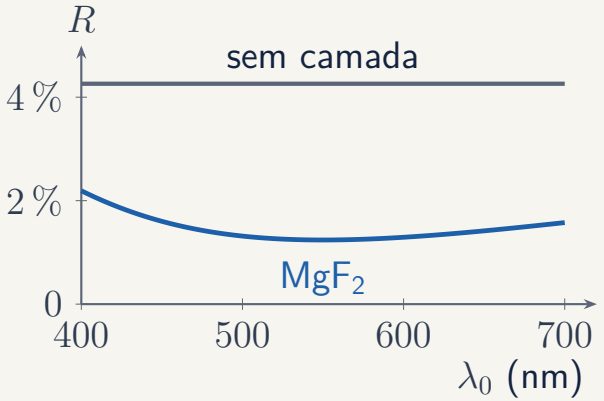
## PERGUNTA: O REFLEXO DAS LENTES

# Quanto reflecte um revestimento

Na intensidade da soma, com $I_i = r_i^2 I_0$ e $\delta = 4\pi n_1 e/\lambda_0$:

$$R \approx r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\delta$$

Com $MgF_2$, a $550\,\text{nm}$: de $4{,}3\,\%$ para $1{,}2\,\%$. Noutras cores, mais.



RESPOSTA

# O reflexo das lentes

- As lentes têm revestimentos anti-reflexo de quarto de onda.
- Uma camada só anula exactamente um comprimento de onda. Nas outras cores sobra um pouco de reflexo.
- Uma camada de $MgF_2$ anula o verde e reflecte azul e vermelho: púrpura. Os revestimentos de várias camadas anulam o azul e o vermelho e deixam um resíduo verde.

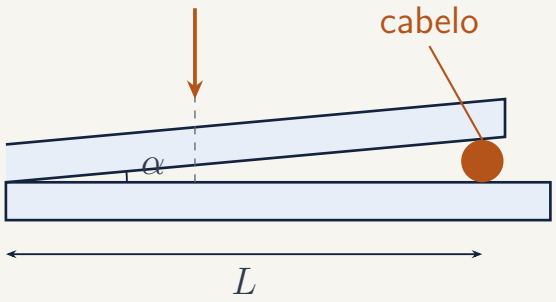
## PERGUNTA: A ESPESSURA DE UM CABELO

# Uma cunha de ar

**Como se mede a espessura de um cabelo?**

Duas lâminas tocam-se numa aresta; um cabelo de espessura $D$, a $L$ da aresta, afasta-as. O ângulo é $\alpha = D/L$.

A $x$ da aresta, o ar tem espessura $e = \alpha x$.



# Franjas de igual espessura

Das duas reflexões, só a de baixo, ar $\rightarrow$ vidro, muda de sinal. Há escuro quando

$$2e = m\lambda \;\Rightarrow\; x_m = \frac{m\lambda}{2\alpha}$$

Franjas paralelas à aresta, a distâncias iguais:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

De franja para franja, o ar fica $\lambda/2$ mais espesso.

RESPOSTA

# A espessura de um cabelo

- Conta-se o número $N$ de franjas escuras entre a aresta e o cabelo. Cada uma vale $\lambda/2$:

$$D = N\,\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda L}{2\,\Delta x}$$

- Laser de $633\,\text{nm}$, $L = 5\,\text{cm}$, franjas a $\Delta x = 0{,}2\,\text{mm}$: $N = 250$ e $D \approx 80\,\mu\text{m}$.

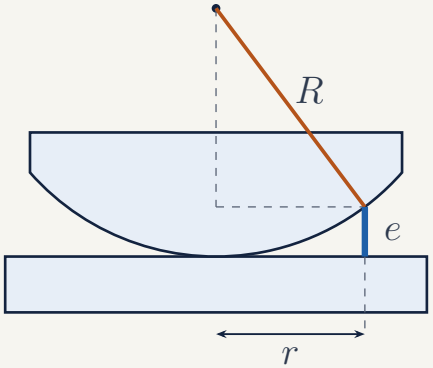
FRANJAS DE IGUAL ESPESSURA

# Os anéis de Newton: a camada de ar

Uma lente de raio $R$ pousada numa lâmina toca-lhe no centro. Para fora, o ar fica cada vez mais espesso.

No triângulo, $R^2 = r^2 + (R - e)^2$. Com $e \ll R$:

$$e \approx \frac{r^2}{2R}$$



## FRANJAS DE IGUAL ESPESSURA

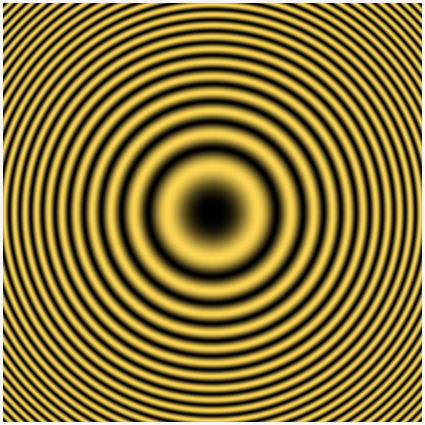
# Os anéis de Newton

A espessura só depende de $r$: as franjas são círculos. Como na cunha, escuro com $2e = m\lambda$:

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}$$

O centro, $e = 0$, é escuro. Os anéis apertam para fora, $r_m \propto \sqrt{m}$.

A $589\,\text{nm}$, com $R = 1\,\text{m}$:
$r_1 = 0{,}77\,\text{mm}$.



ENUNCIADO

# Exercício resolvido I

Um laser de $633\,\text{nm}$ ilumina duas fendas a $d = 0{,}25\,\text{mm}$. O ecrã está a $D = 2{,}0\,\text{m}$.

**(a)** Qual é a distância entre franjas claras?

**(b)** A que distância do centro está a primeira franja escura?

**(c)** Que intensidade há a $y = 1{,}27\,\text{mm}$, em relação ao máximo?

**(d)** Uma lâmina de vidro ($n = 1{,}50$, $8\,\mu\text{m}$) tapa uma fenda. Quanto se deslocam as franjas?

RESOLUÇÃO

# Exercício resolvido I

**(a)** Da distância entre franjas:

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d} = \frac{633 \times 10^{-9} \times 2{,}0}{0{,}25 \times 10^{-3}} = 5{,}06\,\text{mm}$$

**(b)** A meio caminho entre $m = 0$ e $m = 1$: $y = \Delta y/2 = 2{,}53\,\text{mm}$.

**(c)** $y = \Delta y/4$, logo $\delta = 2\pi/4 = \pi/2$:

$$I = I_{max} \cos^2(\pi/4) = \tfrac{1}{2}\, I_{max}$$

RESOLUÇÃO

# Exercício resolvido I

**(d)** Pela lâmina, o caminho óptico aumenta $(n-1)\,e$:

$$(n-1)\,e = 0{,}50 \times 8\,\mu\text{m} = 4{,}0\,\mu\text{m} = 6{,}3\,\lambda$$

A franja central passa para onde $d \sin\theta$ compensa este atraso, do lado da fenda tapada:

$$\Delta y = \frac{(n-1)\,e\,D}{d} = \frac{4{,}0 \times 10^{-6} \times 2{,}0}{0{,}25 \times 10^{-3}} = 32\,\text{mm}$$

ENUNCIADO

# Exercício resolvido II

Uma lente de vidro ($n_v = 1{,}52$) recebe uma camada de $MgF_2$ ($n_1 = 1{,}38$), calculada para $550\,\text{nm}$, na incidência normal.

**(a)** Que espessura deve ter a camada?

**(b)** Quanto reflecte o vidro sem camada?

**(c)** E com a camada, a $550\,\text{nm}$?

**(d)** E a $450\,\text{nm}$ e a $650\,\text{nm}$? De que cor é o reflexo?

RESOLUÇÃO

# Exercício resolvido II

**(a)** Quarto de onda dentro da camada:

$$e = \frac{\lambda_0}{4n_1} = \frac{550}{4 \times 1{,}38} = 99{,}6\,\text{nm}$$

**(b)** $R = \left(\frac{1{,}52-1}{1{,}52+1}\right)^2 = 0{,}043$: $4{,}3\,\%$ por face.

**(c)** $r_1 = \frac{1-1{,}38}{2{,}38} = -0{,}160$, $r_2 = \frac{1{,}38-1{,}52}{2{,}90} = -0{,}048$, $\delta = \pi$:

$$R = (r_1 - r_2)^2 = (0{,}112)^2 = 0{,}012$$

RESOLUÇÃO

# Exercício resolvido II

**(d)** A espessura não muda; muda $\delta = 4\pi n_1 e/\lambda_0 = \pi \times 550/\lambda_0$:

$$\delta(450\,\text{nm}) = 220^\circ, \qquad \delta(650\,\text{nm}) = 152^\circ$$

Com $R = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\delta = 0{,}0278 + 0{,}0154\cos\delta$:

$$R(450) = 1{,}6\,\%, \qquad R(650) = 1{,}4\,\%$$

Reflecte mais o azul e o vermelho que o verde: púrpura.

ENUNCIADO

# Exercício resolvido III

A película de lágrima ($n = 1{,}337$) sobre a córnea ($n = 1{,}376$) é vista em reflexão, a $550\,\text{nm}$, na incidência normal.

**(a)** Que reflexos mudam de sinal? Qual é a condição de franja clara?

**(b)** Que diferença de espessura há entre franjas claras vizinhas?

**(c)** Do bordo ao centro há 15 franjas. Que espessura tem?

**(d)** Num ponto passam 6 franjas em $10\,\text{s}$. Quando rompe a película?

RESOLUÇÃO

# Exercício resolvido III

**(a)** Ar $\rightarrow$ lágrima e lágrima $\rightarrow$ córnea: ambas para meios mais densos. Os dois $\pi$ cancelam-se:

$$2ne = m\lambda_0 \quad \text{(clara)}$$

**(b)** De $m$ para $m+1$:

$$\Delta e = \frac{\lambda_0}{2n} = \frac{550}{2 \times 1{,}337} = 206\,\text{nm}$$

RESOLUÇÃO

# Exercício resolvido III

**(c)** $e = 15 \times 0{,}206\,\mu\text{m} = 3{,}1\,\mu\text{m}$.

**(d)** Cada franja que passa é uma variação de $0{,}206\,\mu\text{m}$:

$$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{6 \times 0{,}206}{10} = 0{,}123\,\mu\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

Os $3{,}1\,\mu\text{m}$ desaparecem em

$$t = \frac{3{,}1}{0{,}123} \approx 25\,\text{s}$$

Tempo de rotura: abaixo de $10\,\text{s}$, olho seco.