DMFCUL ALGA II 2015/2016

Exame 21 de Junho de 2016 - Duração: 3 horas, sem consulta

Não se esqueça de escrever o *Nome, Número de Aluno* e *Número do Enunciado* em todos os cadernos. **Justifique todas as respostas.**

ENUNCIADO I

1. Sejam $U = \, < (1,1,1,1), (1,2,3,4) > \, \leq \mathbb{R}^4$ e $W = \, < (1,2,6,4), \, (1,2,3,8) > \, \leq \mathbb{R}^4$. Mostre que $U \cap W = 0$ e que $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

2. Seja $V = \mathbb{R}^4$ e seja $W = \, < (1,0,1,0), (0,1,0,1) > \, \leq \mathbb{R}^4$.
(a) dim$(V/W) =$?
(b) No espaço quociente V/W, mostre que os elementos $x = (1,0,0,0) + W$ e $y = (2,1,1,1) + W$ são linearmente dependentes.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule o polinómio característico e o(s) valore(s) próprio(s) de A. Encontre uma matriz invertível P e uma matriz triangular superior T tais que $P^{-1}AP = T$. Verificar a resposta.

4. Encontrar uma matriz invertível S tal que $S^{-1}TS$ é diagonal por blocos (e verificar a resposta) onde $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Sugestão $E_{ij}(-\alpha)TE_{ij}(\alpha)$ onde $\alpha = -t_{ij}/(t_{ii} - t_{jj})$.

5. Indique as formas normais de Jordan possíveis para matrizes $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ com o polinómio caraterístico $P_A(t) = (t-2)^4(t-1)$.

6. Seja V um espaço vectorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam $U, W \leq V$. Mostre que dim$((U+W)/W) =$ dim$(U/(U \cap W))$.

[continua na p. 2 $\longrightarrow$

7. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Indique os sinais dos valores próprios de A.

(b) Encontre $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, tal que

$$4x_1^2 - 16x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 - 5x_3^2 = -18.$$

8. Seja $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Determine matrizes $Q, R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tais que $M = QR$ onde Q é unitária e R é triangular superior com as suas entradas diagonais reais e positivas.

9. Reduza a equação seguinte de uma cónica $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^2$ para uma das formas $Jx_1^2 + Kx_2^2 = L$ ou $x_1^2 = Lx_2$ ou $x_2^2 = Lx_1$ ($J, K, L \in \mathbb{R}$). Diga se $\mathcal{C}$ é elipse, hipérbole ou parábola.

$$x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 - 1 = 0.$$

10. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico, considere o plano $\mathcal{P} = (0,0,1) + \ < (1,0,0), (0,1,0) >$, a recta $\mathcal{R} = (1,0,0) + \ < (0,0,1) >$ e o ponto $\Pi = \{(1,1,1)\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ e determine $\mathcal{R} \cap \mathcal{P}$.

(b) Determine $< \mathcal{R}, \Pi >$ e mostre que é um plano.

(c) Determine um sistema de equações cartesianas e uma representação paramétrica do plano $< \mathcal{R}, \Pi >$.

(d) Determine uma recta $\mathcal{S}$ que contenha o ponto Π e seja ortogonal a $\mathcal{P}$.

11. Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A hermítica. Se $A^3 = I_n$, mostre que $A = I_n$.

FIM DO EXAME

Formulário - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja V espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munido do produto interno $(\cdot\,|\,\cdot)$. Seja $(v_1, \cdots, v_m)$ uma família independente de vectores de V. Então a família $(u_1, \cdots, u_m)$ definida por

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{(v_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 \\ &\cdots \\ u_m &= v_m - \frac{(v_m|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 - \frac{(v_m|u_2)}{(u_2|u_2)}u_2 - \cdots - \frac{(v_m|u_{m-1})}{(u_{m-1}|u_{m-1})}u_{m-1} \end{aligned}$$

é família ortogonal de vectores não-nulos em V e $< u_1, \cdots, u_i > \ = \ < v_1, \cdots, v_i >$, $i = 1, \cdots, m$.