

Ciências ULisboa

Faculdade
de Ciências
da Universidade
de Lisboa

PRÁTICAS DE CARTOGRAFIA

DEGGE – LICENCIATURA EM ENGENHARIA GEOESPACIAL

2016/2017

ALGUNS CONCEITOS

SISTEMAS DE REFERÊNCIA ADOTADOS EM PORTUGAL

Direção-Geral do Território (DGT)

http://www.dgterritorio.pt/cartografia_e_geodesia/geodesia/sistemas_de_referencia/

Portugal Continental	
<p>ED50 - European Datum 1950 (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TMo6-ETRS89)</p> <p>Bessel Datum Lisboa (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TMo6-ETRS89)</p> <p>Datum Lisboa (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TMo6-ETRS89)</p> <p>Datum 73 (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TMo6-ETRS89)</p>	<p>PT-TMo6/ETRS89 - European Terrestrial Reference System 1989</p>

Arquipélago dos Açores	Arquipélago da Madeira	Regiões Autónomas
<p>Datum S. Braz - S. Miguel (Grupo Oriental do Arquipélago dos Açores)</p> <p>Datum Base SW - Graciosa (Grupo Central do Arquipélago dos Açores)</p> <p>Datum Observatório - Flores (Grupo Ocidental do Arquipélago dos Açores)</p>	<p>Datum Base SE - Porto Santo (Arquipélago da Madeira)</p>	<p>PTRAo8-UTM/ITRF93 - realização do International Terrestrial Reference Frame 1993</p>

Centro de Informação Geoespacial do Exército (CIGeoE)

<https://www.igeoe.pt/index.php?id=38&cat=3>

Portugal Continental	
Datum Lisboa militares (Obsoleto - Substituído pelo sistema TM/WGS84)	WGS84 / TM (Gauss-Kruger)

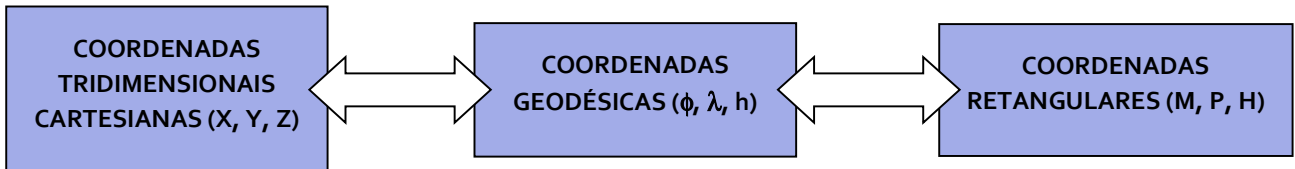
Regiões Autónomas
WGS 84 / UTM

TIPOS DE COORDENADAS

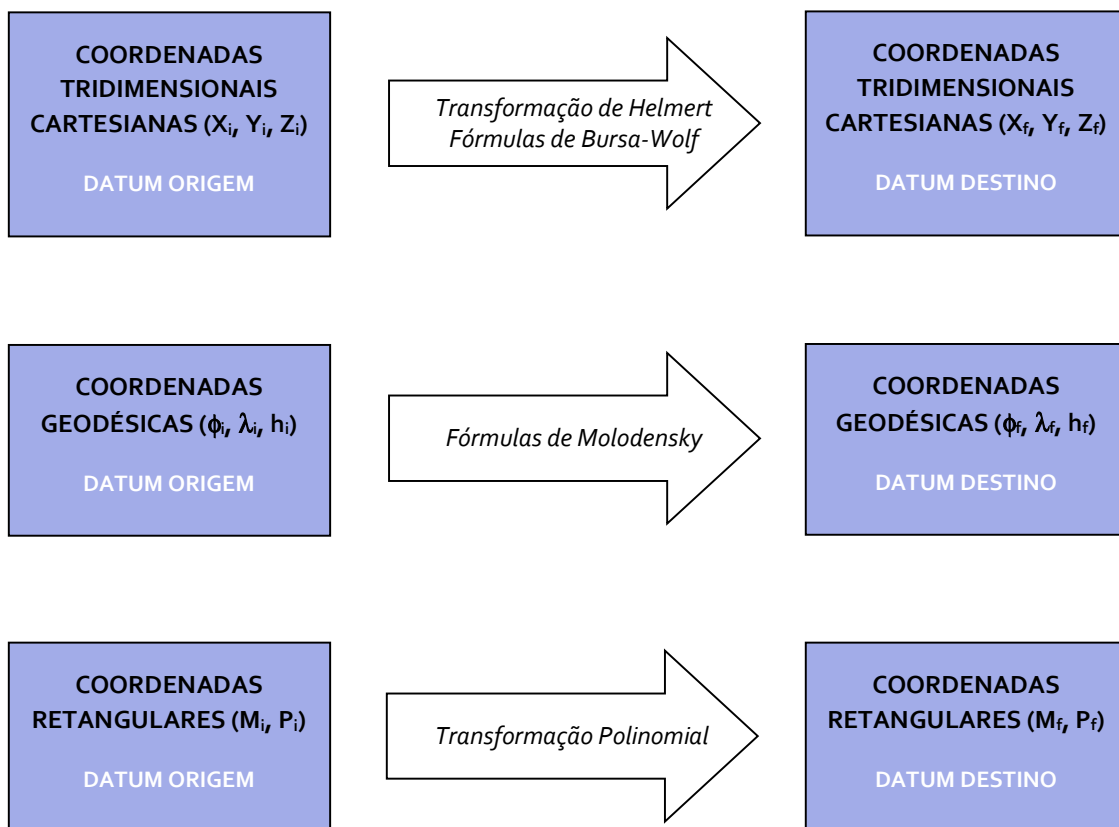
Coordenadas	V.G. Aboboreira (Beja) PT-TMo6-ETRS89
Cartesianas (X, Y, Z)	X= 4993821.5571 m Y= -676850.4038 m Z= 3896819.7516 m
Geodésicas ou geográficas (ϕ , λ , h)	ϕ = 37° 53' 58,7635" N λ = 07° 43' 07,2999" W Gr h= 257,85 m
Retangulares (M, P)	M= 36 448,61 m P= -196 253,96 m

TRANSFORMAÇÃO ENTRE COORDENADAS

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS NUM MESMO DATUM



TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ENTRE DIFERENTES DATA



EXERCÍCIO 1

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação direta das coordenadas geodésicas (ϕ , λ) dos seguintes vértices geodésicos nas correspondentes coordenadas retangulares (M, P).

V.G. Aboboreira (Beja)			V. G. Cabeço da Ponta (Porto Santo - Madeira)
PT-TMo6/ETRS89	Datum Lisboa	Datum 73	PTRA08-UTM/ITRF93
$\phi = 37^\circ 53' 58,7635''$ N	$\phi = 37^\circ 53' 53,17608''$ N	$\phi = 37^\circ 53' 56,01135''$ N	$\phi = 33^\circ 02' 15,2697''$ N
$\lambda = 07^\circ 43' 07,2999''$ WGr	$\lambda = 07^\circ 43' 03,09455''$ WGr	$\lambda = 07^\circ 43' 10,59207''$ WGr	$\lambda = 16^\circ 21' 41,8679''$ WGr
h = 257,85 m	h = 208,7901 m	h = 204,8015 m	h = 32,27 m
M = 36 448,61 m	M = 36 448,0117 m	M = 36 445,0373 m	M = 372 851,2519 m
P = -196 253,96 m	P = -196 254,9317 m	P = -196 255,3140 m	P = 3 656 276,3028 m

A transformação direta das coordenadas geodésicas (ϕ , λ) de um ponto nas correspondentes coordenadas planas (x, y) através da projeção de Gauss (também conhecida por Transversa de Mercator) é definida por via analítica através das fórmulas obtidas por desenvolvimento em série:

$$y = k_0 \cdot \left(\sigma + \frac{\lambda^2}{2} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi + \frac{\lambda^4}{24} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^3 \phi \cdot k_2 + \frac{\lambda^6}{720} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^5 \phi \cdot k_4 + \frac{\lambda^8}{40320} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^7 \phi \cdot k_6 \right)$$

$$x = k_0 \cdot \left(\lambda \cdot N \cdot \cos \phi + \frac{\lambda^3}{6} \cdot N \cos^3 \phi \cdot k_1 + \frac{\lambda^5}{120} \cdot N \cos^5 \phi \cdot k_3 + \frac{\lambda^7}{5040} \cdot N \cos^7 \phi \cdot k_5 \right)$$

sendo k_0 o fator de escala, σ o comprimento do arco de meridiano desde o paralelo origem até ao paralelo do ponto, λ a diferença de longitude entre o ponto e o meridiano central da projecção ($\lambda - \lambda_0$), ϕ a latitude geográfica do ponto, N a grande normal à latitude ϕ :

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

(a , e^2) os parâmetros característicos do elipsóide de referência e ρ o raio de curvatura do meridiano à latitude ϕ :

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi)^{3/2}}$$

$$e^2 = f \cdot (2 - f)$$

onde e é a excentricidade do elipsóide e f é o achatamento do elipsóide; e ainda

$$k_1 = \frac{N}{\rho} - \text{tg}^2 \phi$$

$$k_2 = \frac{N}{\rho} + 4 \cdot \frac{N^2}{\rho^2} - \text{tg}^2 \phi$$

$$k_3 = 4 \cdot \frac{N^3}{\rho^3} \cdot (1 - 6 \cdot \text{tg}^2 \phi) + \frac{N^2}{\rho^2} \cdot (1 + 8 \cdot \text{tg}^2 \phi) - 2 \cdot \frac{N}{\rho} \cdot \text{tg}^2 \phi + \text{tg}^4 \phi$$

$$k_4 = 8 \cdot \frac{N^4}{\rho^4} \cdot (11 - 24 \cdot \text{tg}^2 \phi) - 28 \cdot \frac{N^3}{\rho^3} \cdot (1 - 6 \cdot \text{tg}^2 \phi) + \frac{N^2}{\rho^2} \cdot (1 - 32 \cdot \text{tg}^2 \phi) - 2 \cdot \frac{N}{\rho} \cdot \text{tg}^2 \phi + \text{tg}^4 \phi$$

$$k_5 = 61 - 479 \cdot \text{tg}^2 \phi + 179 \cdot \text{tg}^4 \phi - \text{tg}^6 \phi$$

$$k_6 = 1385 - 3111 \cdot \text{tg}^2 \phi + 543 \cdot \text{tg}^4 \phi + \text{tg}^6 \phi$$

Na projeção de Gauss, aplicada à cartografia portuguesa, usa-se um factor de escala $k_0 = 1$, dada a pequena largura da nossa faixa continental. A projecção UTM é a projecção de Gauss aplicada a cada um dos 60 fusos, de 6° cada, em que podemos dividir o globo terrestre, tomando-se $k_0 = 0,9996$ (valor escolhido de modo a tornar iguais as deformações da carta no meridiano médio e nos meridianos limítrofes do fuso).

O comprimento aproximado do arco de meridiano σ entre quaisquer duas latitudes ϕ_0 e ϕ é determinado através de:

$$\sigma = a \cdot (1 - e^2) \cdot \left\{ A \cdot (\phi - \phi_0) - \frac{B}{2} \cdot (\sin 2\phi - \sin 2\phi_0) + \frac{C}{4} \cdot (\sin 4\phi - \sin 4\phi_0) - \frac{D}{6} \cdot (\sin 6\phi - \sin 6\phi_0) + \frac{E}{8} \cdot (\sin 8\phi - \sin 8\phi_0) - \frac{F}{10} \cdot (\sin 10\phi - \sin 10\phi_0) \right\}$$

com

$$A = 1 + \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{45}{64} \cdot e^4 + \frac{175}{256} \cdot e^6 + \frac{11025}{16384} \cdot e^8 + \frac{43659}{65536} \cdot e^{10} + \dots$$

$$B = \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{15}{16} \cdot e^4 + \frac{525}{512} \cdot e^6 + \frac{2205}{2048} \cdot e^8 + \frac{72765}{65536} \cdot e^{10} + \dots$$

$$C = \frac{15}{64} \cdot e^4 + \frac{105}{256} \cdot e^6 + \frac{2205}{4096} \cdot e^8 + \frac{10395}{16384} \cdot e^{10} + \dots$$

$$D = \frac{35}{512} \cdot e^6 + \frac{315}{2048} \cdot e^8 + \frac{31185}{131072} \cdot e^{10} + \dots$$

$$E = \frac{315}{16384} \cdot e^8 + \frac{3465}{65536} \cdot e^{10} + \dots$$

$$F = \frac{3465}{131072} \cdot e^{10} + \dots$$

	PT-TMo6/ETRS89	Datum Lisboa	Datum 73	PTRAo8-UTM/ITRF93
Elipsoide de referência:	GRS80 a = 6 378 137 m f = 1 / 298,257 222 101	Hayford (ou Internacional 1924) a = 6 378 388 m f = 1/297	Hayford (ou Internacional 1924) a = 6 378 388 m f = 1/297	GRS80 a = 6 378 137 m f = 1 / 298,257 222 101
Projeção cartográfica:	Transversa de Mercator	Transversa de Mercator	Transversa de Mercator	Transversa de Mercator
Latitude da origem das coordenadas retangulares:	39° 40' 05",73 N	39° 40' 00" N	39° 40' 00" N	0°
Longitude da origem das coordenadas retangulares:	08° 07' 59",19 W	08° 07' 54",862 W	08° 07' 54",862 W	33° W (fuso 25) 27° W (fuso 26) 15° W (fuso 28)
Falsa origem das coordenadas retangulares:	Em M: 0 m Em P: 0 m	Em M: 0 m Em P: 0 m	Em M: +180,598 m Em P: -86,990 m	Em M: +500 000 m Em P: 0 m
Coefficiente de redução de escala no meridiano central:	1,0	1,0	1,0	0,9996

EXERCÍCIO 2

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação inversa das coordenadas retangulares (M, P) dos vértices geodésicos utilizados no exercício 1 nas correspondentes coordenadas geodésicas (ϕ , λ).

Para efectuar a transformação inversa das coordenadas planas Gauss (ou UTM) nas correspondentes coordenadas geodésicas basta utilizar um processo iterativo:

- 1) Toma-se como ponto de partida um valor aproximado para ϕ (ϕ_{ap}), saído de um cálculo anterior ou considerando um valor aproximado para o arco de meridiano σ :

$$\sigma_{ap} = \frac{P}{k_0}$$

sendo P a distância à perpendicular; donde a primeira aproximação para ϕ é dada por:

$$\phi = \phi_0 + \frac{\sigma_{ap}}{A \cdot a \cdot (1 - e^2)}$$

- 2) Com base neste valor aproximado da latitude recalcula-se o comprimento de arco de meridiano σ usando a expressão:

$$\sigma = a \cdot (1 - e^2) \cdot \left\{ A \cdot (\phi - \phi_0) - \frac{B}{2} \cdot (\sin 2\phi - \sin 2\phi_0) + \frac{C}{4} \cdot (\sin 4\phi - \sin 4\phi_0) - \frac{D}{6} \cdot (\sin 6\phi - \sin 6\phi_0) + \frac{E}{8} \cdot (\sin 8\phi - \sin 8\phi_0) - \frac{F}{10} \cdot (\sin 10\phi - \sin 10\phi_0) \right\}$$

- 3) Com este novo valor para σ podemos determinar a correcção a aplicar a ϕ através de:

$$\Delta\phi = \frac{(\sigma_{ap} - \sigma)}{\rho}$$

onde

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}}$$

sendo o novo valor da latitude igual a:

$$\phi' = \phi + \Delta\phi$$

- 4) Entra-se de seguida num processo iterativo, recalculando σ , ρ e $\Delta\phi$ e o novo valor da ϕ' até que $\Delta\phi$ seja inferior à precisão desejada (10^{-10});
- 5) Com o valor da latitude ϕ' resultante do processo iterativo, calcula-se a latitude e longitude do ponto, através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \phi = \phi' - & \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left(\frac{M^2}{2 \cdot k_0 \cdot N} \right) + \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left(\frac{M^4}{24 \cdot k_0^3 \cdot N^3} \right) \cdot (-4\psi^2 + 9\psi \cdot (1 - t^2) + 12t^2) - \\ & - \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left(\frac{M^6}{720 \cdot k_0^5 \cdot N^5} \right) \cdot (8\psi^4 \cdot (11 - 24t^2) - 12\psi^3 \cdot (21 - 71t^2) + 15\psi^2 \cdot (15 - 98t^2 + 15t^4) + \\ & + 180\psi \cdot (5t^2 - 3t^4) - 360t^4) + \left(\frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left(\frac{M^8}{40320 \cdot k_0^7 \cdot N^7} \right) \cdot (1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_0) \cdot \cos \phi' = & \left(\frac{M}{k_0 \cdot N} \right) - \left(\frac{M^3}{6 \cdot k_0^3 \cdot N^3} \right) \cdot (\psi + 2t^2) + \\ & + \left(\frac{M^5}{120 \cdot k_0^5 \cdot N^5} \right) \cdot (-4\psi^3 \cdot (1 - 6t^2) + \psi^2 \cdot (9 - 68t^2) + 72\psi t^2 + 24t^4) - \\ & - \left(\frac{M^7}{5040 \cdot k_0^7 \cdot N^7} \right) \cdot (61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6) \end{aligned}$$

sendo M a distância à meridiana, $\psi = \frac{N}{\rho}$, calculado com o valor da latitude ϕ' , e $t = \text{tg} \phi'$.

EXERCÍCIO 3

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação direta entre coordenadas geodésicas (ϕ , λ , h) dos seguintes vértices geodésicos nas correspondentes coordenadas cartesianas tridimensionais (X , Y , Z).

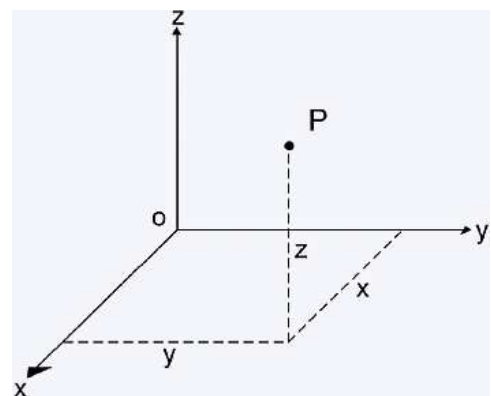
V.G. Aboboreira (Beja)	V. G. Cabeço da Ponta (Porto Santo - Madeira)
PT-TMo6/ETRS89	PTRAo8-UTM/ITRF93
$\phi = 37^{\circ} 53' 58,7635''$ N	$\phi = 33^{\circ} 02' 15,2697''$ N
$\lambda = 07^{\circ} 43' 07,2999''$ WGr	$\lambda = 16^{\circ} 21' 41,8679''$ WGr
$h = 257,85$ m	$h = 32,27$ m
$X = 4993821,5571$ m	$X = 5135480,8889$ m
$Y = -676850,4038$ m	$Y = -1507717,9053$ m
$Z = 3896819,7516$ m	$Z = 3457470,4300$ m

Considerando um triedro cartesiano OXYZ centrado com o elipsóide de referência, com o eixo dos ZZ coincidente com o seu eixo de revolução, com o eixo dos XX assente no semi-plano origem das longitudes geodésicas e o eixo dos YY escolhido de modo a tornar o triedro directo, as coordenadas geodésicas (ϕ , λ , h) de um ponto genérico relacionam-se com as suas coordenadas cartesianas tridimensionais (X , Y , Z) por meio das seguintes expressões:

$$X = (N+h) \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda$$

$$Y = (N+h) \cdot \cos\phi \cdot \sin\lambda$$

$$Z = [(1-e^2) \cdot N+h] \cdot \sin\phi$$



sendo N a grande normal ao elipsóide de referência à latitude ϕ , h a altitude elipsoidal do ponto e (a , e^2) os seus parâmetros de forma. Estas expressões correspondem à transformação directa das coordenadas geodésicas (ϕ , λ , h) de um ponto nas correspondentes coordenadas cartesianas tridimensionais (X , Y , Z).

EXERCÍCIO 4

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação inversa entre coordenadas cartesianas tridimensionais (X, Y, Z) dos vértices geodésicos utilizados no exercício 3 nas correspondentes coordenadas geodésicas (ϕ , λ , h).

A transformação inversa das coordenadas cartesianas tridimensionais (X, Y, Z) de um ponto nas correspondentes coordenadas geodésicas (ϕ , λ , h) é executada recorrendo a um processo iterativo:

- 1) A longitude λ pode ser facilmente calculada a partir das coordenadas cartesianas tridimensionais utilizando a seguinte expressão:

$$\lambda = \text{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

- 2) A latitude é obtida por um processo iterativo dado que as quantidades ϕ e h são dependentes uma da outra, pelo que se utiliza um valor aproximado para a latitude o qual é calculado por:

$$\phi_{\text{ap}} = \text{arctg}\left(\frac{Z}{P \cdot (1 - e^2)}\right)$$

com P igual a:

$$P = (X^2 + Y^2)^{1/2}$$

- 3) Com base neste valor aproximado da latitude calcula-se o valor de N, e em seguida o valor para a altitude elipsoidal h usando a expressão:

$$h = \frac{P}{\cos \phi} - N$$

- 4) O processo iterativo continua recalculando o valor de ϕ , com N e h calculados no passo anterior, utilizando a expressão:

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{Z + e^2 \cdot N \cdot \sin \phi}{P}\right)$$

- 5) Com este novo valor da latitude ϕ , recalcula-se o valor de N, da altitude elipsoidal h e em seguida um novo valor para a latitude ϕ e assim sucessivamente até alcançar a precisão desejada para a transformação ($\phi_i - \phi_{i-1} = 10^{-10}$).

EXERCÍCIO 5

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas cartesianas tridimensionais (X, Y, Z) - Transformação de Helmert/Fórmulas de Bursa-Wolf - de dois *data* distintos.

Ponto	
Datum 73	PT-TMo6/ETRS89
X= 4815286 m	X= 4815062,1368 m
Y= -578951 m	Y= -578841,2009 m
Z= 4129745 m	Z= 4129782,0548 m

A transformação de sete parâmetros de Helmert, expressa em formato matricial, é designada por fórmula de Bursa-Wolf e tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1 + \alpha) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 1 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

onde (X, Y, Z) são as coordenadas de um dado ponto no sistema de referência geocêntrico origem, (X_n, Y_n, Z_n) são as coordenadas desse mesmo ponto no sistema de referência geocêntrico destino, (ΔX, ΔY, ΔZ) são as componentes do vetor que une os centros dos dois elipsóides, (R_x, R_y, R_z) são os ângulos de rotação em torno dos eixos de referencial de origem e α é o factor de escala (expresso em partes por milhão - ppm).

Nota: A fórmula apresentada encontra-se em conformidade com a norma ISO 19111:2007. No entanto, é de ter em conta outras versões utilizadas em alguns programas que se reflectem nos sinais e/ou no sentido das rotações.

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação de Bursa-Wolf do datum Lisboa e datum 73 para PT-TMo6-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (http://www.dgterritorio.pt/cartografia_e_geodesia/geodesia/transformacao_de_coordenadas/parametros_de_transformacao_de_coordenadas/portugal_continental/bursa_wolf_do_datum_lisboa_e_datum_73_para_pt_tmo6_etsr89/) em fevereiro de 2017.

Parâmetros de Transformação de Bursa-Wolf do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TMo6-ETRS89		
	Datum Lisboa para PT-TMo6/ETRS89	Datum 73 para PT-TMo6/ETRS89
ΔX (m)	-283,088	-230,994
ΔY (m)	-70,693	+102,591
ΔZ (m)	+117,445	+25,199
R_x (")	-1,157	+0,633
R_y (")	+0,059	-0,239
R_z (")	-0,652	+0,900
α (ppm)	-4,058	+1,950

EXERCÍCIO 6

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas geodésicas (ϕ , λ , h) - Fórmulas de Molodensky - de dois *data* distintos.

Ponto	
Datum 73	PT-TMo6/ETRS89
$\phi = 40^{\circ} 36' 10''$ N	$\phi = 40^{\circ} 36' 12,92913''$ N
$\lambda = 6^{\circ} 51' 17''$ WGr	$\lambda = 6^{\circ} 51' 13,48258''$ WGr
$h = 826$ m	$h = 884,0728$ m

A transformação de Molodensky tem cinco parâmetros tendo a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_n = \phi + \frac{-\Delta X \sin \phi \cos \lambda - \Delta Y \sin \phi \sin \lambda + \Delta Z \cos \phi + \Delta a \frac{e^2 N \sin \phi \cos \phi}{a} + \Delta f \sin \phi \cos \phi \left(\frac{a}{b} \rho + \frac{b}{a} N \right)}{\rho + h} \\ \lambda_n = \lambda + \frac{-\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda}{(N+h) \cos \phi} \\ h_n = h + \Delta X \cos \phi \cos \lambda + \Delta Y \cos \phi \sin \lambda + \Delta Z \sin \phi - \Delta a \left(\frac{a}{N} \right) + \Delta f \left(\frac{b}{a} N \sin^2 \phi \right) \end{array} \right.$$

onde ϕ_n , λ_n , h_n são a latitude, longitude (em radianos) e a altitude elipsoidal (em metros) a obter, ϕ , λ , h são a latitude, longitude (em radianos) e a altitude elipsoidal (em metros) originais, ΔX , ΔY , ΔZ as componentes do vetor que une os centros dos dois elipsóides, a , b os semi-eixos maior e menor do elipsóide origem, e , f a primeira excentricidade e o achatamento do elipsóide origem, Δa , Δf a diferença entre os semi-eixos maiores e os achatamentos dos dois elipsóides, N o raio de curvatura do primeiro vertical (Grande Normal) e ρ o raio de curvatura do meridiano.

$$b = a \cdot (1 - f)$$

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação de Molodensky do datum Lisboa e datum 73 para PT-TMo6-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (http://www.dgterritorio.pt/cartografia_e_geodesia/geodesia/transformacao_de_coordenadas/parametros_de_transformacao_de_coordenadas/portugal_continental/molodensky_do_datum_lisboa_e_datum_73_para_pt_tm06_etr89/) em fevereiro de 2017.

Parâmetros de Transformação de Molodensky do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TMo6-ETRS89		
	Datum Lisboa para PT-TMo6/ETRS89	Datum 73 para PT-TMo6/ETRS89
ΔX (m)	-303.861	-223.150
ΔY (m)	-60.693	+110.132
ΔZ (m)	+103.607	+36.711
Δa (m)	-251.000	-251.000
Δf (m)	$-1.4192686 \times 10^{-5}$	$-1.4192686 \times 10^{-5}$

EXERCÍCIO 7

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas retangulares (M, P) - Transformação Polinomial - de dois *data* distintos.

Ponto	
Datum 73	PT-TMo6/ETRS89
M= 20000 m	M= 19999,7773 m
P= 20000 m	P= 20000,1413 m
h= 100 m	h= 155,6977 m

A transformação polinomial de grau 2 permite transformar coordenadas retangulares num determinado datum nas coordenadas retangulares num outro datum:

$$M_n = a_0 + a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2$$

$$P_n = b_0 + b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2$$

onde M_n , P_n são as coordenadas rectangulares a obter, X , Y as coordenadas rectangulares originais, a_i , b_i os coeficientes de transformação, X_0 , Y_0 , h , k os parâmetros de normalização e u e v têm a seguinte forma:

$$u = \frac{X - X_0}{h} \quad v = \frac{Y - Y_0}{k}$$

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação polinomial do datum Lisboa e datum 73 para PT-TMo6-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (http://www.dgterritorio.pt/cartografia_e_geodesia/geodesia/transformacao_de_coordenadas/parametros_de_transformacao_de_coordenadas/portugal_continental/polinomios_de_grau_2_do_datum_lisboa_e_datum_73_para_pt_tmo6_etr89/) em fevereiro de 2017.

Coeficientes de Transformação Polinomial de Grau 2 do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TM06-ETRS89		
	Datum Lisboa para PT-TM06/ETRS89	Datum 73 para PT-TM06/ETRS89
a₀	+1,38051	+0,28961
a₁	+129998,56256	+129999,16977
a₂	-1,69483	-5,26888
a₃	-0,57226	+0,32257
a₄	-2,9606	-0,87853
a₅	-2,45601	-1,22237
b₀	+0,80894	-0,08867
b₁	+1,31669	+2,39595
b₂	+279995,74505	+279997,91435
b₃	+0,24888	+0,15146
b₄	+2,65999	+1,11109
b₅	-3,86484	-1,06143
X₀	0	0
Y₀	0	0
h	+130000	+130000
k	+280000	+280000