DMFCUL ALGA II   2015/2016

Exame 08 de Julho de 2016 - Duração: 3 horas, sem consulta

Não se esqueça de escrever o *Nome, Número de Aluno* e *Número do Enunciado* em todos os cadernos. **Justifique todas as respostas.**

ENUNCIADO I

1. Sejam $U = \ < (4,3,2,1),(5,5,3,3) > \ \leq \mathbb{R}^4$ e $W = \ < (5,3,4,3),\ (6,5,5,5) > \ \leq \mathbb{R}^4$. Mostre que $\dim(U \cap W) = 1$ e que $U + W = U \oplus \ < (5,3,4,3) >$.

2. Seja $V = \mathbb{R}^4$ e seja $W = \ < (1,0,1,1),(1,1,0,1) > \ \leq \mathbb{R}^4$. No espaço quociente V/W, mostre que os elementos $x = (1,2,3,4) + W$ e $y = (4,4,4,7) + W$ são iguais.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule o(s) valore(s) próprio(s) de A. Encontre uma matriz invertível P e uma matriz triangular superior T tais que $P^{-1}AP = T$.

4. Encontrar uma matriz invertível S tal que $S^{-1}TS$ é diagonal por blocos onde $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Sugestão $E_{ij}(-\alpha)TE_{ij}(\alpha)$ onde $\alpha = -t_{ij}/(t_{ii} - t_{jj})$.

5. Indique as formas normais de Jordan possíveis para matrizes $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ com o polinómio caraterístico $P_A(t) = (t-2)^5$.

6. Seja $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ e suponha que A tem valor próprio 0 com multiplicidade algébrica 3. Mostre que $A^3 = 0$ (a matriz nulo tipo 3×3).

[continua na p. 2 $\longrightarrow$

7. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Indique os sinais dos valores próprios de A.

(b) Encontre $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, tal que

$$x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2 = -60.$$

8. Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Determine matrizes $Q, R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tais que $M = QR$ onde Q é unitária e R é triangular superior com as suas entradas diagonais reais e positivas.

9. Reduza a equação seguinte de uma cónica $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^2$ para uma das formas $Jx_1^2 + Kx_2^2 = L$ ou $x_1^2 = Lx_2$ ou $x_2^2 = Lx_1$ ($J, K, L \in \mathbb{R}$). Diga se $\mathcal{C}$ é elipse, hipérbole ou parábola.

$$3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

10. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico, considere a recta $\mathcal{R} = (1,0,0) + <(1,1,1)>$ e o plano $\mathcal{P} = (0,1,0) + <(1,0,0),(0,0,1)>$.

(a) Mostre que $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ e determine $\mathcal{R} \cap \mathcal{P}$.

(b) Seja $\mathcal{R}_1 = (1,1,0) + <(1,0,1)>$. Determine $<\mathcal{R}, \mathcal{R}_1>$. Mostre que $\mathcal{R}_1 = <\mathcal{R}, \mathcal{R}_1> \cap \mathcal{P}$.

(c) Determine uma representação paramétrica de $\mathcal{R}_1$.

(d) Determine uma recta $\mathcal{S}$ que contém o ponto $\{(1,2,3)\}$ e que seja ortogonal tanto a $\mathcal{R}$ como a $\mathcal{R}_1$.

11. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que A e B são ambas matrizes simétricas e tais que se $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ então v é vector próprio para A se e só se v é vector próprio para B. Mostre que $AB = BA$.

FIM DO EXAME

Formulário - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja V espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munido do produto interno $(\cdot|\cdot)$. Seja $(v_1, \cdots, v_m)$ uma família independente de vectores de V. Então a família $(u_1, \cdots, u_m)$ definida por

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{(v_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 \\ &\cdots \\ u_m &= v_m - \frac{(v_m|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 - \frac{(v_m|u_2)}{(u_2|u_2)}u_2 - \cdots - \frac{(v_m|u_{m-1})}{(u_{m-1}|u_{m-1})}u_{m-1} \end{aligned}$$

é família ortogonal de vectores não-nulos em V e $<u_1, \cdots, u_i> = <v_1, \cdots, v_i>$, $i = 1, \cdots, m$.