Breviário
de
Teoria Elementar dos Conjuntos

Fernando Ferreira
Universidade de Lisboa

1 Preâmbulo

Este texto é um repositório de conceitos básicos da teoria elementar dos conjuntos. Concomitantemente, estabelece notação apropriada. O texto não deve ser visto do ponto de vista duma articulação axiomática ou formal destes conceitos básicos.

Não obstante este breviário tratar de assuntos básicos e sobejamente conhecidos, a sua estrutura segue de perto a secção 1.4 e o capítulo 2 do manual "Introduction to Set Theory" de Karel Hrbacek e Thomas Jech (Marcel Dekker, 1999).

2 Operações elementares sobre conjuntos

Escreve-se '$a \in A$' se a é elemento do conjunto A. Conjuntos A e B são o mesmo se tiverem os mesmos elementos: $A = B :\Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Diz-se que um conjunto A está contido (ou incluído) no conjunto B, ou que A é subconjunto de B, e escreve-se $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é elemento de B (em notação formal: $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$). Ao conjunto de todos os subconjuntos de B dá-se o nome de conjuntos das partes de B, ou conjunto potência de B, denotando-se esse conjunto por '$\mathscr{P}(B)$'. Assim, $A \in \mathscr{P}(B)$ se, e somente se, $A \subseteq B$. Diz-se que A é subconjunto próprio de B, e escreve-se $A \subsetneq B$, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

Há um conjunto sem elementos, denominado de conjunto vazio. Este conjunto denota-se pelo símbolo '$\emptyset$'. Assim, $\forall x(x \notin \emptyset)$. Note-se que $\emptyset \subseteq A$, para qualquer conjunto A.

Dado um conjunto A e uma propriedade $P(x)$, podemos formar o conjunto cujos elementos são os elementos de A que satisfazem a propriedade P. É o conjunto $\{x \in A : P(x)\}$. *Nota cautelar*: Em geral, não é possível formar meramente o conjunto dos elementos que satisfazem uma dada propriedade pois tal leva a contradição (paradoxo de Russell).

Dados elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, podemos formar o conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ cujos elementos são exatamente $a_1, a_2, \ldots a_n$. Se apenas se trata dum elemento a, formando assim o conjunto $\{a\}$, diz-se que o conjunto é singular.

Dados conjuntos A e B, podemos formar a união $A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$, a interseção $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ e o conjunto complementar de B em A, nomeadamente $A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$. Têm-se as seguintes propriedades:

1. $A \subseteq A$ (reflexividade)
2. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \to A = B$ (anti-simetria)
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C$ (transitividade)
4. $\emptyset \subseteq A$
5. $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$ (comutatividade)
6. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associatividade)
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributividade)
8. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ e $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (leis de De Morgan)

Define-se a diferença simétrica entre conjuntos A e B por $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Têm-se as seguintes propriedades:

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
2. $A \setminus B = \emptyset \leftrightarrow A \subseteq B$
3. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
4. $A \triangle A = \emptyset$
5. $A \triangle B = B \triangle A$
6. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

Dado um conjunto de conjuntos $\mathcal{S}$ (por vezes diz-se um sistema de conjuntos), define-se a união deste sistema $\bigcup \mathcal{S}$ por $\{x : \exists A \in \mathcal{S}\ (x \in A)\}$. Note que se $A \in \mathcal{S}$, então $A \subseteq \bigcup \mathcal{S}$. Note também que $\bigcup \{A, B\} = A \cup B$. Dado um sistema não vazio de conjuntos S, define-se a interseção $\bigcap \mathcal{S}$ por $\{x : \forall A \in \mathcal{S}\ (x \in A)\}$. Note que $\bigcap \{A, B\} = A \cap B$. *Nota cautelar*: Não é possível fazer a interseção do sistema vazio de conjuntos (escrever '$\bigcap \emptyset$' não faz sentido); a razão é a de que a interseção deste sistema teria de incluir todos os conjuntos, o que leva a contradição.

Os conjuntos A e B dizem-se disjuntos se $A \cap B = \emptyset$. Um sistema de conjuntos $\mathcal{S}$ diz-se um sistema de conjuntos mutuamente disjuntos se, para todos $A, B \in \mathcal{S}$, com $A \neq B$, $A \cap B = \emptyset$.

3 Relações

Pares ordenados (a, b) e (c, d) são o mesmo se $a = c$ e $b = d$. Triplos ordenados (a, b, c), (d, e, f) são o mesmo se $a = d$, $b = e$ e $c = f$. Também se pode falar de quádruplos ordenados, quíntulos ordenados, etc.

Dados conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B define-se assim: $A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$. De modo análogo, $A \times B \times C := \{(x, y, z) : x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$, etc.

Uma relação binária é um conjunto de pares ordenados. Dada uma relação binária R, é frequente escrever-se 'xRy' em vez de '$(x, y) \in R$'. O domínio de R define-se do seguinte modo: $\mathrm{dom}(R) := \{x : \exists y\,(xRy)\}$. A imagem duma relação binária R define-se de modo dual: $\mathrm{im}(R) := \{y : \exists x\,(xRy)\}$. Diz-se que R é uma relação binária em X, se $R \subseteq X \times X$. Isto é equivalente a dizer que tanto $\mathrm{dom}(R)$ como $\mathrm{im}(R)$ são subconjuntos de X.

Dado uma relação binária R e um conjunto A, a imagem de A por meio de R define-se assim: $R[A] := \{y : \exists x \in A\,(xRy)\}$. Note-se que $\mathrm{im}(R) = R[\mathrm{dom}(R)]$. Dada uma relação binária R e um conjunto B a imagem inversa de B por meio de R define-se assim: $R^{-1}[B] := \{x : \exists y \in B\,(xRy)\}$.

Dada uma relação binária R podemos formar a relação binária inversa: $R^{-1} := \{(y, x) : (x, y) \in R\}$. Note-se que $(R^{-1})^{-1} = R$. Com esta notação, dado um conjunto B, a expressão '$R^{-1}[B]$' pode ser interpretada de duas maneiras distintas: como imagem inversa de B por meio da relação R ou como imagem de B por meio da relação R^{-1}. Estas duas interpretações dão sempre o mesmo resultado e, portanto, não há ambiguidade na notação.

Dadas relações binárias R e Q define-se a composição de R com (após) Q como sendo $R \circ Q := \{(x, z) : \exists y\,(xQy \wedge yRz)\}$. Dadas relações binárias R, Q e S, tem-se $R \circ (Q \circ S) = (R \circ Q) \circ S$.

Dado um conjunto A, a relação de identidade em A é a relação binária: $id_A := \{(x, y) \in A \times A : x = y\}$. A relação de pertença em A é a relação binária: $\in_A := \{(x, y) \in A \times A : x \in y\}$.

4 Funções

Uma função f é uma relação binária (conjunto de pares ordenados) que satisfaz a seguinte propriedade: sempre que $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$, então $y = z$. Assim, dado $x \in \mathrm{dom}(f)$, existe um único elemento y tal que $(x, y) \in f$: este único elemento denota-se por '$f(x)$'. Note-se que se $x \in \mathrm{dom}(f)$, $(x, f(x)) \in f$. Por vezes escreve-se '$x \rightsquigarrow_f y$' em vez de '$f(x) = y$'.

Dado um conjunto A, a relação de identidade id_A em A é uma função cujo domínio é A. Dada uma função f e um conjunto A, a restrição de f a A é a função $f \restriction A := \{(x, y) \in f : x \in A\}$. Se a função g é a restrição da função f para algum conjunto, diz-se que f é uma extensão de g. Uma função f é extensão duma função g se, e somente se, $g \subseteq f$.

Tem-se a seguinte propriedade: dadas funções f e g, $f = g$ se, e somente se, $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ e, para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$, $f(x) = g(x)$.

Uma função diz-se injetiva se sempre que $f(x) = f(y)$ então $x = y$. Isto é equivalente a dizer que se $(x, z) \in f$ e $(y, z) \in f$, então $x = y$. A relação inversa duma função não é, em geral, uma função. Uma condição necessária e suficiente para que a relação inversa duma função seja também uma função é a de que a função seja injetiva. Diz-se, neste caso, que a função é invertível. Se f é uma função invertível então f^{-1} também é uma função invertível e $(f^{-1})^{-1} = f$.

Se f é uma função, $\mathrm{dom}(f) = A$ e $\mathrm{im}(f) \subseteq B$, costuma usar-se a notação $f : A \mapsto B$. A um conjunto B nestas circunstâncias, chama-se um conjunto de chegada (para f). Se, para além da função f (que é um conjunto de pares ordenados) também se especificar um conjunto de chegada, a função f diz-se sobrejetiva se $\mathrm{im}(f) = B$. Dada esta especificação, por vezes utiliza-se a terminologia 'aplicação' de A em B (onde $A = \mathrm{dom}(f)$). Uma dada aplicação $f : A \mapsto B$ diz-se uma bijeção se é injetiva e sobrejetiva.

Se f é uma função, $\mathrm{dom}(f) \subseteq A$ e $\mathrm{im}(f) \subseteq B$, diz-se que f é uma função parcial de A em B.

Dadas f e g funções, então $f \circ g$ é uma função e $\mathrm{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{dom}(g) : g(x) \in \mathrm{dom}(f)\}$ (em particular, se $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$, então $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{dom}(g)$). Além disso, para todo $x \in \mathrm{dom}(f \circ g)$, tem-se $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Se f é uma função invertível, $f \circ f^{-1} = Id_{\mathrm{im}(f)}$ e $f^{-1} \circ f = Id_{\mathrm{dom}(f)}$.

Funções f e g dizem-se compatíveis se, para todo $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, se tem $f(x) = g(x)$. Se f e g são funções compatíveis, então $f \cup g$ é uma função que é, simultaneamente, extensão de f e de g. Um conjunto de funções $\mathcal{F}$ diz-se um sistema compatível de funções se duas quaisquer funções de $\mathcal{F}$ são compatíveis. Se $\mathcal{F}$ é um sistema compatível de funções, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função e, além disso, esta função é uma extensão de qualquer função de $\mathcal{F}$.

Uma família $(x_i)_{i \in I}$, indexada num conjunto (de índices) I, não é mais do que uma função $i \rightsquigarrow x_i$ de domínio I. Dada uma família de conjuntos $(S_i)_{i \in I}$, define-se o produto cartesiano desta família de conjuntos da seguinte forma:

$$\prod_{i \in I} S_i := \{(x_i)_{i \in I} : \forall i \in I\,(x_i \in S_i)\}.$$

Quando a família é constante, i.e., para certo conjunto S, $S_i = S$, para todo índice $i \in I$, então o produto cartesiano é o conjunto de todas as funções de I para S. Este conjunto também se designa por S^I.

Dada uma família de conjuntos $(S_i)_{i \in I}$, o conjunto $\mathcal{S}$ definido por $\{S_i : i \in I\}$ é um sistema de conjuntos. Note-se que $\mathcal{S}$ não é mais do que a imagem da função $i \rightsquigarrow S_i$ de domínio I. A união $\bigcup \mathcal{S}$ também se escreve '$\bigcup_{i \in I} S_i$'. Analogamente para a interseção (desde que $I \neq \emptyset$).

Uma última informação notacional: quando o domínio de uma função f é um subconjunto dum produto cartesiano $A \times B$, em vez de se escrever $f((x, y))$, onde $(x, y) \in \mathrm{dom}(f)$, escreve-se mais simplesmente $f(x, y)$.

5 Relações de equivalência

Uma relação binária R num conjunto X diz-se reflexiva se $\forall x \in X\,(xRx)$; diz-se simétrica, se $\forall x, y\,(xRy \to yRx)$; transitiva, se $\forall x, y, z \in X\,(xRy \wedge yRz \to xRz)$. R diz-se uma relação de equivalência, se é reflexiva, simétrica e transitiva.

Seja R uma relação de equivalência no conjunto X e $a, b \in X$. A classe de equivalência de a (respeitante a R) define-se assim: $[a]_R := \{x \in X : xRa\}$. Tem-se que $a \in [a]_R$ e que $[a]_R = [b]_R \Leftrightarrow aRb$. Além disso, se $[a]_R \neq [b]_R$ então $[a]_R$ e $[b]_R$ são conjuntos disjuntos. Chama-se conjunto cociente (de X por R) ao conjunto X/R das classes de equivalência de X (respeitantes a R).

Um sistema de conjuntos $\mathcal{S}$ diz-se uma partição dum conjunto X se se trata dum sistema de conjuntos mutuamente disjuntos em que nenhum conjunto é vazio e tal que $\bigcup \mathcal{S} = X$. Dada R uma relação de equivalência em X, o conjunto cociente X/R é uma partição de X. Por sua vez, a uma partição $\mathcal{S}$ de X está associada naturalmente uma relação de equivalência $E_{\mathcal{S}}$ definida do seguinte modo: $aE_{\mathcal{S}}b :\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{S}\,(a, b \in A)$.

Se nos for dada uma relação de equivalência R sobre X, podemos considerar a sua partição associada X/R (o conjunto cociente de X por R). Por sua vez, a esta partição podemos associar a relação de equivalência correspondente $E_{X/R}$. Esta relação de equivalência é a relação de equivalência que nos foi dada à partida: $R = E_{X/R}$. Inversamente, se nos for dada uma partição $\mathcal{S}$, podemos associar-lhe a sua correspondente relação de equivalência $E_{\mathcal{S}}$ sobre X. Por sua vez, esta relação de equivalência tem associada uma partição: o conjunto cociente $X/E_{\mathcal{S}}$. Esta partição é a partição de origem, i.e., $\mathcal{S} = X/E_{\mathcal{S}}$.

Considere-se $\mathcal{S}$ uma partição de X. Um subconjunto C de X diz-se um conjunto de representantes para $\mathcal{S}$ (ou para a relação de equivalência associada) se, para todo $S \in \mathcal{S}$, $C \cap S$ é um conjunto singular. Intuitivamente, C recolhe um (único) elemento de cada conjunto da partição.

6 Ordens

Uma relação binária R num conjunto X diz-se anti-reflexiva se $\forall x \in X\, \neg(xRx)$. Diz-se anti-simétrica se $\forall x, y \in X\,(xRy \wedge yRx \to x = y)$.

Uma ordem parcial lata num conjunto X é uma relação binária em X que é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Amiúde, e caso não haja confusão, diz-se apenas 'ordem parcial'. Os símbolos '$\leq$' e '$\preccurlyeq$' são frequentemente usados para denotar ordens parciais. Dada uma ordem parcial $\leq$ num conjunto X, diz-se que elementos $x, y \in X$ são comparáveis se $x \leq y$ ou $y \leq x$. Uma ordem parcial diz-se total (ou linear) se todo o par de elementos é comparável. Neste caso, diz-se 'ordem total lata' ou, simplesmente, 'ordem total'.

Seja $\leq$ uma ordem parcial em X e considere-se $Z \subseteq X$:

1. Um elemento $a \in Z$ diz-se mínimo de Z se $\forall z \in Z\,(a \leq z)$.
2. $a \in Z$ diz-se um elemento minimal de Z se $\neg\exists z \in Z\,(z \leq a \wedge z \neq a)$.
3. Um elemento $a \in Z$ diz-se máximo de Z se $\forall z \in Z\,(z \leq a)$.
4. $a \in Z$ diz-se um elemento maximal de Z se $\neg\exists z \in Z\,(a \leq z \wedge z \neq a)$.

Estas noções aplicam-se frequentemente ao caso em que o conjunto Z é o próprio X. O elemento mínimo (resp., máximo) de Z, quando existe, é único. Todo o elemento mínimo (resp., máximo) é necessariamente minimal (resp., maximal).

Diz-se que Z é uma cadeia se qualquer par de elementos de Z é comparável. Se Z é uma cadeia, então todo o elemento minimal (resp., maximal) é mínimo (resp., máximo).

Seja $\leq$ uma ordem parcial em X e considere-se $Z \subseteq X$:

1. Um elemento $a \in X$ é um minorante de Z se $\forall z \in Z\,(a \leq z)$.
2. $a \in X$ diz-se ínfimo de Z (em X) se é o máximo dos minorantes de Z.
3. Um elemento $a \in X$ é um majorante de Z se $\forall z \in Z\,(z \leq a)$.
4. $a \in X$ diz-se supremo de Z (em X) se é o mínimo dos majorantes de Z.

O ínfimo (resp., supremo) de Z (em X), quando existe, é único. Se Z tem mínimo (resp. máximo), então esse mínimo (resp. máximo) é o ínfimo (resp., supremo) de Z (em X). Se um elemento é ínfimo (resp., supremo) de Z (em X) e pertence a Z, então esse elemento é o mínimo (resp. máximo) de Z.

Quando existem, o mínimo de Z e o máximo de Z, denotam-se respetivamente por $\min(Z)$ e $\max(Z)$. Quando existem, o ínfimo de Z (em X) e o supremo de Z (em X), denotam-se respetivamente por $\inf(Z)$ e $\sup(Z)$.

Dado um conjunto X, o seu conjunto potência $\mathscr{P}(X)$ munido da relação $\subseteq$ (estar contido) é uma ordem parcial. Qualquer subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathscr{P}(X)$ tem supremo, sendo ele $\bigcup \mathcal{S}$. Qualquer subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathscr{P}(X)$ tem ínfimo. Se $\mathcal{S} \neq \emptyset$, o ínfimo é $\bigcap \mathcal{S}$. Por sua vez, $\inf(\emptyset) = X$.

Uma ordem parcial estrita num conjunto X é uma relação binária em X que é anti-reflexiva e transitiva. Por vezes, diz-se apenas 'ordem estrita'. Os símbolos '$<$' e '$\prec$' são frequentemente usados para denotar ordens estritas. Note-se que se $<$ é uma ordem estrita e $a < b$, então $b \not< a$.

Dada R uma ordem parcial estrita no conjunto X, então a relação binária Q em X definida por $xQy :\Leftrightarrow xRy \vee x = y$ é uma ordem parcial lata no conjunto X. Muitas vezes, se se denota a ordem parcial estrita R por '$<$', denota-se a correspondente ordem parcial lata Q por '$\leq$'.

As noções de elemento mínimo, máximo, minimal, maximal, ínfimo e supremo para ordens parciais estritas definem-se por meio das correspondentes ordens parciais latas. O mesmo acontece com a noção de par de elementos comparáveis, para a noção de cadeia e para a noção de ordem total. P. ex., elementos x e y duma ordem parcial estrita R em X são comparáveis se, e somente se, $xRy \vee x = y \vee yRx$ (tricotomia).

Dada R uma ordem parcial lata no conjunto X, então a relação binária Q em X definida por $xQy :\Leftrightarrow xRy \wedge x \neq y$ é uma ordem parcial estrita no conjunto X. Muitas vezes, se se denota a ordem parcial lata R por '$\leq$', denota-se a correspondente ordem parcial estrita Q por '$<$'.

Ao passarmos duma ordem estrita para a lata correspondente e, desta, para a estrita correspondente, obtemos a ordem estrita inicial. Analogamente, ao passarmos duma ordem lata para a estrita correspondente e, desta, para a lata correspondente, obtemos a ordem lata inicial.

Sejam X e Z conjuntos munidos de ordens parciais estritas $<$ e $\prec$, respetivamente. Um isomorfismo entre estas duas ordens estritas é uma bijeção $f : X \mapsto Z$ tal que $\forall x, y \in X\, (x < y \leftrightarrow f(x) \prec f(y))$. Se existe um isomorfismo entre duas ordens, então elas dizem-se ordens isomorfas.

Sejam X e Z conjuntos munidos de ordens estritas $<$ e $\prec$, respetivamente. Suponhamos que estas ordens são totais. Então, uma bijeção $f : X \mapsto Z$ tal que $\forall x, y \in X\, (x < y \rightarrow f(x) \prec f(y))$ é necessariamente um isomorfismo.