Experiência 0: Medidas Experimentais

Objetivo:

Introdução às medidas experimentais. Erros experimentais.

Introdução:

Medir é comparar uma grandeza com outra da mesma espécie que se toma como unidade. Esta comparação pode ser feita diretamente, por exemplo medindo um comprimento com uma régua, ou indiretamente, utilizando um aparelho de medida que apresenta um valor numérico para a grandeza – os dois instrumentos necessitam de ser previamente calibrados utilizando uma grandeza da mesma espécie que define a unidade ou uma fração dela (um padrão) e, consequentemente, estabelece a escala. O resultado da medida é assim um valor numérico seguido de uma unidade.

Para a medida experimental utiliza-se um instrumento de medida, que transforma o sinal de entrada X (grandeza a medir) num sinal de saída Y (valor numérico com unidade respetiva). Como existe interação entre o instrumento de medida e o fenómeno caracterizado pela grandeza a medir, é necessário quantificar essa influência e escolher o aparelho adequado. (Por exemplo não é correto medir a temperatura de 1 cm^3 de água num dado instante, introduzindo um termómetro de mercúrio com 1 cm^3 que se encontra a uma temperatura diferente, nem usar uma craveira para medir a espessura de uma lâmina de borracha).

A ***resolução ou poder resolvente*** de um instrumento de medida define-se como o menor ΔX que esse instrumento pode medir.

Como se pode concluir, o valor numérico obtido numa medida experimental não é um valor exato da grandeza que se pretende determinar. Existe um intervalo de valores (limitados pela resolução do aparelho e como veremos também por outros fatores) onde essa grandeza está contida. Define-se **erro absoluto** como o módulo do desvio entre o valor medido x e o valor real x_0 da grandeza: $|x - x_0|$. Como o valor real não é conhecido, determina-se um majorante do erro, $|\Delta x|$, e dá-se como resultado da medida o intervalo $x_{\exp} \pm |\Delta x|$, onde o valor exato da grandeza é considerado estar contido.

Assim o resultado de uma medida experimental não é um valor numérico seguido de uma unidade, mas um intervalo de valores. Este resultado pode ser expresso de várias formas; por exemplo, se a medida do comprimento, l, de um lápis permitiu obter um valor 14.75 cm, sabendo que está seguramente entre 14.73cm e 14.77 cm, ele pode ser representado usando o majorante do erro absoluto, $|\Delta x| = 0.02$ cm (que passaremos a designar por erro experimental absoluto, ou simplesmente erro absoluto), ou o erro relativo $\left|\Delta x / x_{\exp}\right| = 0.14\%$:

$$l = (14.75 \pm 0.02) \text{ cm} \quad \text{ou} \quad l = 14.75 \text{ cm } (1 \pm 0.14\%)$$

onde o erro máximo aceitável para o valor é explicitamente indicado, seja em erro absoluto (1º caso) ou em erro relativo (2ºcaso). A última representação é muitas vezes simplificada como: l = 14.75 cm (± 0.14%).

O erro experimental pode ser dominado pela resolução do aparelho de medida ou adicionado de erros resultantes do próprio processo de medida ou intrínsecos ao fenómeno. Estes erros classificam-se genericamente em dois tipos:

- sistemáticos
- acidentais ou estatísticos

Erros sistemáticos – são erros que se cometem sempre no mesmo sentido (ou sempre por excesso, ou sempre por defeito); podem dever-se a uma deficiência do processo de medida (observacional, por exemplo erros de paralaxe ou de tempo de resposta do observador) ou a uma deficiência do aparelho de medida (desvio de zero ou calibração alterada) ou ainda a uma interferência não contabilizada do aparelho de medida no fenómeno (por exemplo a utilização de um amperímetro com uma resistência interna demasiado elevada num circuito). Estes erros nem sempre são fáceis de identificar, mas quando detetados podem ser corrigidos ou bastante reduzidos.

Erros acidentais ou estatísticos – são erros que se cometem aleatoriamente nos dois sentidos e resultam do facto de a resolução dos aparelhos de medida ser finita ou da natureza estatística do próprio processo (por exemplo o número de núcleos que decaem num declínio radioativo). O valor destes erros pode ser reduzido fazendo um tratamento estatístico de um conjunto grande de medidas.

Supondo corrigidos os erros sistemáticos, os erros estatísticos devidos à resolução dos aparelhos (e não intrínsecos ao fenómeno) podem ser majorados pelo **erro de leitura** que é definido de acordo com a escala do aparelho. Convenciona-se o seguinte:

- nos aparelhos de medida com escala analógica (variação contínua proporcional à grandeza medida) o erro de leitura igual a metade da menor divisão da escala. (Se uma divisão na escala é suficientemente grande para permitir uma subdivisão mental em menores divisões, o erro deve ser considerado igual a metade dessa menor subdivisão mental. Este critério depende do observador e tem que ser definido com segurança);
- nos aparelhos digitais é igual a uma unidade do último dígito representado (aparelho sem arredondamento), ou metade dessa unidade (aparelho com arredondamento)

Quando a grandeza a medir apresenta flutuações da ordem de grandeza ou superior à escala do aparelho de medida:

- Se os erros forem apenas aleatórios, e o número de medidas for elevado (N>20), pode utilizar-se um tratamento estatístico dos valores experimentais. As frequências dos valores medidos distribuem-se segundo uma curva gausseana podendo considerar-se o valor médio

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}$$

como o melhor valor de *x*. A largura da distribuição das medidas experimentais pode ser parametrizada pelo desvio padrão (desvio quadrático médio):

$$s_x \quad : \quad s_x = \sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{(n-1)}}$$

Numa distribuição normal 68% dos valores experimentais encontram-se no intervalo $\left[\overline{x}-s_x;\overline{x}+s_x\right]$ e 95% no intervalo $\left[\overline{x}-2s_x;\overline{x}+2s_x\right]$. Se se realizarem vários conjuntos de N medidas, as médias respetivas também se distribuem segundo uma gausseana, cuja largura, parametrizada pelo desvio padrão respetivo, é

$$s_{\overline{x}} \quad : \quad s_{\overline{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i-\overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

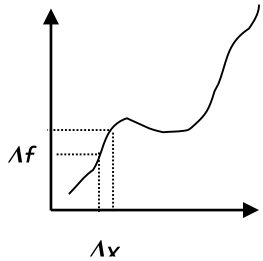
que pode ser considerado o erro da média de um conjunto elevado de medidas (N>20):

$$x = \overline{x} \pm s_{\overline{x}}$$

- Se não é possível fazer um tratamento estatístico detalhado (número de medidas pequeno N<10) deve tomar-se como melhor valor o valor médio, e, como erro, o módulo do maior desvio entre cada medida e este valor. Quando 10<N<20, o desvio padrão s_x é um bom majorante do erro.

Existem alguns critérios que permitem rejeitar um valor isolado que se afaste muito do restante conjunto de valores. Estes critérios baseiam-se nas distribuições estatísticas esperadas (por exemplo para a distribuição gausseana ou normal $P(x\notin\left[\overline{x}-3\sigma,\overline{x}+3\sigma\right])=0.33\%$) mas devem ser utilizados com cuidado quando o número de valores experimentais é pequeno. Tendo em conta a probabilidade referida, pode considerar-se como critério, num conjunto de *N* medidas *(N>10)*, não conservar valores que se afastem mais do que *3Δx* do valor médio $\overline{x}$, calculando $\overline{x}$ e *Δx* com os restantes *N-1* valores. Quando o número de valores é pequeno não se podem rejeitar valores.

Propagação de erros



Quando se utilizam valores obtidos experimentalmente para calcular uma grandeza, a precisão do valor calculado está relacionada com a precisão dos valores medidos experimentalmente.

Em primeira aproximação, a variação de um função $f(x)$ está relacionada com a variação da variável x por: $\Delta f(x) \quad f'(x_0)\,\Delta x$, como se representa no gráfico junto. Esta relação é tão mais válida quanto menor for Δx e desde que a primeira derivada da função não tenha um valor próximo de zero.

Assim, considerando esta expressão uma boa aproximação para a propagação para f das diferenças em x, ela determina um majorante do erro que afeta $f(x_0)$ em função do erro de x:

$$\begin{aligned} &erro \quad absoluto \quad |\Delta f| \quad |f'(x_0)|\,|\Delta x| \\ &erro \quad relativo \quad \frac{|\Delta f|}{|f(x_0)|} \quad \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right| |\Delta x| \end{aligned}$$

Se a grandeza calculada depende de mais do que uma medida experimental, as precisões das diferentes medidas, afetam o resultado final, adicionando-se independentemente as contribuições correspondentes:

$$\begin{aligned} &erro \quad absoluto \quad |\Delta f| \quad |f_x'(x_0,y_0)|\,|\Delta x| + |f_y'(x_0,y_0)|\,|\Delta y| \\ &erro \quad relativo \quad \frac{|\Delta f|}{|f(x_0,y_0)|} \end{aligned}$$

onde f_x' representa a derivada de *f* em ordem a *x* considerando *y* constante e f'_y representa a derivada de *f* em ordem a *y* considerando *x* constante. Estas derivadas também se representam respetivamente por $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$, explicitando qual é a razão incremental que corresponde à derivada e colocando em índice a variável constante. Como estas derivadas correspondem a uma variação parcial associada a cada variável, também se designam variáveis parciais.

No caso em que $|\Delta x|$ corresponde a um erro estatístico, as relações anteriores são válidas para cada um dos valores $|\Delta f_i|$ associados a cada Δx_i, e como é:

$$s_{\bar{f}}^{\,2} = \left(\Delta \bar{f}\right)^2 = \frac{\sum_i \left(\Delta f_i\right)^2}{n\left(n-1\right)} = \frac{\left(f'(x_0)\right)^2 \sum_i \left(\Delta x_i\right)^2}{n\left(n-1\right)} = \left(f'(x_0)\right)^2 s_{\bar{x}}^{\,2}$$

vem para o erro estatístico em *f*, se a função depende de uma só variável:

$$\left|\Delta f\right| = \left|f'(x_0)\right|\left|\Delta x\right| \quad \Leftarrow \quad s_{\bar{f}}^{\,2} = \left[f'(x_0)\right]^2 s_{\bar{x}}^{\,2} \quad \textit{erro} \quad \textit{absoluto}$$

$$\frac{\left|\Delta f\right|}{\left|f(x_0)\right|} \quad \textit{erro} \quad \textit{relativo}$$

e, se depender de mais do que uma variável:

$$s_{\bar{f}}^{\,2} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y_0}\right]^2 s_{\bar{x}}^{\,2} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0}\right]^2 s_{\bar{y}}^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \left|\Delta f\right| = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y_0}(x_0, y_0)\right]^2 \left(\Delta x\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0}(x_0, y_0)\right]^2 \left(\Delta y\right)^2} & \textit{erro absoluto} \\ \left|\frac{\Delta f}{f(x_0, y_0)}\right| & \textit{erro relativo} \end{cases}$$

Bibliografia adicional: G.L.Squires, Practical Physics, Cambridge University Press