UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

# FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

## Problemas - 1ª Série

1. No tubo de Venturi da figura 1, calcule a diferença de alturas nos tubos $\zeta$ em função da taxa de escoamento para um fluido ideal.

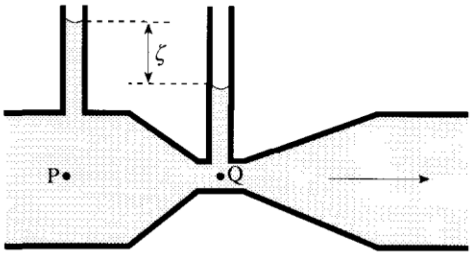


Figure 1: Tubo de Venturi.

2. Dois tubos, um retilíneo e outro curvo, estão imersos numa corrente horizontal de água de velocidade $v$. A diferença entre os níveis de água nos dois tubos é $h = 5$ cm. a) Calcule $v$. b) Calcule o número de Reynolds e de Mach para este problema.

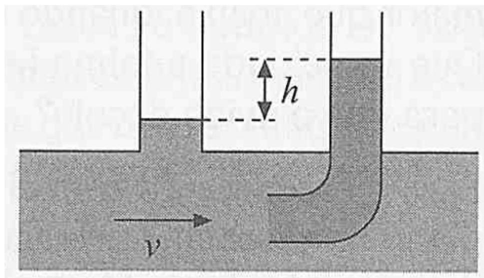


Figure 2: Dispositivo para medir a velocidade.

3. Uma forma de medir a taxa de escoamento num canal aberto é construindo uma barragem larga no percurso do fluido, como indicado na figura 3. a) Use a equação de Bernoulli para calcular a velocidade do fluido em função da distância $\zeta_2$. b) Suponha que a velocidade do fluido não varia com a altura e calcule a taxa de escoamento em função de $\zeta_{min}$.

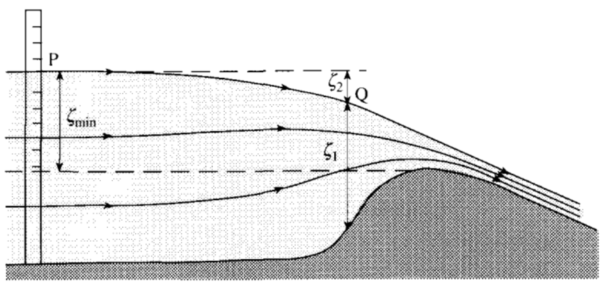


Figure 3: Dispositivo para medir a taxa de escoamento.

4. Considere uma hélice que injeta energia no fluido movendo-o com velocidade $U$. Suponha que o escoamento suficientemente longe da hélice é laminar, que o fluido é incompressível e desprezando as variações da pressão atmosférica com a altura, calcule a diferença de pressão antes e depois da hélice necessária para que o fluido tenha velocidade $U$. Note que a energia não é conservada ao longo de uma linha de corrente que passa pela hélice.

5. Considere o escoamento não-estacionário

$$u = u_0, \qquad v = kt, \qquad w = 0,$$

onde $u_0$ e $k$ são constantes positivas. Mostre que as linhas de corrente são linhas retas e trace-as em dois instantes de tempo diferentes. Mostre também que um elemento de fluido segue uma trajetória parabólica.

6. Um sifão aspira o líquido de densidade $\rho$ através do tubo ABC e escoa-o em C, com velocidade $v$. a) Calcule $v$ em função dos parâmetros da figura 4. b) Calcule a pressão nos pontos A e B. c) Determine o valor máximo de $h_0$ para o qual o sifão funciona.

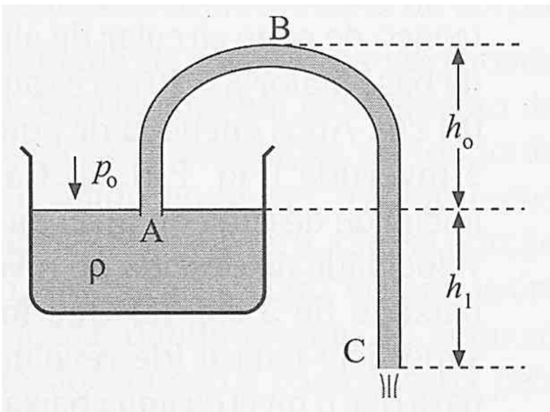


Figure 4: Sifão.

7. Independentemente da compressibilidade, cada elemento de fluido conserva a sua massa durante o escoamento. Considere a taxa de escoamento de massa através de uma superfície fechada S, no interior do fluido, e mostre que a conservação da massa implica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . (\rho \mathbf{u}) = 0$$

onde $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a densidade variável do fluido. Mostre ainda que esta equação pode ser escrita como

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \nabla . \mathbf{u} = 0$$

Segue-se que se $\nabla.\mathbf{u} = 0$, então $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$. O que significa isso? Faz sentido?

8. Um fluido ideal está em rotação num campo gravítico $g$ com velocidade angular constante $\Omega$ de forma que, em coordenadas Cartesianas, o campo de velocidades é dado por $\mathbf{u} = (-\Omega y,\, \Omega x,\, 0)$. Queremos determinar as superfícies com pressão constante e, consequentemente, a superfície de um fluido rodando uniformemente num balde, o qual está à pressão atmosférica.

   Se usarmos a equação de Bernoilli, $p/\rho + \frac{1}{2}u^2 + gz =$ constante, então as superfícies isobáricas são

$$z = \text{constante} - \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2).$$

Mas isto significa que a superfície tem a sua altura máxima no meio. O que está errado?

Escreva as equações de Euler para cada componente, integre-as diretamente para calcular a pressão, e então obtenha a forma correta para a superfície.

9. Determine a pressão $p$ dentro e fora do núcleo do vórtice de Rankine:

$$u_\theta = \begin{cases} \Omega r, & r < a, \\ \frac{\Omega a^2}{r}, & r > a, \end{cases}$$
$$u_r = u_z = 0,$$

onde $a$ é o raio do núcleo. Mostre que a diferença de pressão entre os pontos $r = 0$ e $r = \infty$ é $\rho\Omega^2 a^2$. Isto explica a baixíssima pressão que ocorre no centro dos tornados. Mostre que, se houver uma superfície livre no fluido sob gravidade, a superfície em $r = 0$ tem profundidade $\Omega^2 a^2/g$ abaixo da superfície em $r = \infty$. Por isso há uma depressão na região central de uma chávena de chá quando mechemos o líquido com uma colher em movimentos circulares.

10. Partindo da equação de Euler para fluidos incompressíveis, obtenha a equação da energia:

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho u^2 dV = -\int_S (p' + \frac{1}{2}\rho u^2)\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

onde $V$ é a região do fluido interna à superfície $S$ e $p'$ denota $p + \rho g z$, a parte não-hidrostática do campo de pressão.

11. Para um fluido invíscido, temos a equação de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u} + \nabla(\frac{1}{2}u^2) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla(gz)$$

e, independentemente de o fluido ser incompressível, temos também a conservação da massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0.$$

Mostre que

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p.$$

Deduza que, se $p$ for uma função apenas de $\rho$, a equação para a vorticidade (acima) é basicamente a mesma para fluidos compressíveis e incompressíveis exceto que $\boldsymbol{\omega}$ é substituído por $\boldsymbol{\omega}/\rho$.