Lista de exercícios de Complementos de Análise

seleccionados das seguintes referências bibliográficas

- James Stewart, *Calculus*, Cengage Learning, 2007
- Tom M. Apostol, *Calculus*, segunda edição, Volumes 1 e 2, Wiley India Pvt. Limited, 2007

1 Cálculo diferencial a uma variável

1.1 Derivadas e Gráficos

1.1.1 Em cada uma das alíneas (a)-(i):

(1) Encontre os pontos críticos de f.

(2) Examine o sinal de f' e determine os intervalos de monotonia de f.

(3) Examine o sinal de f'' e determine as concavidades do gráfico de f.

(4) Calcule, se existirem, as assímptotas ao gráfico de f.

(5) Esboce o gráfico de f.

(a). $f(x) = x^2 - 3\,x + 2$,

(b). $f(x) = x^3 - 4\,x$,

(c). $f(x) = x^3 - 6\,x^2 + 9\,x + 5$,

(d). $f(x) = 2 + (x-1)^4$,

(e). $f(x) = 1 + 1/x^2$,

(f). $f(x) = \frac{1}{(x-2)\,(x-3)}$,

(g). $f(x) = x/(1+x^2)$,

(h). $f(x) = \sin^2 x$,

(i). $f(x) = x - \sin x$.

1.1.2 Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

(a). Determine os intervalos de monotonia e as concavidades do gráfico de f.

(b). Esboce o gráfico de f.

(c). Esboce o gráfico da primitiva $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f que satisfaz $F(0) = 0$.

1.1.3 Mostre que a equação $x^5 + 10\,x + 3 = 0$ tem exactamente uma raíz real.

1.1.4 Mostre que a equação $x^5 - 6\,x + c = 0$ tem quando muito uma raíz no intervalo $[-1, 1]$.

1.1.5 Seja $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = 10$ e $f'(x) \geq 2$ para todo $1 \leq x \leq 4$. Quão pequeno pode ser $f(4)$?

1.1.6 Considere a família de curvas $y = x^4 + x^3 + c\,x^2$ $(c > 0)$.

(a). Para que valores de c muda o número de pontos críticos de f?

(b). Para que valores de c muda o número de pontos de inflexão de f?

(c). Esboce as diferentes formas que estes gráficos podem tomar.

1.2 Desenvolvimentos de Taylor

1.2.1 Em cada uma das alíneas seguintes verifique se as funções dadas são tangentes no ponto especificado e determine a maior ordem de tangência.

(a). $f(x) = \cos x,\ g(x) = \sin x$ no ponto $x = \pi/2$,

(b). $f(x) = \cos x,\ g(x) = \sin x$ no ponto $x = \pi/4$,

(c). $f(x) = \cos x,\ g(x) = 1$ no ponto $x = 0$,

(d). $f(x) = \sin x,\ g(x) = x$ no ponto $x = 0$,

(e). $f(x) = \cos x,\ g(x) = 1 - x^2/2$ no ponto $x = 0$.

1.2.2 Calcule as derivadas de $f(x) = (x - a)^n/n!$ no ponto $x = a$.

1.2.3 Determine o único polinómio $p(x)$ de grau ≤ 3 tal que

$$p(1) = 2,\ p'(1) = -1,\ p''(1) = -2 \ \text{ e } \ p'''(1) = 2.$$

1.2.4 Dada uma função n vezes diferenciável $f\colon I \to \mathbb{R}$ e um ponto $a \in I$, mostre que o único polinómio $p(x)$ de grau $\leq n$ tal que $f^{(j)}(a) = p^{(j)}(a)$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$ é dado por

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\,(x-a)^j.$$

1.2.5 Determine os polinómios de Taylor de $f(x) = \sin x$ e de $g(x) = \cos x$ na origem, respectivamente até às ordens 5 e 4. Use uma calculadora gráfica para comparar os respectivos gráficos.

1.2.6 Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $a \in I$ um ponto tal que $f(a) = f'(a) = 0$ e $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in I$. Mostre que

(a). $f(x) = \displaystyle\int_a^x \int_a^t f''(s)\,ds\,dt.$

(b). $f(x) = \displaystyle\int_a^x f''(s)\,(x-s)\,ds.$

(c). $f(x) = \dfrac{f''(c)}{2}\,(x-a)^2,$ para algum c entre a a e x.

(d). $|f(x)| \leq M\ |x-a|^2/2$ para todo $x \in I$.

Sugestão: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Para a alínea (a) aplique de novo o TFC a f'. A alínea (b) segue de (a) invertendo a ordem de integração. Para mostrar (c) observe que $\int_a^x (x-s)\,ds = (x-a)^2/2$, e que

$$\frac{1}{\int_a^x (x-s)\,ds} \int_a^x f''(s)\,(x-s)\,ds$$

é uma média dos valores de f'' no intervalo entre a e x. Finalmente (d) segue de (c) usando a hipótese sobre f''.

1.2.7 Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Mostre que quaisquer que sejam $a, x \in I$ o resto de Taylor de primeira ordem de f no ponto a satisfaz para algum $c \in I$ entre a e x,

$$R_1(f,a)(x) = f(x) - T_1(f,a)(x) = \frac{f''(c)}{2}\,(x-a)^2.$$

1.2.8 Use o desenvolvimento de Taylor de quarta ordem da função $f(x) = \sin x$ no ponto $x = 0$, para aproximar o integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$. Estime o erro nessa aproximação.

1.3 Problemas de Optimização

1.3.1 Encontre os extremos (máximos e mínimos) locais e absolutos de cada uma das seguintes funções:

(a). $f\colon [0,4] \to \mathbb{R},\ f(x) = 10 + 27\,x - x^3$,

(b). $f\colon [0,4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x - \sqrt{x}$,

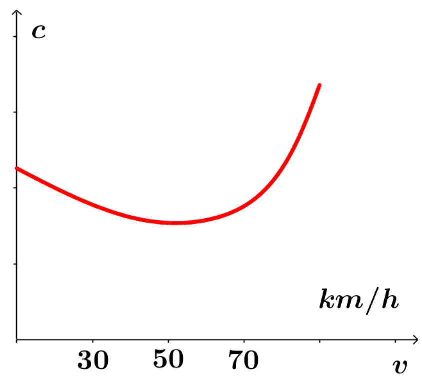
(c). $f\colon [-2,0] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$,

(d). $f\colon [-3,0] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2 + 4\,x + 8}$,

(e). $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = x - \sqrt{2}\,\sin x$,

(f). $f\colon [\frac{1}{2},2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x^2}$.

1.3.2 O gráfico seguinte mostra o consumo de combustível $c = c(v)$ de um carro (em litros por hora) como função da sua velocidade v. A baixa velocidade o motor funciona ineficientemente, de modo que incialmente c decresce quando a velocidade aumenta, mas a alta velocidade o consumo cresce de novo. Pode ver na figura que $c(v)$ é minimizada quando $v \approx 50$ km/h. Contudo, para um consumo eficiente o que precisa ser minimizado não é o consumo em litros por hora mas antes o consumo de combsutível em litros por kilometro. Designando por $G = G(v)$ este consumo em litros por kilometro, use o gráfico para estimar a velocidade a que G assume o seu valor mínimo.



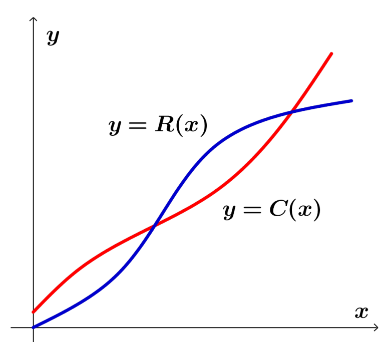
1.4 Economia Matemática

1.4.1 A figura seguinte mostra os gráficos das funções custo e rendimento (funções do nível de produção x) reportadas por um fabricante.

(a). Identifique no gráfico o ponto x onde o lucro é maximizado.

(b). Esboce o gráfico da função lucro.

(c). Esboce o gráfico da função lucro marginal.



1.4.2 Para cada uma das funções custo seguintes (expressas em euros) encontre:

(1) O custo, o custo médio e o custo marginal correspondentes ao nível de produção de 1000 unidades.

(2) O nível de produção que minimiza o custo médio e o correspondente custo médio mínimo.

(a). $C(x) = 40\,000 + 300\,x + x^2$,

(b). $C(x) = 2000 + 10\,x + 0.001\,x^3$,

(c). $C(x) = 2\,\sqrt{x} + x^2/8000$.

1.4.3 O gestor dum complexo com 100 apartamentos sabe por experiência que todas as unidades estarão ocupadas se a renda for de 500€ por mês. Um estudo de mercado mostra que uma unidade adicional ficará vaga por cada 10€ de subida na renda. Qual a renda que o gestor deve cobrar para maximizar a receita?

1.4.4 Um fabricante de aviões quer determinar o melhor preço para vender um novo modelo de avião. A companhia estima que o custo inicial com o projecto e instalação das fábricas para produzir o novo modelo será de 500 milhões de euros. O custo adicional para produzir os aviões é modelado pela função $m(x) = 20\,x + 0.01\,x^2$, onde m é o custo de produção (em milhões de euros) e x é o número de aviões fabricados. A companhia estima que se cobrar um preço p (em milhões de euros por avião) será capaz de vender $x(p) = 320 - 7.7\,p$ aviões.

(a). Determine as funções de custo, demanda e receita.

(b). Determine o nível de produção, e o respectivo preço do avião, que maximizam os lucros da companhia.

2 Cálculo diferencial a várias variáveis

2.1 Curvas e vectores tangentes

2.1.1 Considere as seguintes funções $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e para cada uma delas o valor de parâmetro especificado.

(1) $r(t) = (\cos t, \sin t),\;\; t = \pi/4.$

(2) $r(t) = (t^3, t^2),\;\; t = 1.$

(3) $r(t) = (1 + t, t^2),\;\; t = 1.$

(3) $r(t) = (e^t, e^{-t}),\;\; t = 0.$

Para cada um destes exemplos:

(a). Esboce a curva plana descrita por $r(t)$.

(b). Calcule $r'(t)$.

(c). Desenhe o vector de posição $r(t)$ e o vector tangente $r'(t)$ para o valor de parâmetro especificado.

2.1.2 Qual é o ponto mais perto da origem nos segmentos de recta que unem os pares de pontos seguintes ?

(a). $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$.

(b). $(1, 0, 0)$ e $(2, 1, 1)$.

2.1.3 Encontre as equações paramétricas das recta tangentes a cada uma das curvas seguintes no ponto especificado.

(a). $x = t^5$, $y = t^4$, $z = t^3$; $\quad (1, 1, 1)$.

(b). $x = t^2 - 1$, $y = t^2 + 1$, $z = t + 1$; $\quad (-1, 1, 1)$.

(c). $x = \sin(\pi\, t)$, $y = \sqrt{t}$, $z = \cos(\pi\, t)$; $\quad (0, 1, -1)$.

2.2 Representação gráfica de funções

2.2.1 Esboce os domínios das seguintes funções:

(a). $f(x,y) = \sqrt{x+y}$
(b). $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
(c). $f(x,y) = \log(9 - x^2 - 9\,y^2)$
(d). $f(x,y) = \dfrac{x - 3\,y}{x + 3\,y}$
(e). $f(x,y) = \sqrt{x-y}\,\log(x+y)$

2.2.2 Esboce os gráficos das seguintes funções:

(a). $f(x,y) = 3,$
(b). $f(x,y) = 1 - x - y$
(c). $f(x,y) = 1 - x^2$
(d). $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$
(e). $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
(f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

2.2.3 Desenhe as curvas de nível das seguintes funções:

(a). $f(x,y) = x\,y$
(b). $f(x,y) = x^2 - y^2$
(c). $f(x,y) = x/y,$
(d). $f(x,y) = (x+y)/(x-y)$
(e). $f(x,y) = y - \cos x,$
(f) $f(x,y) = x - y^2$
(g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

2.2.4 Descreva as superfícies de nível das seguintes funções:

(a). $f(x,y,z) = x + 3\,y + 5\,z$

(b). $f(x,y,z) = x^2 + 3\,y^2 + 5\,z^2$

(c). $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$

(d). $f(x,y,z) = x^2 - y^2$

2.3 Derivadas parciais, direcionais e gradientes

2.3.1 Calcule dz/dt ou dw/dt:

(a). $z = x^2\, y + x\, y^2$, $x = 2 + t^4$, $y = 1 - t^3$,

(b). $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$,

(c). $z = x\, \log(x + 2\, y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$,

(d). $w = x\, y + y\, z^2$, $x = e^t$, $y = e^t\, \sin t$, $z = e^t\, \cos t$.

2.3.2 Seja $z = f(x, y)$ onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$. Supondo que $g(3) = 2$, $g'(3) = 5$, $h(3) = 7$, $h'(3) = -4$, $f_x(2, 7) = 6$ e $f_y(2, 7) = -8$ determine dz/dt quando $t = 3$.

2.3.3 Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ no ponto $p = (2, 1, 3)$ na direcção da origem.

2.3.4 Para cada uma das funções seguintes determine a taxa de variação máxima no ponto especificado e a direcção em que ela ocorre:

(a). $f(x, y) = x\, e^{-y} + 3\, y$, $(1, 0)$

(b). $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, $(1, 2)$

(c). $f(x, y) = \sin(x\, y)$, $(1, 0)$

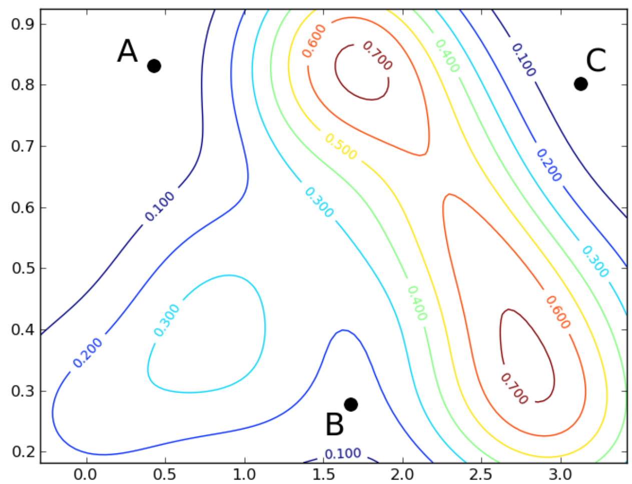
(d). $f(x, y, z) = x^2\, y^3\, z^4$, $(1, 1, 1)$

(e). $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $(4, 2, 1)$

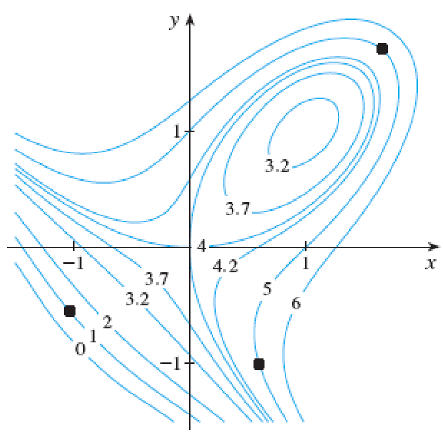
2.3.5 Encontre as direcções em que a derivada (direcional) de $f(x, y) = x^2 + \sin(x\, y)$ no ponto $(1, 0)$ é igual a 1.

2.3.6 Seja $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e considere os pontos $A = (1, 3)$, $B = (3, 3)$, $C = (1, 7)$ e $D = (6, 15)$. Sabendo que $D_{\vec{AB}} f(A) = 3$ e $D_{\vec{AC}} f(A) = 26$ determine a derivada direcional de f no ponto A segundo o vector $\vec{AD}$.

2.3.7 No mapa orográfico seguinte desenhe as curvas de subida mais rápida que começam nos pontos A, B e C.



2.3.8 A figura seguinte representa as curvas de nível de uma função $f(x, y)$. Desenhe os gradientes de f nos três pontos assinalados, explicando como escolher a direcção e o comprimento destes vectores.



2.3.9 Sendo $g(x, y) = x - y^2$, determine o gradiente $\bigtriangledown g(3, -1)$ e use-o para encontrar a recta tangente à curva de nível $g(x, y) = 2$ no ponto $(3, -1)$. Esboce a curva de nível, a recta tangente e o vector gradiente.

2.3.10 Encontre os pontos do elipsóide $x^2 + 2\, y^2 + 3\, z^2 = 1$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $3\, x - y + 3\, z = 1$.

2.3.11 Encontre os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2\,z^2 = 1$ onde a recta normal é paralela à recta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

2.4 Derivadas de ordem superior

2.4.1 Calcule d^2z/dt^2 ou d^2w/dt^2:

(a). $z = x^2\,y + x\,y^2,\ \ x = 2 + t^4,\ y = 1 - t^3,$

(b). $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ x = e^{2t},\ y = e^{-2t},$

(c). $z = x\,\log(x + 2\,y),\ \ x = \sin t,\ y = \cos t,$

(d). $w = x\,y + y\,z^2,\ \ x = e^t,\ y = e^t\,\sin t,\ z = e^t\,\cos t.$

2.4.2 Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto e $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k. Dados $a \in D$ e $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, mostre que

$$D_v^k f(a) = \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(a)\, v_{j_1} \cdots v_{j_k}$$

2.4.3 Seja $f(x, y)$ uma função de classe C^3. Obtenha fórmulas explícitas para as derivadas direcionais $D^2_{\vec{k}} f(a, b)$ e $D^3_{\vec{k}} f(a, b)$ na direcção do vector $\vec{k} = (u, v)$ em termos das componentes u e v de $\vec{k}$ e das derivadas parciais $f_x(a, b),\ f_y(a, b),\ f_{xx}(a, b)$, etc.

2.4.4 Escreva os polinómios de Taylor de ordens 1, 2 e 3 duma função $f(x, y)$ de classe C^3 num ponto (a, b) do seu domínio.

2.4.5 Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 da função $f(x, y) = \cos(x + y)$ na origem, e o polinómio de Taylor de ordem 3 da função $f(x, y) = \sin(x + y)$ na origem. Obtenha majorantes para os respectivos restos de Taylor.

2.5 Extremos locais

2.5.1 Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções:

(a). $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

(b). $f(x,y) = x^3 - 3\,x\,y^2 + y^3$

(c). $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$,

(d). $f(x,y) = x\,y\,(6 - x - y)$

(e). $f(x,y) = (x - y + 1)^2$,

(f) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$

(g) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$

2.5.2 Suponha que $(1,1)$ é um ponto crítico duma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Em cada caso o que pode dizer esse ponto crítico de f?

(a). $f_{xx}(1,1) = 4, f_{xy}(1,1) = 1,\ f_{yy}(1,1) = 2$

(b). $f_{xx}(1,1) = 4, f_{xy}(1,1) = 3,\ f_{yy}(1,1) = 2$

2.5.3 Suponha que $(0,2)$ é um ponto crítico duma função $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Em cada caso o que pode dizer esse ponto crítico de g?

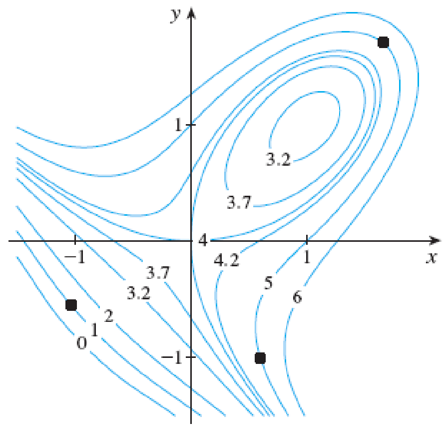
(a). $g_{xx}(0,2) = -1, g_{xy}(0,2) = 6,\ g_{yy}(0,2) = 1$

(b). $g_{xx}(0,2) = -1, g_{xy}(0,2) = 2,\ g_{yy}(0,2) = -8$

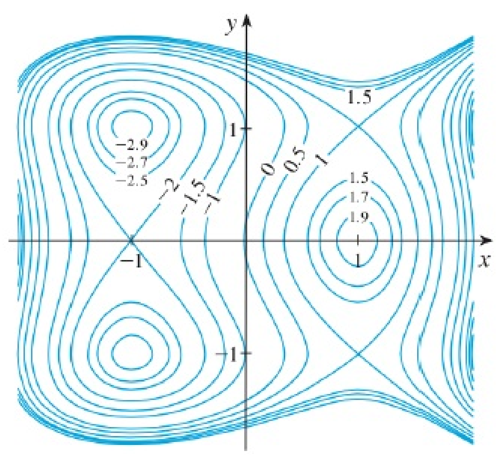
(c). $g_{xx}(0,2) = 4, g_{xy}(0,2) = 6,\ g_{yy}(0,2) = 9$

2.5.4 Em cada uma das alíneas seguintes a figura mostra as curvas de nível da função dada. Use-a para adivinhar a localização dos pontos críticos de f. Classifique-os como máximos locais, mínimos locais ou pontos sela. Dê uma explicação. Calcule a matriz Hessiana e confirme as suas previsões.

(a). $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3\,x\,y$



(b). $f(x,y) = 3\,x - x^3 - 2\,y^2 + y^4$



2.5.5 Encontre o ponto do plano $2\,x - y + z = 1$ que está mais próximo do ponto $(-4, 1, 3)$.

2.5.6 Encontre o ponto da superfície $z^2 = x\,y + 1$ que está mais próximo da origem.

2.5.7 Encontre as dimensões duma caixa rectangular com volume máximo para uma área da superfície exterior igual a 64 cm^2.

2.6 Derivação implícita

2.6.1 Em cada alínea considere $y = y(x)$ função definida implicitamente pela equação dada numa vizinhança do ponto especificado $P = (a, b)$ e calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$ em $x = a$.

(a). $x^2 - x\,y + y^3 = 8, \quad P = (0, 2)$

(b). $y^5 + 3\,x^2\,y^2 + 5\,x^4 = 9, \quad P = (1, 1)$

(c). $\cos(x - y) = x\,e^y + 1, \quad P = (0, 0)$

(d). $x\,\cos y + y\,\cos x = 0, \quad P = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

2.6.2 Em cada alínea considere $z = z(x, y)$ função definida implicitamente pela equação dada numa vizinhança do ponto especificado $P = (a, b, c)$ e calcule as derivadas $\frac{dz}{dx}(a, b)$ e $\frac{dz}{dy}(a, b)$.

(a). $x\,y^2 + y\,z^2 + z\,x^2 = 3, \ P = (1, 1, 1)$

(b). $x\,y\,z = \cos(x + y + z), \ P = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0)$

(c). $x\,e^y + y\,z + z\,e^x = 0, \ P = (0, -1, 1)$

(d). $\ln(x + y\,z) = 1 + x\,y^2\,z^3, \ P = (e, 1, 0)$

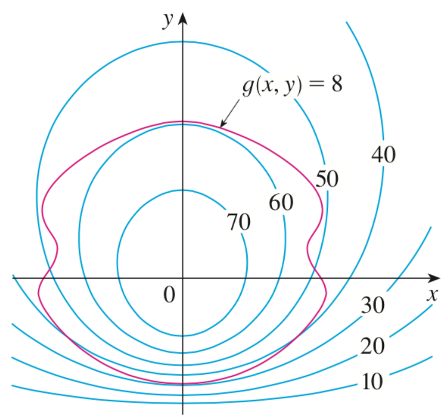
2.6.3 A equação $x + z + (y + z)^2 = 6$ define z implicitamente como função de x e de y numa vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(1, 1)$.

2.6.4 A equação $\sin(x + y) + \sin(y + z) = 1$ define z implicitamente como função de x e de y. Calcule a segunda derivada parcial $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ em função de x, y e $z = z(x, y)$.

2.6.5 Considere a função de produção de Cobb-Douglas $P = f(L, K) = b\,L^\alpha\,K^{1-\alpha}$, onde $0 < \alpha < 1$ e $b > 0$ são constantes. Determine uma expressão para a taxa marginal de substituição técnica $\frac{\partial K}{\partial L}$, que é por definição a derivada da função implícita $K = K(L)$ definida pela isoquanta $f(L, K) = P$.

2.7 Extremos condicionados

2.7.1 Na figura pode ver a curva de equação $g(x,y) = 8$ e as curvas de nível de uma função $f(x,y)$. Estime os valores máximo e mínimo de $f(x,y)$ condicionados por $g(x,y) = 8$. Explique o seu raciocínio.



2.7.2 Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo de cada função sujeita à condição indicada.

(a). $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 1$

(b). $f(x,y) = 4\,x + 6\,y, \quad x^2 + y^2 = 13$

(c). $f(x,y) = x^2\,y, \quad x^2 + 2\,y^2 = 6$

(d). $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad x^4 + y^4 = 1$

(e). $f(x,y,z) = 2\,x + 6\,y + 10\,z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 35$

(f). $f(x,y,z) = x\,y\,z, \quad x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 = 6$

(g). $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

(h). $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \cdots + x_n\ , \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

(i). $f(x,y,z) = x + 2\,y\ , \quad x + y + z = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$

(j). $f(x,y,z) = 3\,x - y - 3\,z\ , \quad x + y - z = 0, \quad x^2 + 2\,z^2 = 1$

2.7.3 Encontre os extremos absolutos de cada função f na região indicada:

(a). $f(x,y) = 2\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,x - 5,\ \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \leq 16\}$

(b). $f(x,y) = e^{-x\,y},\ \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + 4\,y^2 \leq 1\}$

2.7.4 A produção total P de um certo produto depende do trabalho L e do capital investido K através da função de produção de Cobb-Douglas $P = b\,L^\alpha\,K^{1-\alpha}$ onde $0 < \alpha < 1$ e $b > 0$ são constantes. Suponha que o custo unitário do trabalho é m, que o custo unitário do capital é n e que a empresa que fabrica o produto tem um orçamento de p euros. Maximize a produção sujeita à condição $m\,L + n\,K = p$, mostrando que o máximo ocorre quando

$$L = \frac{\alpha\,p}{m} \qquad \text{e} \qquad K = \frac{(1-\alpha)\,p}{n}.$$

2.7.5 No contexto do problema anterior, suponha agora que o nível de produção é fixado $b\,L^\alpha\,K^{1-\alpha} = Q$. Que valores de L e K minimizam o custo de produção $C(L,K) = m\,L + n\,K$?

2.7.6 Ache o volume máximo e mínimo duma caixa rectangular cuja superfície tem 1500 cm^2 de área e cujas arestas arestas medem 200 cm de comprimento total.

3 Álgebra Linear e Probabilidades

3.1 Diagonalização de matrizes simétricas

3.1.1 Para cada uma das matrizes seguintes determine o seu polinómio característico, valores próprios e dimensão dos subespaços próprios.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

3.1.2 Descreva geometricamente as aplicações lineares $T_A, T_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.1.3 Para cada uma das matrizes A seguintes determine:

(a). uma base ortonormada de vectores próprios de A,

(b). a diagonalização ortogonal de A, i.e., uma matriz ortogonal M e uma matriz diagonal D tais que $M^{-1}\,A\,M = D$.

$A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.1.4 Determine uma matriz simétrica A com valores próprios 10 e -5, cujos vectores próprios associados sejam respectivamente $\vec{v}_1 = (2,1)$ e $\vec{v}_2 = (-1,2)$.

3.1.5 Determine uma matriz simétrica $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ com vectores próprios $\vec{v}_1 = (3,4)$ e $\vec{v}_2 = (-4,3)$ respectivamente associados aos valores próprios 4 e 6.

3.1.6 Mostre que as linhas duma matriz ortogonal $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$.

3.1.7 Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vectores próprios duma matriz simétrica $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ associados a dois valores próprios distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

3.1.8 Seja $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica invertível tal que $M^{-1}\,A\,M = D$ onde M é uma matriz ortogonal e D uma matriz diagonal. Mostre que:

(a). as potências A^n, com $n \geq 1$, e a inversa A^{-1} são matrizes simétricas.

(b). $M^{-1}\,A^{-1}\,M = D^{-1}$ e $M^{-1}\,A^n\,M = D^n$ para todo $n \geq 1$.

3.1.9 Sejam $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ matrizes simétricas tais que $A\,B = B\,A$. Mostre que a matriz $A\,B$ é simétrica.

3.1.10 Determine as matrizes ortogonais $M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ cujas primeiras colunas são colineares com o vector $\vec{v} = (1,3)$.

3.2 Formas quadráticas

3.2.1 Para cada uma das formas quadráticas seguintes determine:

(a). uma matriz simétrica A que a represente,

(b). os valores próprios de A,

(c). uma base ortonormada de vectores próprios de A,

(d). uma matriz M tal que diagonalize a forma quadrática e a correspondente forma quadrática diagonalizada.

(a) $Q(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2$
(b) $Q(x,y) = xy$
(c) $Q(x,y) = 5x^2 + 3xy + y^2$
(d) $Q(x,y,z) = x^2 + xy + xz + yz$
(e) $Q(x,y,z) = 2x^2 + 4xz + y^2 - z^2$
(f) $Q(x,y,z) = 3x^2 + 4xy + 8xz + 4yz + 3z^2$

3.2.2 Classifique as formas quadráticas do exercício 3.2.1. Deve verificar se são ou não indefinidas, definidas/semi-definidas positivas, definidas/semi-definidas negativas.

3.2.3 Desenhe as cónicas definidas pelas seguintes equações

(a) $4x^2 + 4xy + y^2 - 5 = 0$	(b) $xy - 2\,x + y - 2 = 0$
(c) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2 = 0$	(d) $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - y - 4 = 0$
(e) $y^2 - 2xy + x^2 - 5x = 0$	(f) $x^2 + 4xy - 2y^2 - 12 = 0$

3.2.4 Para cada uma formas quadráticas do exercício 3.2.1 encontre uma mudança de coordenadas linear que a reduza a uma forma quadrática diagonal com coeficientes no conjunto $\{-1, 0, +1\}$.

3.2.5 Dada uma matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ mostre que a forma quadrática definida pela matriz $A^T A$, $Q(X) := X^T A^T AX$, é sempre semi-definida positiva. Mostre ainda que esta forma quadrática é definida positiva se e somente se as colunas de A forem linearmente independentes, o que só pode acontecer se $n \geq m$.

3.3 Matrizes de covariâncias

3.3.1 Seja $Z = (X, Y)$ um vector aleatório discreto, com valores num conjunto finito $\{(x_i, y_i)\colon i = 1, \dots, k\}$. Para cada $i = 1, \dots, k$ seja $p_i = \mathbb{P}\{Z = (x_i, y_i)\} = p_i$ de modo que $p_1 + \cdots + p_k = 1$. Recorde que

(a). $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^k x_i\, p_i$ e $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^k y_i\, p_i$,

(b). $\mathrm{var}(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mathbb{E}(X))^2\, p_i$,

(c). $\mathrm{var}(Y) = \sum_{i=1}^k (y_i - \mathbb{E}(Y))^2\, p_i$,

(d). $\mathrm{cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mathbb{E}(X))\,(y_i - \mathbb{E}(Y))\, p_i$.

3.3.2 Seja $Z = (X, Y)$ um vector aleatório contínuo com função densidade de probabilidade $f(x, y)$. Recorde que

(a). $\mathbb{E}(X) = \iint_{\mathbb{R}^2} x\, f(x, y)\, dx\, dy$ e $\mathbb{E}(Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} y\, f(x, y)\, dx\, dy$, (b). $\operatorname{var}(X) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, f(x,y)\, dx\, dy$,

(c). $\operatorname{var}(Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (y - \mathbb{E}(Y))^2 \, f(x,y)\, dx\, dy$,

(d). $\operatorname{cov}(X,Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - \mathbb{E}(X))\, (y - \mathbb{E}(Y))\, f(x,y)\, dx\, dy$.

3.3.3 Considere duas variáveis aleatórias X e Y, ambas tomando valores no conjunto $\{-1, 0, 1\}$, e com função massa de probabilidade dada pela tabela seguinte

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	$1/5$	0	$1/5$
0	0	$1/5$	0
1	$1/5$	0	$1/5$

(a). Calcule os valores esperados $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(Y)$.

(b). Justifique que as variáveis aleatórias X e Y não são independentes.

(c). Determine a matriz das covariâncias, e das correlações, do vector (X,Y).

3.3.4 Seja (X,Y) um vector aleatório que toma os seguintes valores $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(3,3)$ e $(4,4)$ com igual probabilidade.

(a). Calcule os valores esperados $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(Y)$.

(b). Determine a matriz das covariâncias, e das correlações, do vector (X,Y).

3.3.5 Considere um vector aleatório (X,Y) tomando valores no quadrado $[0,1]^2$ e com função densidade de probabilidade $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 3\,(1-x) & \text{se} \quad 0 \le y \le x \le 1 \\ 3\,(1-y) & \text{se} \quad 0 \le x < y \le 1 \end{cases}.$$

(a). Verifique que $\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\, dx\, dy = 1$.

(b). Calcule o valor esperado do vector aleatório (X,Y).

(c). Determine a matriz das covariâncias do vector (X,Y).

3.3.6 Seja (X, Y) um vector aleatório com valores no disco unitário

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e com função densidade de probabilidade $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{2}{\pi}(1 - x^2 - y^2)$.

(a). Verifique que $\iint_{\mathbb{D}} f(x, y)\, dx\, dy = 1$.

(b). Calcule o valor esperado do vector aleatório (X, Y).

(c). Determine a matriz das covariâncias do vector (X, Y).

Sugestão: Use coordenadas polares para calcular os integrais.

3.3.7 Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = 1$ e $\mathrm{cov}(X, Y) = -1/2$ e considere o vector aleatório $\vec{V} = (X, Y, Z)$ com $Z = X - Y + 1$.

(a). Calcule $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(Y^2)$ e $\mathbb{E}(X\,Y)$.

(b). Determine a matriz das covariâncias Σ de $\vec{V}$.

(c). Determine as correlações entre os pares de variáveis aleatórias (X, Z) e (Y, Z).

(d). Veja que a matriz Σ não é definida positiva.

3.3.8 Determine as componentes principais dum vector aleatório (X, Y) com valor esperado $\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e matriz de covariâncias $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3.3.9 Determine as componentes principais dos vectores aleatórios em cada um dos problemas 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5 e 3.3.6

Sejam $\Sigma \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica definida positiva e $\mu \in \mathbb{R}^k$ um vector. Chama-se *normal multivariada* com valor médio μ e matriz de correlações Σ à função densidade de probabilidade $f_{\mu,\Sigma} \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$f_{\mu,\Sigma}(X) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\, \det(\Sigma)^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu)}.$$

Nas aulas teóricas vimos que

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^k} f_{\mu,\Sigma}(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k = 1$$

e que um vector aleatório contínuo $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ com função densidade de probabilidade $f_{\mu,\Sigma}$ tem valor esperado μ e matriz de covariâncias Σ.

3.3.10 Seja X um vector aleatório com distribuição normal multivariada definida pela função $f_{\mu,\Sigma}$, onde $\mu \in \mathbb{R}^k$ e Σ é uma matriz simétrica e definida positiva. Mostre que as componentes principais de X têm todas distribuição normal $N(0,1)$. São independentes as componentes principais de X?

Sugestão: Sejam M uma matriz ortogonal e D uma matriz diagonal tais que $M^{-1}\,\Sigma\, M = D^2$. Seja $U = D^{-1}\, M^{-1}\,(X - \mu)$ o vector das componentes principais de X. Considere a transformação de mudança de coordenadas $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $x = \varphi(u) = \mu + M\, D\, u$. Observe que o valor absoluto da matriz Jacobiana nesta mudança de coordenadas é igual a $\det D = \det(\Sigma)^{1/2}$. Usando-a mostre que a função de densidade de probabilidade de U é

$$f_U(u) = \det(\Sigma)^{1/2}\, f_{\mu,\Sigma}(\mu + M\, D\, u) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^k u_j^2} = \prod_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\, u_j^2}.$$

3.3.11 Considere um vector aleatório normal bivariado $\vec{Z} = (X, Y)$ com valor esperado nulo e matriz de covariâncias $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

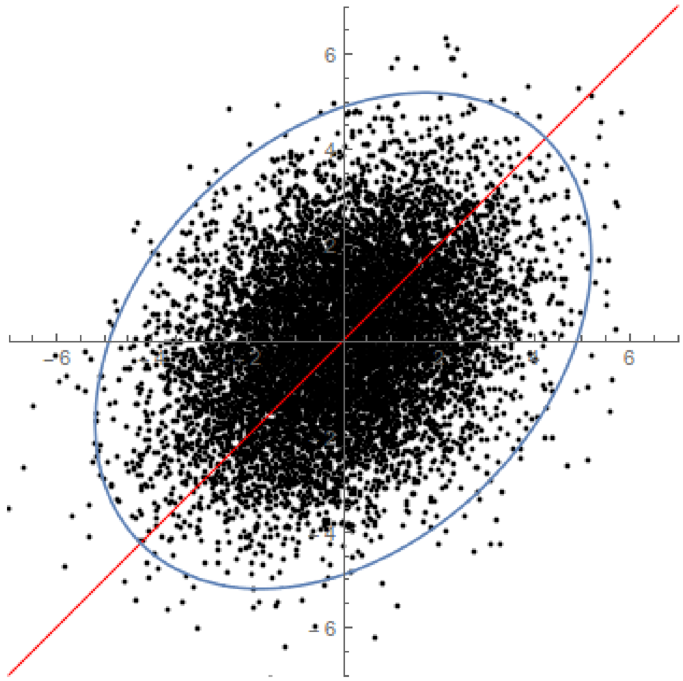
(a). Determine explicitamente a forma quadrática $Q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\ \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

(b). Descreva a função densidade de probabilidade do vector aleatório $\vec{Z}$.

(c). Determine as componentes principais $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ do vector aleatório $\vec{Z} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.

(d). Considere o elipsóide $\mathbb{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon Q(x,y) \le 9\}$ e calcule a probabilidade $\mathbb{P}[\,\vec{Z} \in \mathbb{E}\,] = \mathbb{P}[\,Q(X,Y) \le 9\,]$.

Sugestão: Veja que $Q(X,Y) = U^2 + V^2$.



Amostra de 10^4 pontos (escolhidos de forma independente) com distribuição normal bivariada de valor esperado nulo e matriz de covariâncias $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. A elipse corresponde à curva de nível

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\,(3\,x^2 + 3\,y^2 - 2\,x\,y) = 9.$$

A linha diagonal é a direcção própria de Σ associada ao maior valor próprio.

4 Complementos de Análise

4.1 Séries Numéricas

4.1.1 Calcule as somas das seguintes séries geométricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$

4.1.2 Calcule as somas das seguintes séries telescópicas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

4.1.3 Estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, 2^{1/n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

4.2 Séries de Potências

4.2.1 Determine o raio e o intervalo de convergência de cada uma das séries seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, x^n}{(n+1)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,(x-1)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\,(x+3)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(2x-1)^n$

4.2.2 Determine o intervalo de convergência e a função soma de cada uma das séries de potências seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,(x-1)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$

4.3 Noções de convergência

4.3.1 Em cada alínea determine uma função $f : X \to \mathbb{R}$ tal que a sucessão de funções dada convirja pontualmente para f.

(a) $X = [-1,1], \quad f_n(x) = \arctan(n\,x)$

(b) $X = [-1,1], \quad f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}$

(c) $X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}$

(d) $X = [0,1], \quad f_n(x) = n\,x\,(1-x^2)^n$

(e) $X = [-1,1], \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}}$

(f) $X = [-1,1], \quad f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+n^{-2}}}$

4.3.2 Em cada alínea, considerando a função f do problema anterior, diga justificando se é válida ou não a convergência dos respectivos integrais.

(a). $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} \arctan(n\,x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

(b). $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} \frac{n^2}{n^2+x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

(c). $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

(d). $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{1} x\,(1-x^2)^n\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

4.3.3 Em cada uma das alíneas (a), (b), (d) e (e) do problema 4.3.1, verfique se a relação seguinte

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

é válida para todo o ponto $x \in X$.

4.3.4 Em cada uma das alíneas do problema 4.3.1, diga justificando se a convergência em causa é ou não uniforme.

4.3.5 Determine o intervalo de convergência e a soma de cada uma das séries de potências seguintes:

(a) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\,x^n}{n}$

(b) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,n\,(x-1)^n$

(c) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)!}$

(d) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n\,\frac{n+2}{n+1}\,x^n$

4.3.6 Em cada alínea justifique os desenvolvimentos de Taylor apresentados:

(a) $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ (|x| < 1)$

(b) $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \ (|x| < 1)$

(c) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{n!} \ (x \in \mathbb{R})$

(d) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \ (|x| < 1)$

(e) $\log \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \ (|x| < 1)$

(f) $\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \ (x \in \mathbb{R})$

4.3.7 Seja μ_n o momento de ordem n duma variável aleatória limitada X. Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!}$ é uma série convergente e que

$$\mathbb{E}(e^X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!}.$$

4.3.8 Seja X uma variável aleatória limitada com $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(X^2) = 0$ e $\mathbb{E}(X^3) = -1$. Escreva o polinómio de Taylor de ordem 3 da função $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ na origem.

4.3.9 Seja X uma variável aleatória limitada tal que $|X| \leq 2$ e considere a função

$$\varphi(t) := \mathbb{E}\left(\frac{1}{1-tX}\right).$$

(a). Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ pode garantir que $\varphi(t)$ está bem definida ?

(b). Ache o desenvolvimento em série de Taylor de $\varphi(t)$ na origem à custa dos momentos de X.

(c). Compare o intervalo de convergência da série na alínea (b) com o domínio de $\varphi(t)$ encontrado na alínea (a).

(d). Relacione as derivadas de $\varphi(t)$ na origem com os momentos de X.