Anéis, Álgebras e Representações

– Exercícios –

1. Seja R um anel não-nulo. Prove que R é um anel de divisão se e só se qualquer elemento $a \in R$, $a \neq 0$, é invertível à direita.

2. Prove que, se R é um domínio, então $\mathrm{car}(R) = 0$ ou $\mathrm{car}(R) = p$ para algum número primo $p \in \mathbb{P}$.

3. Sejam R um anel e $a \in R$. Prove que:

   (a) Se a tem um inverso esquerdo, então a não é divisor de zero à esquerda.

   (b) O recíproco de (a) é verdadeiro quando $a \in aRa$.

4. Dê um exemplo de um anel R e de um elemento $a \in R$ tal que $Ra \subsetneq aR$.

5. Sejam R um anel e $a, b \in R$. Prove que, se $1 - ba$ é invertível à esquerda (resp., invertível), então $1 - ab$ invertível à esquerda (resp., invertível) e construa explicitamente um inverso esquerdo (resp., um inverso) de $1 - ab$.

6. Sejam $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ ideais esquerdos (resp., ideais) de um anel R. Prove que $R = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$ se e só se existem idempotentes $e_1, \ldots, e_n$, ortogonais dois-a-dois, tais que $1 = e_1 + \cdots + e_n$ e $\mathcal{L}_i = Re_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

7. Seja R um anel. Um R-módulo M diz-se *hopfiano* se qualquer R-endomorfismo sobrejectivo de M é um R-automorfismo. Prove que:

   (a) Qualquer R-módulo noetheriano é hopfiano.

   (b) O R-módulo regular ${}_RR$ é hopfiano se e só se R é *finito à Dedekind* (isto é, se todo o elemento invertível à direita é invertível à esquerda).

   (c) Se R é noetheriano à esquerda, então R é finito à Dedekind.

8. Sejam $\Bbbk$ um corpo e A uma $\Bbbk$-álgebra tal que todo o elemento de A é algébrico sobre $\Bbbk$. Prove que:

   (a) A é finita à Dedekind.

   (b) Qualquer divisor de zero à esquerda de A é, também, um divisor de zero à direita.

   (c) Um elemento não-nulo de A é invertível se e só se não é um divisor de zero.

   (d) Se B é uma subálgebra de A, então $B^\times = B \cap A^\times$.

9. Sejam D um anel de divisão e $\Bbbk = \{d \in D \colon dd' = d'd \text{ para todo } d' \in D\}$ o centro de D. Prove que:

(a) O centro do anel polinomial $D[X]$ é $\Bbbk[X]$.

(b) Para qualquer $a \in D \setminus \Bbbk$, o ideal de $D[X]$ gerado por $X - a$ é $D[X]$.

(c) Para qualquer ideal $\mathcal{I} \trianglelefteq D[X]$ existe $p(X) \in \Bbbk[X]$ tal que $\mathcal{I} = \langle p(X) \rangle_{D[X]}$.

10. Seja R um anel e sejam $a, b \in R$ tais que $aR = bR$. Prove que existe um R-isomorfismo $\varphi \colon Ra \to Rb$ tal que $\varphi(a) = b$.

11. Seja R um domínio. Prove que, se R tem um ideal esquerdo minimal, então R é um anel de divisão.

12. Sejam R um anel e M um R-módulo. Prove que existe um isomorfismo de anéis

$$\mathrm{End}_R(M^{(n)}) \cong \mathbb{M}_n(E)$$

onde $E = \mathrm{End}_R(M)$.

13. Sejam R um anel e $\mathcal{L}$ um ideal esquerdo de R. Definimos o *idealizador de* $\mathcal{L}$ como sendo o conjunto

$$\mathbb{I}_R(\mathcal{L}) = \{a \in R \colon \mathcal{L}a \subseteq \mathcal{L}\}.$$

Prove que:

(a) $\mathbb{I}_R(\mathcal{L})$ é o maior subanel de R que contém $\mathcal{L}$ como um ideal (bilateral).

(b) Existe um isomorfismo de anéis $\mathrm{End}_R(R/\mathcal{L}) \cong \mathbb{I}_R(\mathcal{L})/\mathcal{L}$.

14. Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ ideais esquerdos maximais de um anel R. Prove que os R-módulos (simples) $R/\mathcal{L}$ e $R/\mathcal{L}'$ são R-isomorfos se e só se existe $r \in R \setminus \mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L}'r \subseteq \mathcal{L}$. Além disso, prove que, nesta situação, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ contém exactamente os mesmos ideais (bilaterais) de R.

15. Seja $\{\Bbbk_i \colon i \in I\}$ uma família de corpos. Prove que o anel $R = \prod_{i \in I} \Bbbk_i$ é semisimples (à esquerda) se e só se I é um conjunto finito.

16. Seja R um anel semisimples (à esquerda) e sejam $a, b \in R$. Prove que $aR = bR$ se e só se $a = bu$ para alguma unidade $u \in R^\times$.

17. Sejam R um anel e M um R-módulo semisimples. Prove que as afirmações seguintes são equivalentes:

(a) M é finitamente gerado.

(b) M é noetheriano.

(c) M é artiniano.

(d) M é uma soma directa finita de submódulos simples.