18. Sejam R um anel e M um R-módulo. Suponha que existem elementos $m_1, m_2, \ldots \in M$ tais que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $a \in R$ tal que os elementos am_n, $am_n + 1, \ldots$ são quase todos nulos, mas nem todos iguais a 0. Prove que $M^{(\mathbb{N})} = M \dotplus M \dotplus \cdots$ não é parcela directa de $M^{\mathbb{N}} = M \times M \times \cdots$ (de maneira que o R-módulo $M^{\mathbb{N}}$ não é semisimples).

19. Seja R um anel e sejam M e N R-módulos não-nulos que admitem séries de composição. Prove que, se existe um R-homomorfismo não-nulo $\theta\colon M \to N$, então M e N têm pelo menos um factor de composição em comum (a menos de isomorfismo).

20. Sejam R um anel, M um R-módulo e $\varphi\colon M \to M$ um R-endomorfismo. Prove que, se $\varphi^n \in \mathrm{GL}_R(M)$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $\varphi \in \mathrm{GL}_R(M)$.

21. Sejam $\Bbbk$ um corpo de característica $p \neq 0$, G um grupo finito tal que $p \mid |G|$ e

$$e = \sum_{g \in G} g \in \Bbbk G.$$

Prove que o submódulo $\Bbbk Ge$ não é parcela directa do $\Bbbk G$-módulo regular ${}_{\Bbbk G}\Bbbk G$.

22. Seja R um anel. Prove que:

(a) Se R é um anel simples, então existe um R-módulo simples fiel.(*)

(b) Se R é artiniano à esquerda e existe um R-módulo simples fiel, então R é um anel simples.

23. Sejam R um anel, M um R-módulo fiel e $D = \mathrm{End}_R(M)$. Prove que:

(a) A correspondência $a \mapsto a_{\mathrm{L}}$ define um monomorfismo de anéis de A em $\mathrm{End}_D(M)$.

(b) Se $E = \mathrm{End}_D(M)$, então $\mathrm{End}_E(M) = D$.

24. Sejam R um anel semisimples, M um R-módulo simples e

$$\mathcal{B}_M = \sum_{\substack{\mathcal{L} \trianglelefteq_{\mathrm{esq}} R \\ \mathcal{L} \cong_R M}} \mathcal{L}.$$

Prove que, se $\theta\colon R \to \mathrm{End}_R(M)$ é o R-homomorfismo definido por $\theta(a) = a_{\mathrm{L}}$ para todo $a \in R$, então existem isomorfismos de anéis

$$\theta(R) \cong \mathcal{B}_M \cong \mathrm{End}_D(M)$$

onde $D = \mathrm{End}_R(M)$.

25. Sejam $\Bbbk$ um corpo, A uma $\Bbbk$-álgebra e M um A-módulo semisimples. Prove que M é simples se e só se $\mathrm{End}_A(M) \cong \Bbbk$. Além disso, caso exista, dê um exemplo de um A-módulo não-semisimples M tal que $\mathrm{End}_A(M) \cong \Bbbk$.

26. Sejam R um anel e M um R-módulo simples. Prove que, como grupo abeliano (com respeito à adição), M é isomorfo a uma soma directa de cópias de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para algum $p \in \mathbb{P}$.

(*) Dizemos que um R-módulo M é *fiel* se, para qualquer $a \in R$, $aM = 0 \implies a = 0$.

27. Prove que, se R é um anel semisimples e $n \in \mathbb{N}$, então $\mathbb{M}_n(R)$ também é um anel semisimples.

28. Seja R um domínio. Prove que, se $\mathbb{M}_n(R)$ é um anel semisimples para algum $n \in \mathbb{N}$, então R é um anel de divisão.

29. Sejam R um anel e M um R-módulo semisimples. Prove que, se $D = \mathrm{End}_R(M)$, então M é um D módulo semisimples. Além disso, caso exista, dê um exemplo de um R-módulo não-semisimples M tal que M é semisimples como D-módulo.

30. Sejam R um anel simples e $\Bbbk = Z(R)$ o centro de R. Prove que:

(a) $\Bbbk$ é um corpo e qualquer R-módulo é um espaço vectorial sobre $\Bbbk$.

(b) Se $\dim_\Bbbk R < \infty$ e M é um R-módulo finitamente gerado, então

$$\dim_k M = \sqrt{\dim_k R \cdot \dim_\Bbbk E}.$$

(c) Existe um isomorfismo de $\Bbbk$-álgebras $R \cong \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ se e só se R tem um ideal esquerdo não-nulo $\mathcal{L}$ tal que $\dim_\Bbbk \mathcal{L} \leq \sqrt{\dim_k R}$.

31. Seja R um anel semisimples. Prove que:

(a) R é finito à Dedekind.

(b) Se $a \in R$ e Ra é um ideal bilateral de R, então $Ra = aR$.

(c) $R = R^\times \,\mathrm{Id}(R)$ onde $\mathrm{Id}(R) = \{e \in R \colon e^2 = e\}$ é o conjunto dos idempotentes de R.

32. Sejam $\Bbbk$ um corpo e A uma $\Bbbk$-álgebra com $\dim_\Bbbk A = n^2$ para $n \in \mathbb{N}$. Prove que existe um isomorfismo de $\Bbbk$-álgebras $A \cong \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ se e só se A é simples e existe $a \in A$ cujo polinómio mínimo $m_a(X) \in \Bbbk[X]$ é da forma $m_a(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$ para $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$.

33. Sejam $\Bbbk$ um corpo e A uma $\Bbbk$-álgebra. Prove que, se A tem dimensão infinita sobre $\Bbbk$, então qualquer A-módulo não-nulo tem dimensão infinita sobre $\Bbbk$.

34. Sejam D um anel de divisão e V um espaço vectorial sobre D com uma D-base (infinita) $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Defina $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{End}_D(V)$ por

$$\theta_1(e_n) = e_{2n} \qquad \text{e} \qquad \theta_2(e_n) = 2n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pondo $E = \mathrm{End}_D(V)$, prove que:

(a) E é um E-módulo livre com E-base $\{\theta_1, \theta_2\}$.

(b) $E^2 \cong_E E$.

(c) $E^m \cong_R E^n$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ (de modo que não podemos definir $\dim_E E$).

35. Sejam $\Bbbk$ um corpo e G um grupo. Sejam V é um $\Bbbk G$-módulo e H é um subgrupo de G com índice finito e tal que $(G : H|$ é invertível em $\Bbbk$. Prove que, se V é semisimples como $\Bbbk H$-módulo, então V também é semisimples como $\Bbbk G$-módulo.