

UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL
FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - Série 6
Vorticidade e Camada limite

1. a) Aplicando o rotacional à equação de Euler, mostre que

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}.$$

b) Se o fluido for incompressível, interprete o resultado em termos da conservação das linhas de vorticidade.

c) Mostre que para a equação de Navier-Stokes se obtém o resultado:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

d) Mostre que a vorticidade se difunde no referencial que se move com o fluido e discuta o significado do coeficiente de difusão.

2. Considere um fluido em escoamento de Poiseuille num tubo cilíndrico com eixo paralelo a $\hat{\mathbf{z}}$.

a) Mostre que no plano $y = 0$, $\omega_x = \omega_z = 0$ e

$$\omega_y = -\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{x}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

b) Mostre que ω muda de sinal nos planos $y = 0$ e $x = 0$.

c) Mostre que as linhas de vorticidade são anéis fechados, co-axiais com o tubo.

d) Determine a direcção de difusão da vorticidade e discuta a sua evolução temporal.

e) No estado estacionário, como pode a vorticidade ser conservada?

3. a) Usando a equação de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas, e considerando um escoamento em 2D através de uma placa fina, mostre em que condição as equações para a camada limite se reduzem à equação da continuidade e

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

onde x é a direcção da corrente onde a placa está inserida e y é a direcção normal à placa. Considere que a placa tem largura D na direcção da corrente, espessura desprezável e comprimento $L \gg D$.

b) Usando análise dimensional, mostre que as equações para a camada limite são auto semelhantes.

4. Considere a equação diferencial para a função $u(y)$:

$$\epsilon u'' + u' = 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 2,$$

onde ϵ é uma constante positiva pequena.

a) Mostre que a solução é dada por:

$$u = y + \frac{1 - e^{-y/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}}$$

b) Discuta os limites desta solução para y muito pequeno (da ordem de ϵ) ou $y \gg \epsilon$ se u for a velocidade de um fluido na direção x .

c) Considere $\epsilon = 0$ diretamente na equação diferencial e determine a solução. Esta solução corresponde ao limite $y \gg \epsilon$ da alínea b? O que significa isto?

5. Calcule o perfil de velocidades e a força de arrasto de um fluido que escoa sobre uma placa de comprimento L com velocidade U (longe da placa). Parte da solução deve ser numérica, pois a equação diferencial resultante não tem solução analítica.

6. O perfil de velocidades numa camada limite laminar sobre uma placa de comprimento L e ângulo de incidência zero, pode ser aproximado por um polinómio de grau 4

$$\frac{u}{u_\infty} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + a_4 \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

Determine os coeficientes do polinómio.

7. Um fluido incompressível de viscosidade cinemática ν e densidade ρ encontra-se acima de uma fronteira sólida em $y = 0$. Longe desta fronteira, o campo de velocidade do fluido é dado por $\mathbf{u} = (Ex, -Ey, 0)$, onde E é uma constante positiva.

a) Explique por que o escoamento longe da fronteira sólida não pode ser a solução adjacente à fronteira.

b) A vorticidade desse escoamento constante é dada por $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega(x, y))$. Mostre que as equações de movimento podem ser escritas como

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (1)$$

Interprete o significado físico dos termos nesta equação.

c) Calcule uma solução em termos de uma função de corrente, $\psi(x, y)$, da forma $\psi = Exg(y)$ e substituindo em 1, mostre que $g(y)$ satisfaz.

$$\frac{E}{\nu}(-g'g'' + gg''') = -g'''' \quad (2)$$

Escreva as condições de contorno para $g(y)$.

d) Substitua $g(y) = \delta G(y/\delta)$, onde δ deve ser determinado e mostre que G satisfaz

$$G''' + 1 = G'^2 - GG'' \quad (3)$$

O que a escala de comprimento δ representa?

e) A solução numérica da equação acima é $G''(0) = 1.23$ e $G(Y) \rightarrow Y - 0.65$ quando $Y \rightarrow \infty$. Calcule a tensão de cisalhamento exercida pelo escoamento na camada inferior.

f) Discuta o que acontece com esta solução quando $E < 0$.