UNIVERSIDADE DE LISBOA – FACULDADE DE CIÊNCIAS

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Duração: 2 horas

1. O escoamento de Poiseuille é um escoamento induzido por um gradiente de pressões. Considere um escoamento incompressível de um fluido Newtoniano resultante de uma queda de pressão Δp num tubo cilindrico horizontal de comprimento L e raio $R \ll L$. Use coordenadas cilindricas com o eixo dos z segundo o eixo de simetria do cilindro e assuma que $\mathbf{v} = v_z(r)\hat{\mathbf{z}}$.

   a) Escreva a equação de Navier-Stokes ao longo das direções r, θ e z. Assumindo que $\partial p/\partial z$ é constante, mostre que, no regime estacionário: $v_z = \Delta p(R^2 - r^2)/(4\eta L)$, onde η é a viscosidade do fluido.
   b) Mostre que a taxa de escoamento Q (volume de fluído que passa através de um corte transversal do tubo por unidade de tempo) satisfaz $\Delta p = \mathcal{R}Q$, onde $\mathcal{R} \propto R^{-4}$ correspondendo à *"resistência"* do fluído (lei de Poiseuille).
   c) A taxa de escoamento do sangue numa artéria coronária é reduzido para metade do valor normal devido a acumulação de depósitos de plaquetas. Qual o fator de redução do raio da artéria? Por quanto deve a diferença de pressões aumentar para restaurar o escoamento, apesar desta acumulação de plaquetas?
   d) Calcule a força de fricção viscosa exercida pelo fluido na parede do tubo. Discuta como esta força gera o perfil de velocidades $v_z(r)$. No caso em que não existe uma bomba que sustente o gradiente de pressões, discuta o que acontece ao escoamento.
   e) Considere que a condição de fronteira é dada por: $v_z(R) = \ell_s \left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=R}$, onde ℓ_s é uma constante. Volte a calcular $v_z(r)$ e Q, e discuta como a lei de Poiseuille é alterada devido a esta condição.

2. Vórtices reais tipicamente têm um pequeno vórtice no núcleo que contém a parte mais significativa da vorticidade do escoamento, enquanto que para lá do núcleo o escoamento é aproximadamente irrotacional. Este comportamento é usualmente modelado usando o vórtice de Rankine, com o campo de velocidades $\mathbf{v} = v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ em coordenadas polares e com:

$$v_\theta = \Omega r \text{ para } r < R, \text{ e } v_\theta = \frac{\Omega R^2}{r} \text{ para } r > R,$$

onde Ω e R são constantes. Este escoamento representa uma rotação de corpo rígido para $r < R$ e um vórtice de linha para $r > R$. (O escoamento estende-se ao longo da direção de z mas não existe uma componente da velocidade ao longo deste eixo).

   a) Faça um esboço do campo de velocidades e da vorticidade em função de r
   b) Despreze os efeitos devido à gravidade e devido à viscosidade do fluido. Assuma que a densidade é constante e calcule a pressão em função de r (i) na região irrotacional, (ii) na região do escoamento de corpo rígido. Escreva uma expressão para $p(0) - p(\infty)$.

Exame continua na página seguinte...

c) Compare a curva de $p(r)$ obtida com o gráfico na Figura 1, que mostra medidas da pressão diretamente por cima de um tornado que está associado a um défice de 100mb(hPa) à medida que este passa.

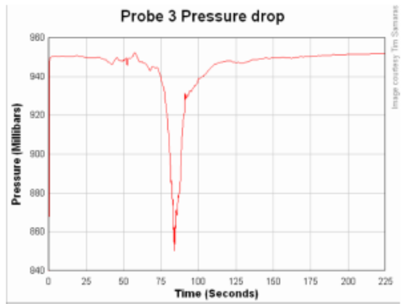

Figura 1 - Medidas da pressão diretamente por cima de um tornado

d) Um vórtice de 2m de diametro apareceu no lago Texoma em Oklahoma assim que a barragem de Denison foi aberta para escoar o enchimento do lago em 2015. Este escoamento pode ser modelado com o vórtice de Rankine. Tendo em consideração a gravidade, calcule a altura da superfície livre $h(r)$ nas duas regiões do vórtice de Rakine e escreva a expressão para $h(\infty) - h(0)$.