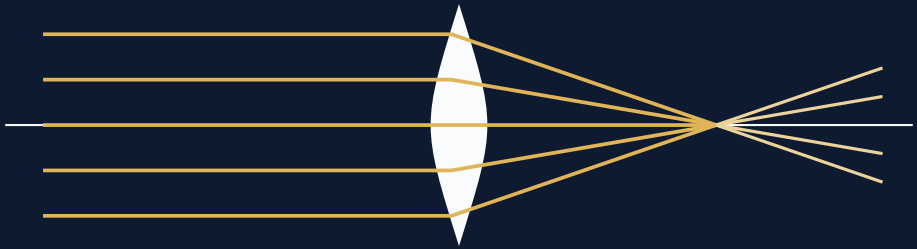
Espelhos e lentes

Formação de imagens



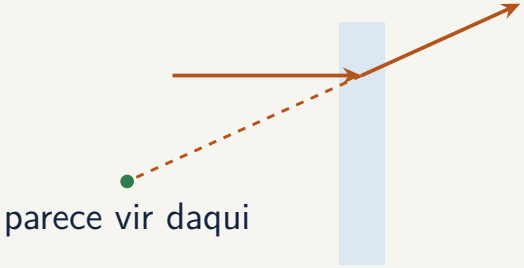
Três perguntas

- Porque é que os retrovisores avisam que os objectos estão mais perto do que parecem?
- Porque é que a mesma lente dá umas vezes uma imagem invertida e outras uma imagem direita?
- O que quer dizer uma lente de $+2$ dioptrias?

O que vamos precisar

Raios e prolongamentos

- Leis da reflexão e de Snell.
- **Aproximação paraxial**: raios perto do eixo e pouco inclinados, $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$.
- Um raio pode prolongar-se para trás (tracejado). É só uma construção: a luz não passa lá.



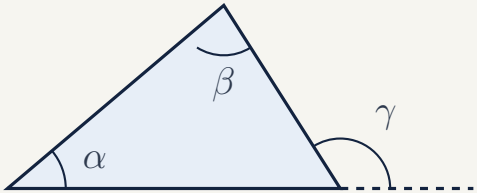
O que vamos precisar

O ângulo externo

Os ângulos de um triângulo somam $180°$. Por isso o ângulo externo é a soma dos dois internos opostos:

$$\gamma = \alpha + \beta$$

Vamos usá-lo para relacionar os ângulos dos raios.



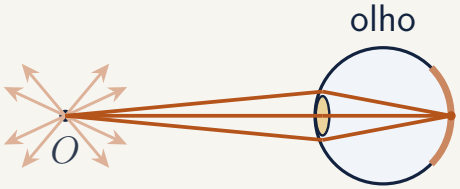
Imagens

Como vemos um ponto

Cada ponto O de um objecto manda luz em todas as direcções.

Só um cone estreito de raios entra no olho. O cristalino junta-o num ponto da retina.

Vemos o ponto no vértice desse cone: no sítio **de onde os raios parecem vir**.



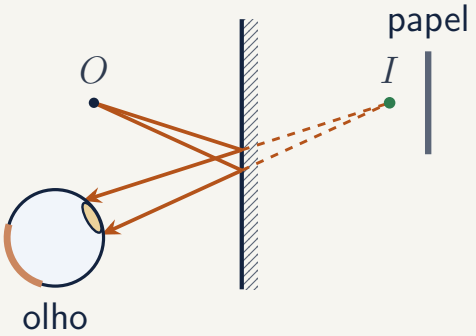
Imagens

Virtual: a luz só parece vir de lá

O espelho muda a direcção dos raios. Ao olho chegam como se viessem de I, atrás do espelho: é lá que vê O.

Mas atrás do espelho não chega luz: um papel posto em I fica escuro.

Imagem virtual: só se vê olhando para o espelho.



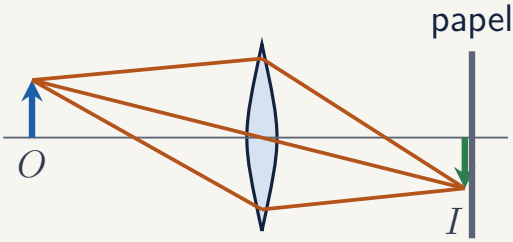
Imagens

Real: a luz passa mesmo lá

Uma lente convergente volta a juntar os raios de cada ponto do objecto.

Num papel posto lá aparece a imagem, invertida: é assim no projector, na máquina fotográfica e na retina.

Imagem real: a luz passa mesmo em I.

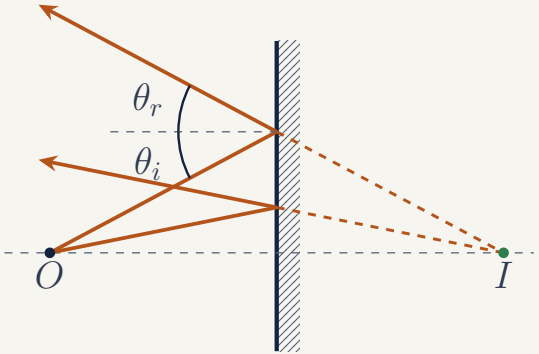


Espelho plano
A imagem

Cada raio que sai de O reflecte-se com $\theta_r = \theta_i$.

Prolongados para trás, todos passam por I, tão atrás do espelho como O está à frente.

A imagem é virtual, direita e do mesmo tamanho.



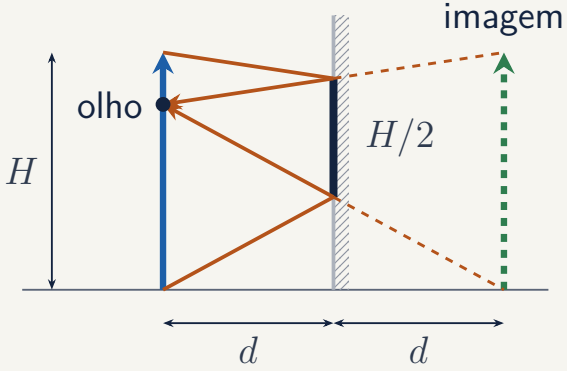
Espelho plano

Que tamanho tem de ter

Para nos vermos de corpo inteiro, a luz dos pés e a do alto da cabeça têm de chegar aos olhos.

O olho vê a imagem a $2d$. O espelho está a meio caminho: a parte usada é metade da imagem.

Basta $H/2$, **seja qual for** d.



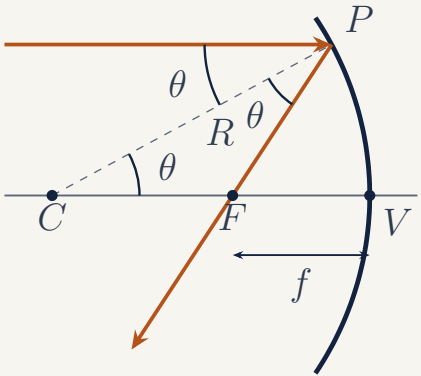
Espelho esférico
O foco

Raio de luz paralelo ao eixo: bate em P, cruza o eixo em F. **Distância focal**: $f = VF$.

Pelos ângulos θ, CFP é isósceles:

$$CF = \frac{R}{2\cos\theta}$$

Raios paraxiais, $\theta \to 0$: $CF = R/2$, logo $f = R - CF = R/2$.

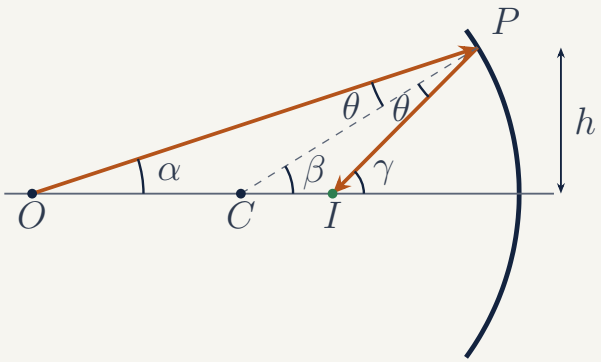


Equação dos espelhos
Os ângulos

Usamos o ângulo externo, do início: é a soma dos dois internos opostos.

- triângulo OPC: $\beta = \alpha + \theta$;
- triângulo CPI: $\gamma = \beta + \theta$.

sem θ: $\quad \alpha + \gamma = 2\beta$



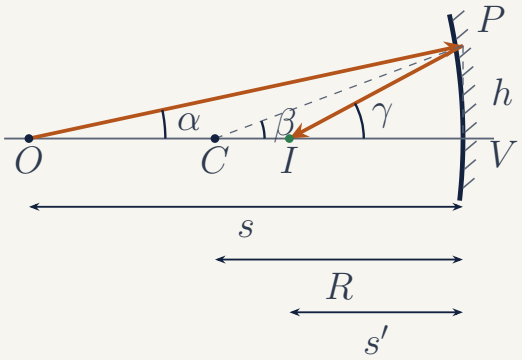
Equação dos espelhos

Ângulos pequenos

Distâncias medidas a partir do vértice V: $s = VO$, $s' = VI$, $R = VC$.

Raios paraxiais: P fica quase em V, à altura h. Cada ângulo é h sobre a sua distância:

$$\alpha \approx \frac{h}{s}, \quad \beta \approx \frac{h}{R}, \quad \gamma \approx \frac{h}{s'}$$



Equação dos espelhos

O resultado

Substituindo em $\alpha + \gamma = 2\beta$:

$$\frac{h}{s} + \frac{h}{s'} = \frac{2h}{R}$$

A altura h desaparece:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

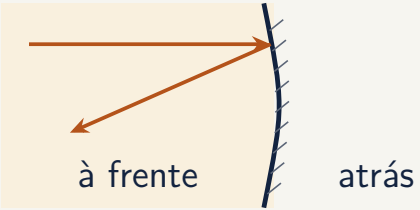
s' não depende de h: todos os raios de O passam por I.

Equação dos espelhos

A convenção de sinais

A mesma equação serve para todos os casos, com distâncias com sinal:

	> 0	< 0
s	à frente	atrás
s'	à frente: real	atrás: virtual
f	côncavo	convexo



A luz chega e volta pelo lado da frente.

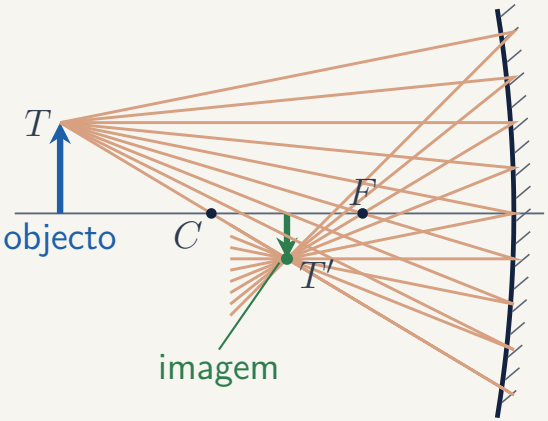
Espelho côncavo

Porque bastam dois raios

Do topo T do objecto saem raios em todas as direcções.

s' não depende de onde o raio bate no espelho: reflectidos, todos passam por T', o topo da imagem.

Basta cruzar dois.



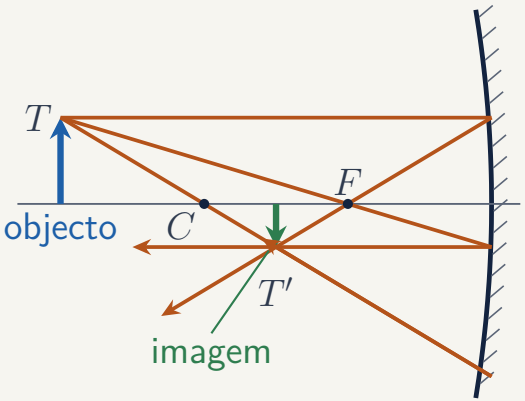
Espelho côncavo

Que raios usar

Os de caminho conhecido:

- paralelo: sai por F;
- por F: sai paralelo;
- por C: volta para trás.

O segundo é o primeiro invertido. O terceiro incide segundo a normal.

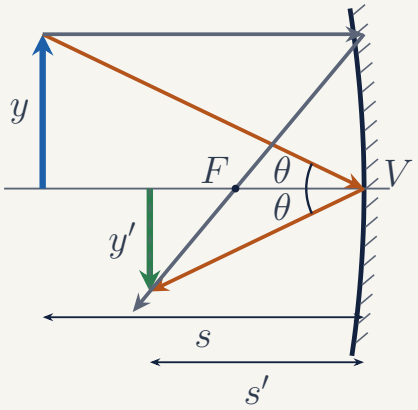


Espelho côncavo
O aumento

Raio pelo vértice: volta com o mesmo θ. Triângulos semelhantes:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Só dá a razão. s' vem do raio paralelo (cinzento) ou da equação.

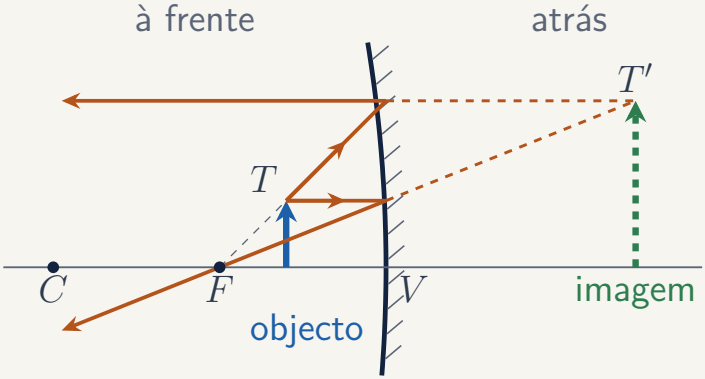


Espelho côncavo
Objecto dentro do foco

Dois raios do topo T:

- paralelo: reflecte por F;
- na direcção $F \to T$: reflecte paralelo.

Os prolongamentos cruzam-se em T': imagem virtual, direita e maior.



Espelho côncavo

O espelho do dentista

Espelho côncavo com $R = 4\,\text{cm}$, logo $f = 2\,\text{cm}$. O dente está a $s = 1{,}5\,\text{cm}$, dentro do foco.

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1{,}5} = -\frac{1}{6}$$

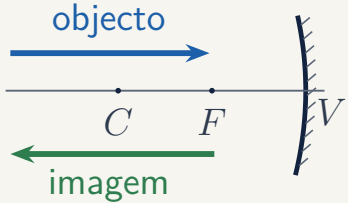
$s' = -6\,\text{cm}$: a imagem está $6\,\text{cm}$ atrás do espelho.

$m = -s'/s = +4$: o dentista vê o dente direito e quatro vezes maior.

Espelho côncavo
Onde fica a imagem

Da equação dos espelhos:

$$s' = \frac{sf}{s - f}$$



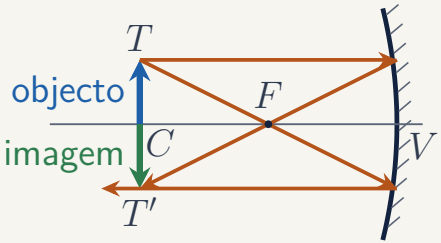
- $s \to \infty$: $s' \to f$;
- $s \to f$: $s' \to \infty$;
- $s = f$: os raios reflectidos saem paralelos, não há imagem (farol do carro);
- $s < f$: $s' < 0$, atrás.

Espelho côncavo
Objecto em C

Imagem do tamanho do objecto: $|m| = 1$, logo $s' = s$.

$$\frac{2}{s} = \frac{1}{f} \Rightarrow s = 2f = R$$

O objecto está em C e a imagem também, invertida.



Espelho côncavo

Os casos

$s = 2f$ separa imagens menores ($s' < s$) de maiores ($s' > s$):

objecto	imagem	
$s > 2f$	$f < s' < 2f$	real, invertida, menor
$s = 2f$	$s' = 2f$	real, invertida, igual
$f < s < 2f$	$s' > 2f$	real, invertida, maior
$s < f$	$s' < 0$	virtual, direita, maior

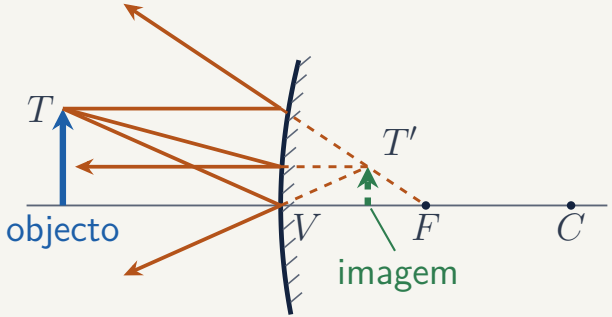
Espelho convexo

Três raios

F e C atrás: $f < 0$.

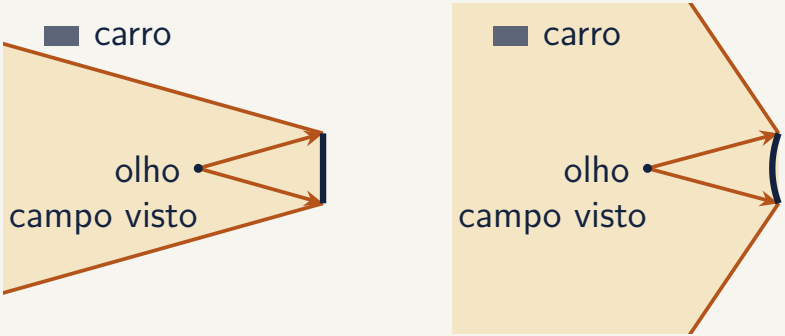
- paralelo: como se viesse de F;
- dirigido a F: sai paralelo;
- ao vértice: ângulos iguais.

Imagem virtual, direita e menor.



Espelho convexo
Campo de visão

Espelhos do mesmo tamanho. A zona sombreada é o que o olho vê.



RESPOSTA

O retrovisor

Porque é que os retrovisores avisam que os objectos estão mais perto do que parecem?

Convexo, $f = -50\,\text{cm}$, carro a $10\,\text{m}$:

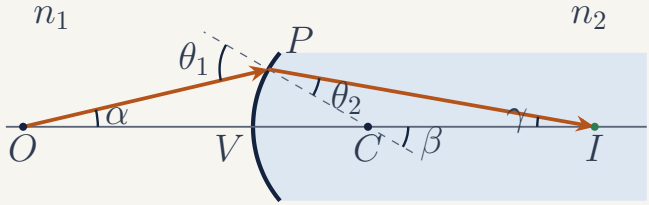
$$s' = -47{,}6\,\text{cm}, \qquad m = 0{,}048$$

O carro parece pequeno e julgamos que está longe. Em troca, o campo de visão é muito maior.

Superfície esférica

A geometria

Dois meios, n_1 e n_2, separados por uma superfície esférica.



CP é a normal em P. Ângulo externo nos triângulos OPC e CPI:

$$\theta_1 = \alpha + \beta, \qquad \beta = \theta_2 + \gamma$$

Superfície esférica

A equação

Lei de Snell para ângulos pequenos, $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$:

$$n_1(\alpha+\beta) = n_2(\beta-\gamma) \;\Rightarrow\; n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2-n_1)\,\beta$$

Com $s = VO$, $s' = VI$, $R = VC$ e h a altura de P: $\alpha \approx h/s$, $\beta \approx h/R$, $\gamma \approx h/s'$

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Superfície esférica

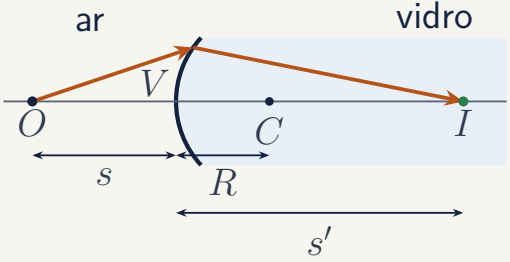
Um exemplo

Ar para vidro, $n = 1{,}5$. $s = 30\,\text{cm}$, $R = 10\,\text{cm}$ (C no vidro).

$$\frac{1}{30} + \frac{1{,}5}{s'} = \frac{0{,}5}{10}$$

$$s' = 90\,\text{cm}$$

$s' > 0$: dentro do vidro.



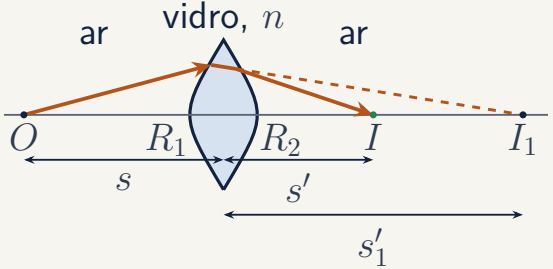
fora de escala

Lente delgada

Duas superfícies

Uma lente: ar $\rightarrow$ vidro (R_1) e vidro $\rightarrow$ ar (R_2). Tratamos uma de cada vez.

Delgada: espessura desprezável; tudo se mede a partir do centro.



Lente delgada

Uma superfície de cada vez

Primeira, ar $\rightarrow$ vidro: O daria uma imagem I_1 a s_1'.

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s_1'} = \frac{n-1}{R_1}$$

Segunda, vidro $\rightarrow$ ar: o objecto é I_1. Fica do lado para onde a luz vai: distância $-s_1'$ (lente fina).

$$-\frac{n}{s_1'} + \frac{1}{s'} = \frac{1-n}{R_2}$$

Lente delgada

A equação do fabricante

Somando as duas equações, o termo n/s_1' desaparece. Fica $1/s + 1/s' = 1/f$, a equação das lentes, igual à dos espelhos, com

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Biconvexa, $n = 1{,}5$, $R_1 = 20\,\text{cm}$, $R_2 = -20\,\text{cm}$:

$$\frac{1}{f} = 0{,}5\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{20} \;\Rightarrow\; f = 20\,\text{cm}$$

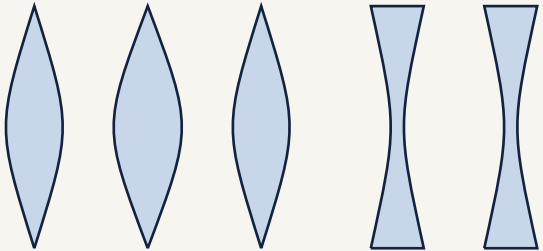
Lente delgada

Convergentes e divergentes

Mais grossa no centro: $1/R_1 - 1/R_2 > 0$, $f > 0$, convergente.

Mais fina no centro: $f < 0$, divergente.

Virar a lente ao contrário não muda f.



Três convergentes e duas divergentes.

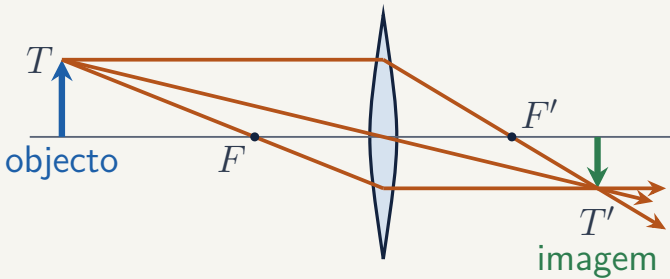
Lente convergente

Que raios usar

Porque é que a mesma lente dá umas vezes uma imagem invertida e outras uma imagem direita?

Como no espelho, raios de caminho conhecido:

- paralelo: sai por F';
- por F: sai paralelo;
- pelo centro: segue (lâmina fina).



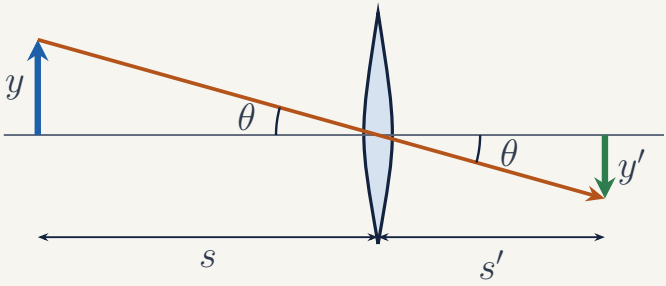
Lente convergente

O aumento

O raio pelo centro não se desvia. Triângulos semelhantes:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Igual ao espelho. s' vem da equação das lentes.

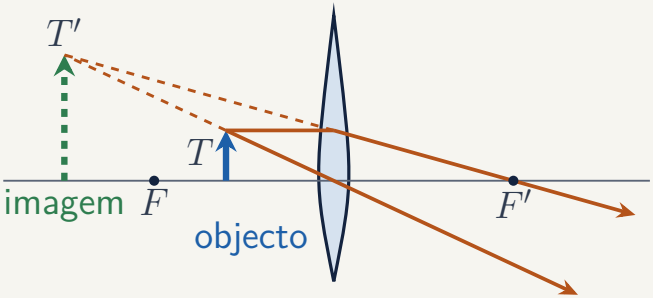


Lente convergente
Objecto dentro do foco

Objecto entre F e a lente.

Os raios saem a afastar-se: não se cruzam do outro lado.

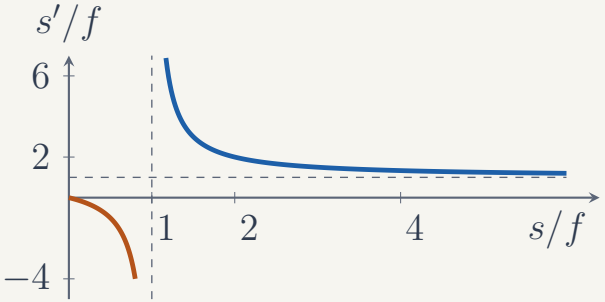
Os prolongamentos cruzam-se em T', do lado do objecto: imagem virtual, direita e maior. É a lupa.



Lente convergente
Onde fica a imagem

Como no espelho,
$s' = sf/(s-f)$:

- $s > f$: $s' > 0$, real (azul);
- $s \to f$: $s' \to \infty$;
- $s < f$: $s' < 0$, virtual (laranja).



RESPOSTA

Invertida ou direita

Porque é que a mesma lente dá umas vezes uma imagem invertida e outras uma imagem direita?

Depende de onde está o objecto em relação ao foco:

- $s > f$: os raios convergem do outro lado. Imagem real e invertida, $m < 0$.
- $s < f$: os raios saem a divergir. Imagem virtual e direita, $m > 0$.

Lente de $f = 10\,\text{cm}$: um objecto a $30\,\text{cm}$ dá $m = -0{,}5$; a $5\,\text{cm}$, $m = +2$.

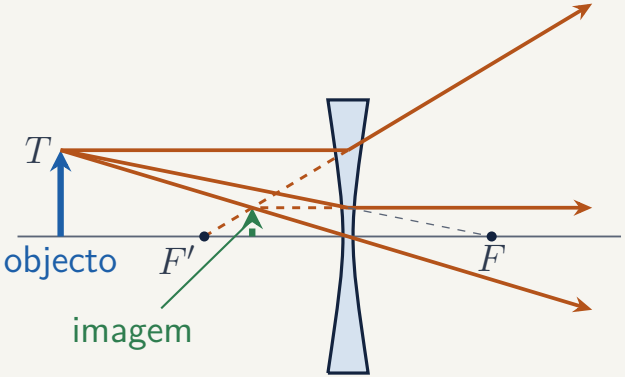
Lente divergente

Que raios usar

F e F' trocam de lado.

- paralelo: sai como se viesse de F';
- pelo centro: segue;
- dirigido a F: sai paralelo.

Imagem virtual, direita e menor.



Potência
A dioptria

O que quer dizer uma lente de +2 dioptrias?

Quanto menor f, mais a lente dobra os raios:

$$P = \frac{1}{f} \qquad (f \text{ em metros; dioptria: } 1\,\mathrm{D} = 1\,\mathrm{m}^{-1})$$

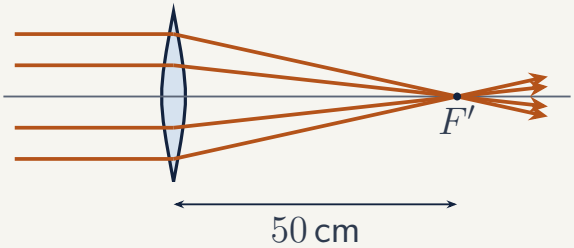
- $f = 25\,\mathrm{cm}$: $P = 4\,\mathrm{D}$, convergente.
- $f = -25\,\mathrm{cm}$: $P = -4\,\mathrm{D}$, divergente.

RESPOSTA

+2 dioptrias

O que quer dizer uma lente de +2 dioptrias?

O sinal + diz que é convergente. $f = 1/P = 0{,}50\,\text{m}$: a luz do Sol junta-se a meio metro da lente.



Os óculos de leitura têm tipicamente de $+1$ a $3\,\text{D}$.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Um espelho côncavo tem $R = 40\,\text{cm}$. Um objecto de $2{,}0\,\text{cm}$ está a $30\,\text{cm}$ do espelho.

(a) Calcule a distância focal.

(b) Onde se forma a imagem? Qual é o aumento?

(c) Descreva a imagem: real ou virtual, direita ou invertida, tamanho.

(d) Repita (b) e (c) com o objecto a $10\,\text{cm}$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $f = R/2 = 20\,\text{cm}$

(b) Da equação dos espelhos:

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60} \;\Rightarrow\; s' = 60\,\text{cm}, \qquad m = -\frac{60}{30} = -2$$

(c) $s' > 0$: real, à frente do espelho. $m = -2$: invertida, com $4{,}0\,\text{cm}$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(d) Objecto a $10\,\text{cm}$, dentro da distância focal:

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{20} \;\Rightarrow\; s' = -20\,\text{cm}$$

$$m = -\frac{-20}{10} = +2$$

Imagem virtual, $20\,\text{cm}$ atrás do espelho, direita, com $4{,}0\,\text{cm}$.

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Quer-se projectar num ecrã a imagem de uma lâmina com uma lente convergente de $f = 10\,\text{cm}$. O ecrã está a $D = 3{,}0\,\text{m}$ da lâmina.

(a) Escreva as duas condições que s e s' têm de satisfazer.

(b) Onde deve ficar a lente?

(c) Qual é o aumento?

(d) Mostre que só há solução se $D \geq 4f$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) $s + s' = D$ e $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{1}{f}$.

(b) Com $s' = D - s$, $D/[s(D-s)] = 1/f$:

$$s^2 - Ds + Df = 0 \;\Rightarrow\; s = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$$

$$s = \frac{3{,}0 - \sqrt{9{,}0 - 1{,}2}}{2} = 0{,}1036\,\text{m}, \qquad s' = 2{,}896\,\text{m}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(c) $m = -s'/s = -2{,}896/0{,}1036 = -28$: a imagem fica 28 vezes maior e invertida. Por isso se põem as lâminas ao contrário.

(d) As raízes são reais se o discriminante não for negativo:

$$D^2 - 4Df \geq 0 \;\Rightarrow\; D \geq 4f$$

Com D maior, há duas posições da lente; com $D = 4f$, uma só, $s = s' = 2f$, $m = -1$.

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Nas cataratas, o cristalino é substituído por uma lente de PMMA ($n = 1{,}49$), biconvexa, $R_1 = -R_2 = 15\,\text{mm}$. À volta: humor aquoso, $n_m = 1{,}336$.

(a) Calcule a potência da lente no ar.

(b) Potência no olho, refazendo a dedução com n_m.

(c) Porque é tão diferente?

(d) Que raio daria $22\,\text{D}$ dentro do olho?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) No ar: $P = (1{,}49 - 1) \times \dfrac{2}{0{,}015\,\text{m}} = 0{,}49 \times 133 = 65\,\text{D}$.

(b) Com n_m dos dois lados, somando as equações das duas superfícies:

$$\frac{n_m}{s} + \frac{n_m}{s'} = (n - n_m)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

A potência é o lado direito: $P = 0{,}154 \times 133 = 20{,}5\,\text{D}$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(c) O que desvia a luz é a diferença de índices: no ar, $0{,}49$; no olho, só $0{,}154$, três vezes menos.

(d) Para $22\,\mathrm{D}$, com $R_1 = -R_2 = R$:

$$22 = 0{,}154 \times \frac{2}{R}$$

$$R = \frac{0{,}308}{22} = 14\,\mathrm{mm}$$