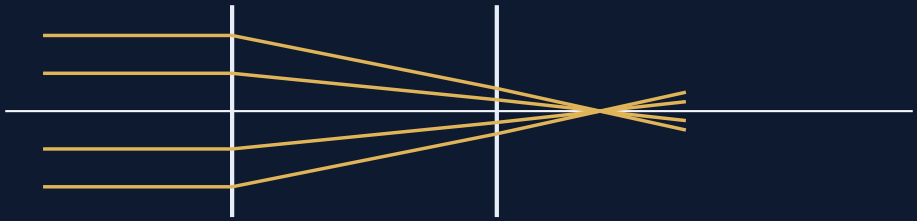
Sistemas ópticos e aberrações

Várias lentes e os limites da óptica paraxial



Três perguntas

- Porque é que fechar o diafragma, ou semicerrar os olhos, torna a imagem mais nítida?
- O que é o astigmatismo?
- Porque é que uma objectiva fotográfica tem várias lentes, e não uma só?

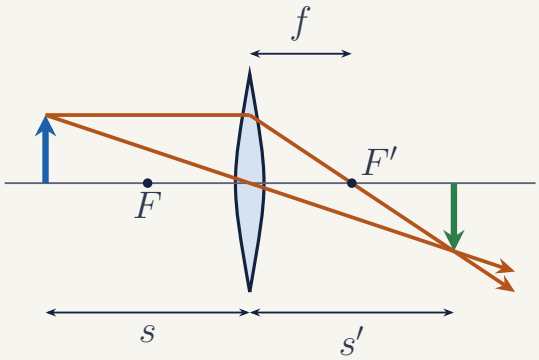
O que vamos precisar

A lente delgada

s, s' e f medem-se a partir da lente: até ao objecto, à imagem e ao foco F'.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

Aumento: $m = -s'/s$.
Potência: $P = 1/f$.



O que vamos precisar

Os sinais

A mesma equação serve para todos os casos se as distâncias tiverem sinal. A luz vai da esquerda para a direita:

	positivo	negativo
s	objecto antes da lente	objecto virtual (depois)
s'	imagem real, depois	imagem virtual, antes
f	convergente	divergente
m	direita	invertida

O que vamos precisar

Índice e cor

Equação do fabricante:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

O índice depende da cor: é maior no azul do que no vermelho. Na tabela, o vidro crown.

linha	λ (nm)	n
F (azul)	486	$1{,}5224$
d (amarelo)	588	$1{,}5168$
C (vermelho)	656	$1{,}5143$

Duas lentes

A regra

A segunda lente só vê os raios que lhe chegam.

- Calcula-se a imagem da primeira lente, s'_1.
- Essa imagem é o objecto da segunda, a $s_2 = d - s'_1$.
- Calcula-se a imagem da segunda, s'_2.

Cada lente aumenta o que recebe:

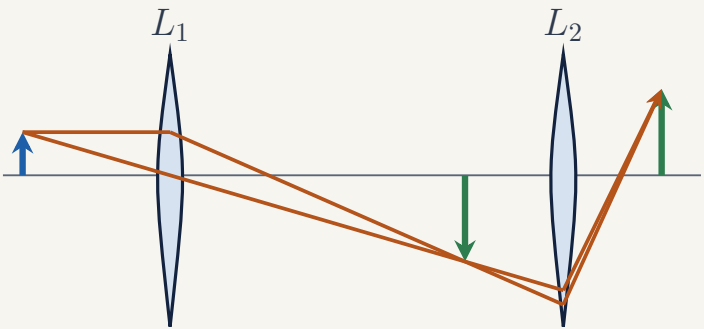
$$m = m_1\, m_2$$

Duas lentes
Um exemplo

$f_1 = 10$, $f_2 = 5$, $d = 40$, objecto a 15 (cm):

- $s_1' = 30$, $m_1 = -2$;
- $s_2 = 40 - 30 = 10$;
- $s_2' = 10$, $m_2 = -1$.

$m = (-2)(-1) = +2$: direita.



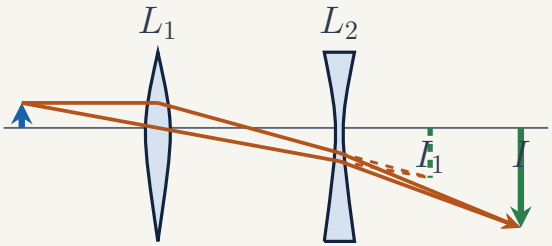
A imagem intermédia serve de objecto à segunda lente.

Duas lentes
Objecto virtual

Se L_2 está antes de I_1, os raios chegam-lhe ainda a convergir para I_1.

Para L_2, I_1 é um objecto do lado de lá: **objecto virtual**, $s_2 = d - s_1' < 0$.

$s_1' = 30$, $d = 20$, $f_2 = -20$: $s_2 = -10$, $s_2' = 20$.



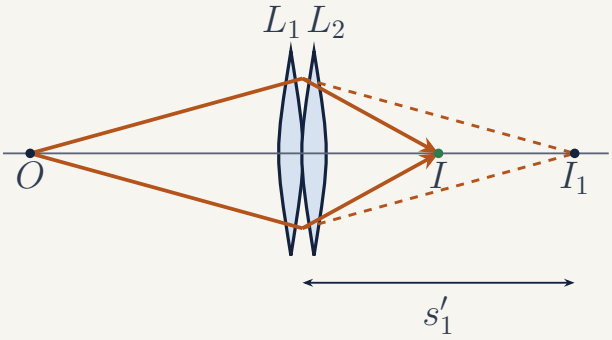
Tracejado: a imagem que L_1 faria sozinha.

Lentes encostadas
A imagem da primeira

Sozinha, L_1 faria a imagem em I_1, a s'_1 (tracejado).

Mas L_2 está encostada: os raios chegam-lhe ainda a convergir para I_1.

Para L_2, I_1 é um objecto virtual: $s_2 = -s'_1$.



Lentes encostadas

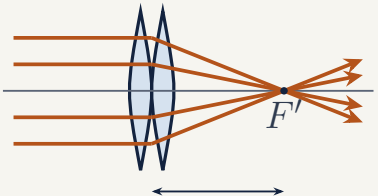
As potências somam

$$L_1: \quad \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1}$$

$$L_2: \quad -\frac{1}{s_1'} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_2}$$

Somando, $1/s_1'$ desaparece:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$



Uma só lente com $P = P_1 + P_2$.

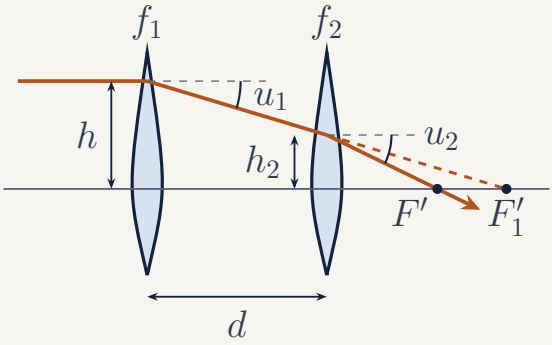
$+5\,\mathrm{D}$ e $-2\,\mathrm{D}$: $+3\,\mathrm{D}$.

Duas lentes separadas

Seguir um raio

h: altura do raio na lente; u: ângulo com o eixo ($u < 0$ a descer). Uma lente muda u de $-h/f$; assim o paralelo vai ao foco.

- Depois de L_1: $u_1 = -h/f_1$.
- Em L_2: $h_2 = h + d\,u_1$.
- Depois de L_2: $u_2 = u_1 - h_2/f_2$.



Duas lentes separadas

A potência equivalente

Juntando os três passos:

$$u_2 = -h\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}\right)$$

O sistema dobra o raio como uma só lente, $u_2 = -h/f$:

$$P = P_1 + P_2 - d\,P_1 P_2$$

Duas lentes de $10\,\mathrm{D}$ a $5\,\mathrm{cm}$: $P = 20 - 0{,}05 \times 100 = 15\,\mathrm{D}$.

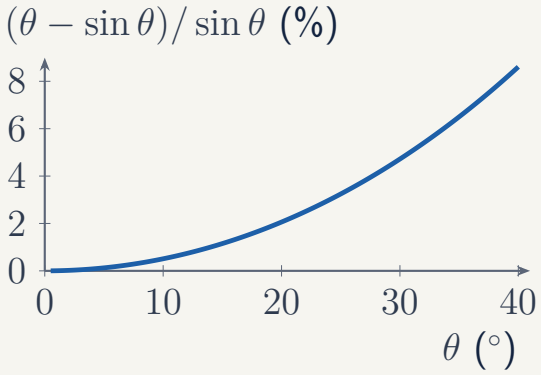
Aberrações

Quando a aproximação paraxial falha

Tudo o que vimos usa $\sin\theta \approx \theta$: raios perto do eixo e pouco inclinados.

A $10°$, o erro é $0{,}5\,\%$; a $30°$, $4{,}7\,\%$.

Os raios inclinados ou longe do eixo não vão ter à imagem paraxial: são as **aberrações**.



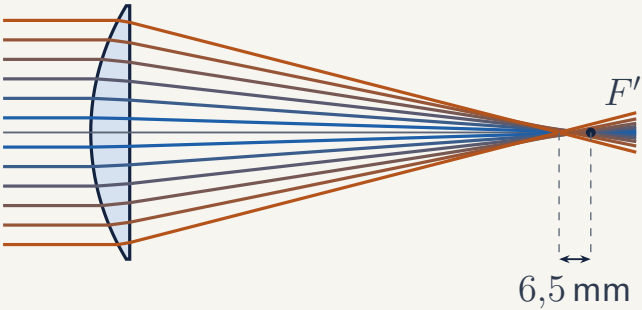
Aberração esférica

Os raios afastados do eixo

Porque é que fechar o diafragma, ou semicerrar os olhos, torna a imagem mais nítida?

Plano-convexa, $R = 50\,\text{mm}$, $n = 1{,}5$, lei de Snell exacta.

Os raios afastados do eixo (laranja) cruzam-no antes de F': não há um foco único.

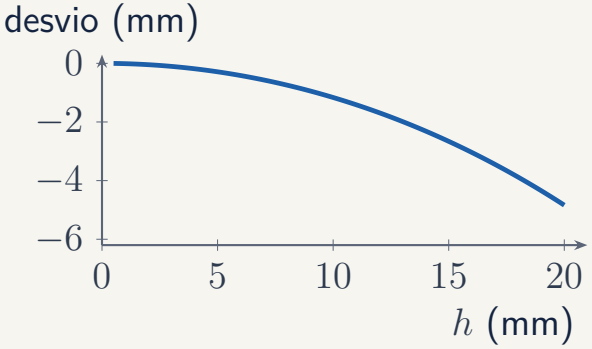


Aberração esférica

Quanto cresce

Um raio à altura h cruza o eixo antes do foco paraxial, a uma distância $\propto h^2$: a $20\,\text{mm}$ do eixo, $5\,\text{mm}$ antes.

No plano do foco paraxial passa a uma altura $\propto h^2 \times h$: a mancha cresce como h^3.



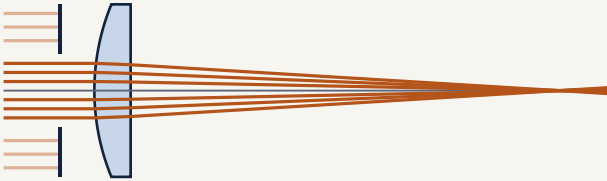
RESPOSTA

O diafragma

Porque é que fechar o diafragma, ou semicerrar os olhos, torna a imagem mais nítida?

O diafragma só deixa passar os raios perto do eixo, que cumprem a óptica paraxial.

A mancha cresce como h^3: com metade da abertura, fica 8 vezes menor. Em troca, entra menos luz.



Aberração cromática

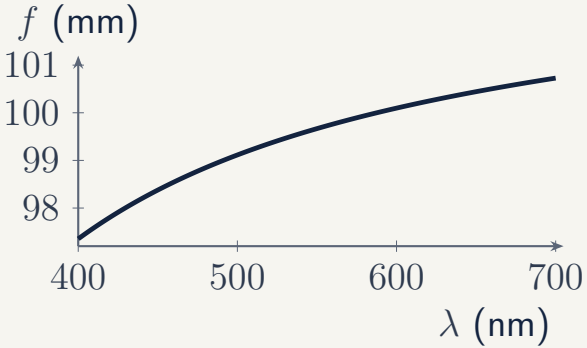
Um foco por cor

Pela equação do fabricante, $1/f \propto n - 1$: f depende de λ.

Crown, $f = 100\,\text{mm}$ no amarelo:

- azul: $98{,}9\,\text{mm}$;
- vermelho: $100{,}5\,\text{mm}$.

Com o amarelo focado, o azul e o vermelho deixam orlas coloridas nos contornos.



Aberrações
Numa fotografia



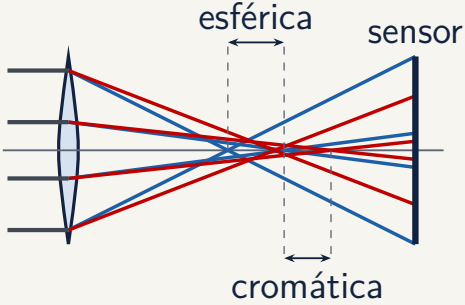
O disco vem do desfoque.

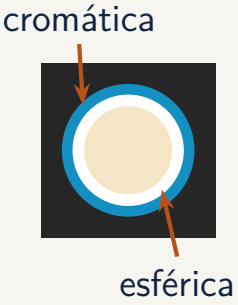
A orla brilhante vem da aberração esférica: os raios das bordas focam mais cedo e juntam-se aí.

A orla colorida vem da aberração cromática.

Aberrações
As duas juntas

Luz branca: cada cor tem o seu foco (cromática); em cada cor, as bordas focam antes do centro (esférica). À direita, o disco no sensor.





Outras aberrações

Fora do eixo

Mesmo com uma só cor e sem aberração esférica, um ponto fora do eixo não dá um ponto.

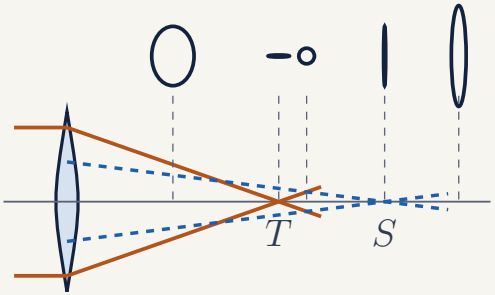
O feixe chega inclinado à lente: os raios de cima, de baixo e dos lados não encontram a mesma lente.

Vemos dois desses efeitos: o astigmatismo e a distorção.

Outras aberrações
O astigmatismo

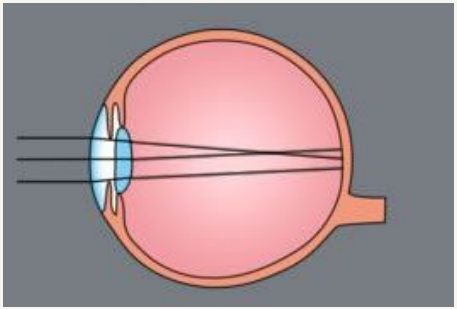
O que é o astigmatismo?

Os raios de um plano (laranja) focam em T, os do plano perpendicular (azul) em S. Em cima, a secção do feixe: um traço em T, outro em S.



Outras aberrações
O astigmatismo no olho

A córnea curva mais numa direcção do que na outra, como uma colher: há dois focos, mesmo no eixo. Corrige-se com lentes cilíndricas.





linhas vistas pelo olho

RESPOSTA

O astigmatismo

O que é o astigmatismo?

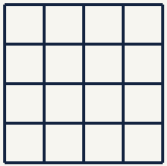
É ter potências diferentes em direcções diferentes. Em vez de um foco, há dois, T e S.

- Numa lente esférica, só para pontos fora do eixo.
- No olho, em todo o campo, por causa da córnea.

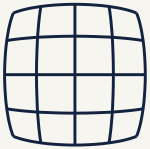
Outras aberrações
A distorção

Porque é que uma objectiva fotográfica tem várias lentes, e não uma só?

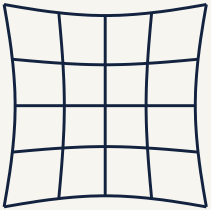
Uma grelha quadrada, fotografada. Se o aumento diminui para fora do eixo, a grelha incha (barril); se aumenta, encolhe nos lados (almofada).



sem



barril



almofada

RESPOSTA

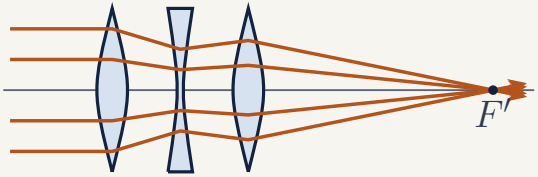
Porquê várias lentes

Porque é que uma objectiva fotográfica tem várias lentes, e não uma só?

Uma lente sozinha tem todas as aberrações.

Com vidros e formas diferentes, as aberrações de umas compensam as das outras.

Mudando as distâncias d, muda-se P: é o zoom.



Três lentes: convergente, divergente, convergente.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Duas lentes convergentes, $f_1 = 20\,\text{cm}$ e $f_2 = 10\,\text{cm}$, estão a $d = 50\,\text{cm}$ uma da outra. Um objecto está $60\,\text{cm}$ à frente da primeira.

(a) Onde forma a primeira lente a imagem? Qual é m_1?

(b) Onde fica a imagem final? Qual é m_2?

(c) Qual é o aumento total? A imagem é direita?

(d) Repita com o objecto a $30\,\text{cm}$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $\dfrac{1}{s_1'} = \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{60} = \dfrac{1}{30}$: $s_1' = 30\,\text{cm}$, $m_1 = -30/60 = -0{,}5$.

(b) A imagem intermédia está a $s_2 = 50 - 30 = 20\,\text{cm}$ da segunda lente:

$$\frac{1}{s_2'} = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20} \Rightarrow s_2' = 20\,\text{cm}, \qquad m_2 = -1$$

(c) $m = (-0{,}5)(-1) = +0{,}5$: real, direita, metade do tamanho.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(d) $s_1' = 1/(1/20 - 1/30) = 60\,\text{cm}$, $m_1 = -2$. A imagem ficaria depois da segunda lente:

$$s_2 = 50 - 60 = -10\,\text{cm} \quad \text{(objecto virtual)}$$

$$\frac{1}{s_2'} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \;\Rightarrow\; s_2' = 5\,\text{cm}, \qquad m_2 = -\frac{5}{-10} = 0{,}5$$

Aumento total: $m = m_1 m_2 = (-2)(0{,}5) = -1$.

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Uma lente biconvexa simétrica de vidro crown (tabela do início) tem $R_1 = 10\,\text{cm}$ e $R_2 = -10\,\text{cm}$.

(a) Calcule a distância focal no amarelo.

(b) E no azul e no vermelho?

(c) Com o amarelo focado, a que distância focam as outras cores?

(d) Com abertura de $20\,\text{mm}$, a mancha da aberração esférica é $0{,}8\,\text{mm}$. E com o diafragma a $10\,\text{mm}$?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) Equação do fabricante, com $1/R_1 - 1/R_2 = 0{,}2\,\text{cm}^{-1}$:

$$\frac{1}{f} = 0{,}5168 \times 0{,}2 \;\Rightarrow\; f = 96{,}7\,\text{mm}$$

(b) Azul, $n = 1{,}5224$: $f = 95{,}7\,\text{mm}$. Vermelho, $n = 1{,}5143$: $f = 97{,}2\,\text{mm}$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(c) O azul foca $1{,}0\,\text{mm}$ antes do amarelo e o vermelho $0{,}5\,\text{mm}$ depois: $1{,}5\,\text{mm}$ entre os dois extremos.

(d) A mancha cresce como h^3. Com metade da abertura:

$$0{,}8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}1\,\text{mm}$$

Em troca, entra um quarto da luz.

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

A córnea tem cerca de $43\,\mathrm{D}$ e o cristalino $19\,\mathrm{D}$, a $5{,}7\,\mathrm{mm}$ um do outro, em humor aquoso ($n = 1{,}336$). Num meio de índice n, a fórmula usa d/n: $P = P_1 + P_2 - (d/n)P_1P_2$.

(a) Calcule a potência total do olho.

(b) Potência com as duas lentes encostadas.

(c) Sem o cristalino, que potência fica?

(d) Lente intra-ocular a $6{,}7\,\mathrm{mm}$ da córnea que repõe (a).

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) $d/n = 0{,}0057/1{,}336 = 0{,}004\,27$ m:

$$P = 43 + 19 - 0{,}004\,27 \times 43 \times 19 = 62 - 3{,}5 = 58{,}5\,\text{D}$$

(b) Encostadas: $P = 43 + 19 = 62$ D. A separação tira $3{,}5$ D.

(c) Só a córnea: 43 D. Faltam $15{,}5$ D: o olho fica muito hipermétrope.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(d) Com $d/n = 0{,}0067/1{,}336 = 0{,}005\,01$:

$$58{,}5 = 43 + P_2 - 0{,}005\,01 \times 43\, P_2 = 43 + 0{,}784\, P_2$$

$$P_2 = \frac{15{,}5}{0{,}784} = 19{,}8\,\mathrm{D}$$

Um milímetro mais atrás obriga a uma lente mais forte: a posição conta tanto como a potência.