Oscilações e Ondas

Aulas 14–21: exercícios — resoluções

Âmbito. Intensidade sonora e potência; escala em decibel, fontes e efeito Doppler; ultrassons; cavidades e modos acústicos; natureza da luz; princípios de Fermat e de Huygens; reflexão e refracção; espelhos e lentes.

Convenções. Use unidades SI e apresente os resultados numéricos com três algarismos significativos, sem arredondamentos intermédios. Os dados são nominais. No ar, $v = 343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e $Z = 413\,\mathrm{Rayl}$, salvo indicação em contrário; nos tecidos moles, $v = 1540\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. p_{ef} é a pressão eficaz, $I = p_{\mathrm{ef}}^2/Z$, e os níveis usam $I_0 = 1\times10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ e $P_0 = 1\times10^{-12}\,\mathrm{W}$. Tome $c = 3{,}00\times10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; os ângulos medem-se a partir da normal à superfície. Para espelhos e lentes delgadas, $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=\dfrac{1}{f}$ e $m=-\dfrac{s'}{s}$; $s'>0$ indica uma imagem real e $s'<0$ uma imagem virtual. Num espelho esférico, $f = R/2$, positiva para o côncavo. Na equação do fabricante, $\dfrac{1}{f}=(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$, com $R>0$ quando o centro de curvatura está do lado de onde sai a luz.

Exercício 1 — Ultrassom terapêutico

Uma sonda de fisioterapia emite ultrassons de 1,00 MHz com intensidade de $1{,}00\,\mathrm{W\,cm^{-2}}$ num tecido com $Z = 1{,}63\times10^{6}\,\mathrm{Rayl}$. A face da sonda tem $5{,}00\,\mathrm{cm^2}$.

a) Calcule a amplitude e o valor eficaz da pressão acústica no tecido.

b) Calcule a amplitude da velocidade das partículas e a do seu deslocamento.

c) Que potência emite a sonda? Que energia acústica emite numa sessão de 5,00 min? Porque aquece o tecido?

Resolução.

a) $I = 1{,}00\times10^{4}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Com $I = p_m^2/(2Z)$: $p_m = \sqrt{2ZI} = \sqrt{2\times1{,}63\times10^{6}\times1\times10^{4}} = 1{,}81\times10^{5}\,\mathrm{Pa}$, quase duas atmosferas; $p_{\mathrm{ef}} = p_m/\sqrt{2} = 1{,}28\times10^{5}\,\mathrm{Pa}$.

b) $u_m = p_m/Z = 0{,}111\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Deslocamento: $u_m/\omega = 0{,}111/(2\pi\times1\times10^{6}) = 1{,}76\times10^{-8}\,\mathrm{m} = 17{,}6\,\mathrm{nm}$.

c) $P = IA = 1\times10^{4}\times5\times10^{-4} = 5{,}00\,\mathrm{W}$; em 300 s, $E = 1{,}50\times10^{3}\,\mathrm{J}$ de energia acústica. A parte absorvida ao longo do caminho (a atenuação) transforma-se em calor; o resto é espalhado ou atravessa o tecido.

Exercício 2 — Dois altifalantes

Dois pequenos altifalantes, A e B, a 3,00 m um do outro, emitem em fase o mesmo tom, cada um com 0,100 W, igualmente em todas as direcções. Um ouvinte está a 4,00 m de A, sobre a perpendicular à linha AB que passa por A.

a) Calcule a intensidade de cada altifalante no ponto do ouvinte, sozinho.

b) A 343 Hz, que intensidade total ouve? E a 171,5 Hz? Use $I = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B}\cos\Delta\phi$.

c) Se os dois emitissem ruído, sem relação de fase entre si, que intensidade ouviria? Quantos decibéis separam o máximo do mínimo da alínea anterior?

Resolução.

a) $r_A = 4{,}00\,\mathrm{m}$, $r_B = \sqrt{4^2+3^2} = 5{,}00\,\mathrm{m}$. $I_A = 0{,}100/(4\pi \times 16) = 4{,}97 \times 10^{-4}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$; $I_B = 0{,}100/(4\pi \times 25) = 3{,}18 \times 10^{-4}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

b) $\Delta r = 1{,}00\,\mathrm{m}$. A 343 Hz, $\lambda = 1{,}00\,\mathrm{m}$ e $\Delta\phi = 2\pi$: construtiva, $I = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} = 1{,}61 \times 10^{-3}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. A 171,5 Hz, $\lambda = 2{,}00\,\mathrm{m}$ e $\Delta\phi = \pi$: destrutiva, $I = 1{,}99 \times 10^{-5}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Não se anula porque as amplitudes são diferentes.

c) Fontes incoerentes: as intensidades somam-se, $I = I_A + I_B = 8{,}16 \times 10^{-4}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Entre o máximo e o mínimo: $10\log_{10}(1{,}61 \times 10^{-3}/1{,}99 \times 10^{-5}) = 19{,}1\,\mathrm{dB}$.

Exercício 3 — Uma motosserra

Uma motosserra tem nível de potência sonora $L_W = 110\,\mathrm{dB}$. Considere-a uma fonte pontual, em campo livre, que emite igualmente em todas as direcções.

a) Calcule o nível de intensidade a 5,00 m. Qual é aí a pressão eficaz?

b) A que distância o nível desce para 70 dB?

c) Junta-se uma segunda motosserra igual, à mesma distância. Qual é o nível a 5,00 m? E se a segunda produzisse aí 5 dB menos do que a primeira?

Resolução.

a) $L_I = L_W - 10\log_{10} 4\pi - 20\log_{10} r = 110 - 11{,}0 - 14{,}0 = 85{,}0\,\mathrm{dB}$. Directamente, com $P = P_0\,10^{11} = 0{,}100\,\mathrm{W}$: $I = P/(4\pi r^2) = 3{,}18 \times 10^{-4}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$; $p_{\mathrm{ef}} = \sqrt{IZ} = 0{,}363\,\mathrm{Pa}$.

b) $20\log_{10} r = 110 - 11{,}0 - 70 = 29{,}0$: $r = 28{,}2\,\mathrm{m}$.

c) Duas iguais, incoerentes: $L = 85 + 10\log_{10} 2 = 88{,}0\,\mathrm{dB}$. Com 85 e 80 dB: $L = 10\log_{10}(10^{8{,}5} + 10^{8{,}0}) = 86{,}2\,\mathrm{dB}$; a mais fraca acrescenta pouco mais de 1 dB.

Exercício 4 — Uma ambulância e um avião

Uma ambulância com sirene de 700 Hz anda a $25{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

a) Que frequência ouve um peão parado quando a ambulância se aproxima? E quando se afasta?

b) Um ciclista vai a $8{,}00\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ao encontro da ambulância, que se aproxima dele. Que frequência ouve?

c) Um avião voa a Mach 1,50, a 8,00 km de altitude. Qual é o semiângulo do cone de Mach? Quanto tempo depois de o avião passar na vertical de um observador é que este ouve o estrondo? (Tome $v = 343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ em toda a altura.)

Resolução.

a) $f' = f\,v/(v - v_s) = 700 \times 343/318 = 755\,\text{Hz}$; a afastar-se, $f' = 700 \times 343/368 = 652\,\text{Hz}$.

b) $f' = f\,(v + v_o)/(v - v_s) = 700 \times 351/318 = 773\,\text{Hz}$.

c) $\sin\theta = 1/M = 0{,}667$: $\theta = 41{,}8°$. O cone atinge o observador quando o avião já percorreu $h/\tan\theta = 8{,}94\,\text{km}$ para lá da vertical: $t = 8944/(1{,}5 \times 343) = 17{,}4\,\text{s}$.

Exercício 5 — Ecos no músculo e no osso

Numa ecografia a 5,00 MHz, o feixe atravessa músculo ($Z = 1{,}70 \times 10^6$ Rayl) e encontra osso ($Z = 7{,}80 \times 10^6$ Rayl) a 3,00 cm de profundidade. A pele tem $Z = 1{,}63 \times 10^6$ Rayl. A atenuação é 0,5 dB por centímetro e por megahertz. Use $R = \big((Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)\big)^2$.

a) Que fracção da intensidade se reflecte na fronteira músculo–osso, e que fracção passa?

b) Sem gel, entre a sonda e a pele fica uma camada de ar. Que fracção se reflecte na fronteira ar–pele? Para que serve o gel?

c) Quanto tempo demora o eco do osso? Quantos decibéis perde, contando a atenuação na ida e na volta e a reflexão?

Resolução.

a) $R = \big((7{,}80 - 1{,}70)/9{,}50\big)^2 = 0{,}412$; passa $T = 0{,}588$. O osso reflecte muito: por trás dele fica uma sombra.

b) $R = \big((1{,}63 \times 10^6 - 413)/(1{,}63 \times 10^6 + 413)\big)^2 = 0{,}999$: só cerca de 0,1 % entra na pele. O gel tem impedância próxima da da pele e elimina o ar.

c) $t = 2z/v = 0{,}0600/1540 = 39{,}0\,\mu\text{s}$. Atenuação: $0{,}5 \times 5 \times 6 = 15{,}0\,\text{dB}$; reflexão: $10\log_{10} 0{,}412 = -3{,}85\,\text{dB}$. Total: 18,8 dB.

Exercício 6 — Uma sonda abdominal

Uma sonda abdominal funciona a 3,50 MHz, com impulsos de 3 ciclos. A placa piezoeléctrica é de PZT, com $c_c = 4000\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

a) Que espessura deve ter a placa para vibrar em ressonância à frequência de trabalho?

b) Calcule o comprimento de onda nos tecidos e a resolução axial.

c) Para ver até 20,0 cm de profundidade, quanto tempo demora cada linha? Com 192 linhas por imagem, quantas imagens por segundo se obtêm? Porque não se pode ver mais fundo com a mesma cadência?

Resolução.

a) $d = \lambda_c/2 = c_c/(2f) = 4000/(2 \times 3{,}5 \times 10^6) = 0{,}571\,\text{mm}$.

b) $\lambda = 1540/3{,}5 \times 10^6 = 0{,}440\,\text{mm}$; $\Delta z_{\min} = n\lambda/2 = 3 \times 0{,}440/2 = 0{,}660\,\text{mm}$.

c) Cada linha espera o eco mais fundo: $t = 2z/v = 260\,\mu\text{s}$. Imagem: $192 \times 260\,\mu\text{s} = 49{,}9\,\text{ms}$, cerca de 20 imagens por segundo. Ver mais fundo obriga a esperar mais por cada linha: menos imagens por segundo.

Exercício 7 — Uma flauta e um clarinete

Uma flauta e um clarinete têm ambos um tubo de ar com 60,0 cm. A flauta comporta-se como um tubo aberto nas duas pontas; o clarinete, como um tubo fechado numa ponta (a palheta) e aberto na outra.

a) Calcule as três primeiras frequências próprias da flauta.

b) Calcule as três primeiras frequências próprias do clarinete. Que harmónicas faltam, e que efeito tem isso no timbre?

c) O tubo da flauta tem 0,95 cm de raio. Com a correcção de extremidade $L_{\text{ef}} = L + 0{,}6\,a$ por cada ponta aberta, qual é a fundamental corrigida?

Resolução.

a) $f_n = nv/(2L)$: 286 Hz, 572 Hz e 858 Hz.

b) $f = (2m-1)v/(4L)$: 143 Hz, 429 Hz e 715 Hz. No modelo de tubo fechado–aberto só há harmónicas ímpares; faltam as pares (num clarinete real estão muito enfraquecidas), o que dá ao clarinete um som mais escuro. Com o mesmo comprimento, soa uma oitava abaixo da flauta.

c) $L_{\text{ef}} = 0{,}600 + 2 \times 0{,}6 \times 0{,}0095 = 0{,}611$ m: $f_1 = 343/(2 \times 0{,}611) = 281$ Hz, 2 % abaixo.

Exercício 8 — Ressonância num tubo com água

Um diapasão de 512 Hz vibra sobre a boca de um tubo vertical, fechado em baixo por uma coluna de água cujo nível se pode mudar. Ouve-se ressonância com o nível da água a 16,0 cm e a 49,5 cm abaixo da boca do tubo.

a) Que tipo de tubo é este? A partir das duas posições, determine o comprimento de onda e a velocidade do som.

b) Porque é que a primeira posição não é exactamente $\lambda/4$? Com $L_{\text{ef}} = L + 0{,}6\,a$, estime o raio do tubo.

c) Onde está a ressonância seguinte? Com $v = 331\,\text{m s}^{-1} \times \sqrt{T/273\,\text{K}}$, qual é a temperatura do ar?

Resolução.

a) Fechado em baixo e aberto em cima. Ressonâncias consecutivas distam $\lambda/2$: $\lambda = 2 \times (49{,}5 - 16{,}0) = 67{,}0$ cm; $v = f\lambda = 343\,\text{m s}^{-1}$.

b) O nó de pressão da ponta aberta fica um pouco acima da boca do tubo: o comprimento efectivo é maior. $\lambda/4 = 16{,}75\,\text{cm} = L_1 + 0{,}6\,a$: $0{,}6\,a = 0{,}75$ cm, $a = 1{,}25$ cm.

c) $L_3 = L_2 + \lambda/2 = 83{,}0$ cm. $T = 273 \times (343/331)^2 = 293$ K, cerca de 20 °C.

Exercício 9 — Um laser num bloco de vidro

Um laser de hélio-néon emite luz com comprimento de onda $\lambda_0 = 633$ nm no vácuo. O feixe atravessa, perpendicularmente às faces, um bloco de vidro com $n = 1{,}52$ e 10,0 cm de espessura.

a) Calcule a frequência da luz, a velocidade no vidro e o comprimento de onda no vidro. Que grandeza não muda ao passar do ar para o vidro, e porquê?

b) Com a velocidade c/n, quanto tempo demora a luz a atravessar o bloco? Qual é o atraso em relação ao mesmo percurso no vácuo?

c) Quantos comprimentos de onda cabem no bloco? Para luz verde ($\lambda_0 = 532\,\text{nm}$) o índice é ligeiramente maior, 1,53. Calcule a velocidade e o comprimento de onda da luz verde no vidro. Qual das duas cores se desvia mais ao entrar obliquamente no vidro?

Resolução.

a) $f = c/\lambda_0 = 3{,}00 \times 10^8/633 \times 10^{-9} = 4{,}74 \times 10^{14}\,\text{Hz}$. $v = c/n = 1{,}97 \times 10^8\,\text{m s}^{-1}$, $\lambda = \lambda_0/n = 416\,\text{nm}$. A frequência não muda: é imposta pela fonte, e os dois lados da superfície oscilam ao mesmo ritmo.

b) $t = nL/c = 1{,}52 \times 0{,}100/3{,}00 \times 10^8 = 507\,\text{ps}$. No vácuo, 333 ps: o atraso é $(n-1)L/c = 173\,\text{ps}$.

c) $L/\lambda = 0{,}100/416 \times 10^{-9} = 2{,}40 \times 10^5$. Verde: $v = c/1{,}53 = 1{,}96 \times 10^8\,\text{m s}^{-1}$, $\lambda = 532/1{,}53 = 348\,\text{nm}$. Com n maior, a luz verde aproxima-se mais da normal: desvia-se mais. É a dispersão, que separa as cores num prisma.

Exercício 10 — O nadador-salvador

Um nadador-salvador está na areia, a 20,0 m da linha de água. Um banhista está na água, a 10,0 m da linha de água e a 30,0 m do nadador-salvador, medidos ao longo da praia. Na areia corre a $6{,}00\,\text{m s}^{-1}$ e na água nada a $1{,}50\,\text{m s}^{-1}$.

a) Calcule o tempo para chegar ao banhista em linha recta e o tempo se entrar na água em frente ao banhista.

b) Seja x a distância, ao longo da praia, do ponto onde entra na água. Escreva o tempo total $t(x)$ e mostre que o mínimo satisfaz $\sin\theta_1/v_1 = \sin\theta_2/v_2$, com os ângulos medidos a partir da normal à linha de água.

c) Determine numericamente x e o tempo mínimo. Qual é a relação com a lei de Snell e com o princípio de Fermat?

Resolução.

a) Em linha recta: o percurso total é $\sqrt{30^2+30^2} = 42{,}4\,\text{m}$, dos quais dois terços na areia: $28{,}3/6 + 14{,}1/1{,}5 = 14{,}1\,\text{s}$. Em frente ao banhista: $\sqrt{20^2+30^2}/6 + 10/1{,}5 = 6{,}01 + 6{,}67 = 12{,}7\,\text{s}$.

b) $t(x) = \dfrac{\sqrt{20^2+x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{10^2+(30-x)^2}}{v_2}$. $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{v_1\sqrt{20^2+x^2}} - \dfrac{30-x}{v_2\sqrt{10^2+(30-x)^2}} = 0$, e as duas fracções são $\sin\theta_1/v_1$ e $\sin\theta_2/v_2$.

c) Resolvendo numericamente, $x = 27{,}9\,\text{m}$ e $t_{\min} = 12{,}5\,\text{s}$. É o princípio de Fermat: o tempo de percurso é estacionário (aqui, mínimo). Com $v = c/n$, a condição fica $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$, a lei de Snell.

Exercício 11 — A refracção pelo princípio de Huygens

Uma onda plana de luz com $\lambda_0 = 600\,\text{nm}$ passa do ar para a água ($n = 1{,}33$), com as frentes de onda a fazer 40,0° com a superfície.

a) Qual é o ângulo de incidência? Calcule a distância, medida ao longo da superfície, entre duas cristas consecutivas.

b) Usando a construção de Huygens, explique por que razão essa distância é a mesma nos dois meios. Calcule o comprimento de onda na água e o ângulo de refracção.

c) Verifique o resultado com a lei de Snell. Se a luz viesse da água para o ar com o mesmo ângulo de incidência, o que mudaria?

Resolução.

a) O ângulo entre as frentes e a superfície é igual ao ângulo entre o raio e a normal: $40{,}0°$. Distância entre cristas ao longo da superfície: $\lambda_0/\sin\theta_1 = 600/0{,}643 = 933\,\text{nm}$.

b) Cada crista que toca a superfície continua como crista do outro lado: as ondas secundárias partem dos mesmos pontos ao mesmo tempo. Na água, $\lambda = 600/1{,}33 = 451\,\text{nm}$ e $\sin\theta_2 = \lambda/933 = 0{,}483$: $\theta_2 = 28{,}9°$.

c) $\sin\theta_2 = \sin 40°/1{,}33 = 0{,}483$. Da água para o ar, $\sin\theta_2 = 1{,}33 \times 0{,}643 = 0{,}855$, $\theta_2 = 58{,}8°$: o raio afasta-se da normal. Acima de $\arcsin(1/1{,}33) = 48{,}8°$ não haveria raio transmitido.

Exercício 12 — Uma piscina e uma lâmina de vidro

Uma piscina tem 2,00 m de profundidade e água com $n = \frac{4}{3}$.

a) Vista de cima, na vertical, a que profundidade parece estar o fundo?

b) Um raio incide a $45{,}0°$ numa lâmina de vidro com $n = 1{,}50$ e 1,00 cm de espessura, no ar. Calcule o ângulo de refracção, mostre que o raio sai paralelo ao incidente e calcule o deslocamento lateral $t\sin(\theta_1 - \theta_2)/\cos\theta_2$.

c) Um mergulhador no fundo da piscina olha para cima. Mostre que vê o céu inteiro dentro de um cone e calcule o raio do círculo que esse cone define na superfície. O que vê fora desse círculo?

Resolução.

a) Para raios quase verticais, $\tan\theta \approx \sin\theta$ e a profundidade aparente é $h/n = 1{,}50\,\text{m}$.

b) $\sin\theta_2 = \sin 45°/1{,}5 = 0{,}471$, $\theta_2 = 28{,}1°$. Na segunda face, Snell aplica-se ao contrário e o raio sai a $45{,}0°$: paralelo. Deslocamento: $1{,}00 \times \sin 16{,}9°/\cos 28{,}1° = 3{,}29\,\text{mm}$.

c) Os raios que vêm de todo o hemisfério do céu (θ_1 até $90°$) entram na água com $\theta_2 \le \theta_c = \arcsin\frac{3}{4} = 48{,}6°$. Raio do círculo: $h\tan\theta_c = 2{,}27\,\text{m}$. Fora dele, o mergulhador vê a luz do fundo reflectida na superfície (reflexão interna total).

Exercício 13 — Uma fibra óptica de telecomunicações

Uma fibra óptica tem um núcleo com $n_1 = 1{,}50$ e uma bainha com $n_2 = 1{,}47$. A luz entra a partir do ar pela face da extremidade, perpendicular ao eixo. A fibra tem 2,00 km.

a) Calcule o ângulo crítico na superfície núcleo–bainha. Por que razão não há ângulo crítico para a luz que vai da bainha para o núcleo?

b) Mostre que o maior ângulo de entrada para o qual a luz fica presa no núcleo satisfaz $\sin\theta_0 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ (abertura numérica) e calcule θ_0.

c) Calcule o tempo de percurso de um raio ao longo do eixo e de um raio no limite da alínea

anterior. Qual é a diferença? Que taxa máxima de impulsos, aproximadamente, permite esta fibra?

Resolução.

a) $\sin\theta_c = n_2/n_1 = 0{,}980$, $\theta_c = 78{,}5°$. Da bainha para o núcleo, a luz passa para um índice maior: aproxima-se da normal e o raio refractado existe sempre.

b) No limite, o raio faz com o eixo $\theta_r = 90° - \theta_c$, com $\sin\theta_r = \cos\theta_c = \sqrt{1 - n_2^2/n_1^2}$. Na entrada, $\sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_r = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0{,}298$: $\theta_0 = 17{,}4°$.

c) Pelo eixo, $t_1 = n_1 L/c = 10{,}0\,\mu\text{s}$. O raio limite percorre $L/\cos\theta_r = L\,n_1/n_2$: $t_2 = t_1\,n_1/n_2 = 10{,}2\,\mu\text{s}$. $\Delta t = 204\,\text{ns}$. Impulsos separados por menos do que isto sobrepõem-se: no máximo cerca de $1/\Delta t \approx 5 \times 10^6$ impulsos por segundo. É uma estimativa ideal, que só conta com a diferença entre percursos.

Exercício 14 — Um espelho côncavo

Um espelho côncavo tem raio de curvatura $R = 60{,}0\,\text{cm}$. Um objecto com 2,00 cm de altura é colocado sobre o eixo.

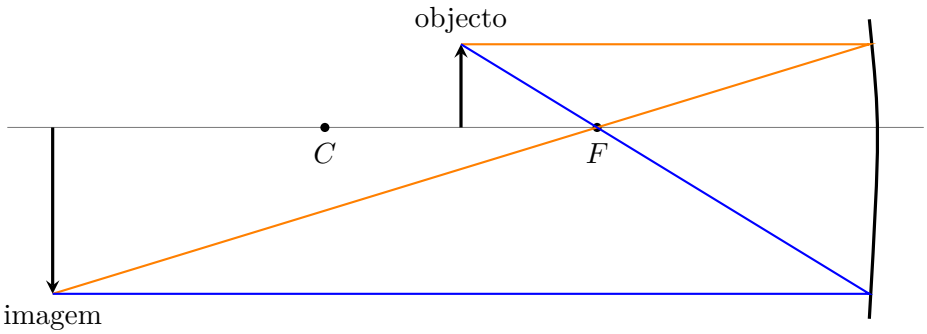
a) Com o objecto a 45,0 cm do espelho, determine a posição, a altura e a natureza da imagem. Confirme com um diagrama de dois raios.

b) Repita com o objecto a 20,0 cm. Que acontece com o objecto exactamente no foco?

c) Onde se deve colocar o objecto para obter uma imagem direita duas vezes maior? E uma imagem invertida do mesmo tamanho?

Resolução.

a) $f = 30{,}0\,\text{cm}$. $1/s' = 1/30 - 1/45 = 1/90$: $s' = 90{,}0\,\text{cm}$, $m = -2$, altura $-4{,}00\,\text{cm}$: real, invertida, maior, em frente ao espelho. Laranja: o raio paralelo ao eixo reflecte-se pelo foco. Azul: o raio que passa pelo foco reflecte-se paralelo ao eixo.



b) $1/s' = 1/30 - 1/20 = -1/60$: $s' = -60{,}0\,\text{cm}$ (atrás do espelho), $m = +3$, altura $6{,}00\,\text{cm}$: virtual, direita, maior. Com o objecto no foco, os raios reflectidos saem paralelos e a imagem forma-se no infinito: não se pode projectar num ecrã a distância finita.

c) $m = +2$ dá $s' = -2s$; $1/s - 1/(2s) = 1/30$: $s = 15{,}0\,\text{cm}$. Invertida do mesmo tamanho: $m = -1$, $s' = s = 2f = 60{,}0\,\text{cm}$, no centro de curvatura.

Exercício 15 — Uma lente biconvexa no ar e num líquido

Uma lente delgada convergente, biconvexa e simétrica, de vidro com $n = 1{,}50$, tem distância focal $f = 15{,}0\,\text{cm}$ no ar. Para uma lente num meio de índice n_m, $\dfrac{1}{f} = \left(\dfrac{n}{n_m} - 1\right)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$.

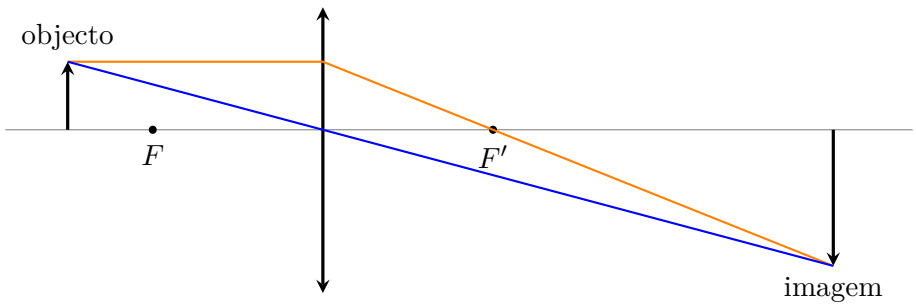
a) Um objecto com $1{,}00\,\text{cm}$ de altura está a $22{,}5\,\text{cm}$ da lente. Determine a posição e a altura da imagem. É real ou virtual? Direita ou invertida? Confirme com um diagrama de dois raios.

b) Repita com o objecto a $10{,}0\,\text{cm}$ da lente. Onde deve estar o olho para ver a imagem? Em que instrumento se usa esta situação?

c) Determine os raios de curvatura das faces. Calcule a distância focal com a lente mergulhada em água ($n_m = 1{,}33$). Em que líquido a lente deixaria de desviar a luz?

Resolução.

a) $1/s' = 1/15 - 1/22{,}5 = 1/45$: $s' = 45{,}0\,\text{cm}$, $m = -2$: imagem real ($s' > 0$), invertida, com $2{,}00\,\text{cm}$. Laranja: o raio paralelo ao eixo sai pelo foco F'. Azul: o raio pelo centro da lente não se desvia.



b) $1/s' = 1/15 - 1/10 = -1/30$: $s' = -30{,}0\,\text{cm}$, do lado do objecto; $m = +3$: virtual, direita,

3,00 cm. O olho deve estar do outro lado da lente, a receber os raios divergentes, cujos prolongamentos se cruzam na imagem. O objecto está entre o foco e a lente: é o uso como lupa.

c) Lente simétrica: $R_1 = R$, $R_2 = -R$. No ar, $\frac{1}{15} = 0{,}5 \times \frac{2}{R} = \frac{1}{R}$: $R = 15{,}0$ cm. Na água, $1/f = (1{,}5/1{,}33 - 1)(2/15) = 0{,}0170$: $f = 58{,}7$ cm, quase quatro vezes maior, porque o contraste de índices diminui. Num líquido com $n_m = 1{,}50$, $1/f = 0$: a lente não desvia a luz e torna-se invisível.