

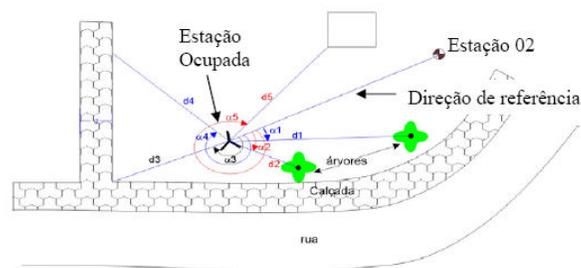
## Levantamentos topográficos

Um **levantamento topográfico** é o **conjunto de operações** cuja finalidade é a **determinação da posição relativa de pontos da superfície terrestre** através de **medições lineares e angulares**, envolvendo:

- **planeamento**: estabelecimento das especificações de precisão, análise de documentação existente, reconhecimento do local, selecção do(s) procedimento(s) e do equipamento
- **execução**: implantação do apoio necessário, trabalho de campo
- **cálculo**: realização dos cálculos e implantação gráfica, redacção de um relatório

## Levantamentos topográficos

Um levantamento topográfico é realizado com base num certo número de **estações solidamente relacionadas entre si**, que constituem o “**apoio**” ou esqueleto do levantamento (este apoio pode ou não estar ligado à rede geodésica), **a partir das quais se representa o detalhe passível de ser daí obtido**. Este apoio permite uma frequente verificação das orientações e fornece pontos de partida para a coordenação de novas estações.



## Levantamentos topográficos

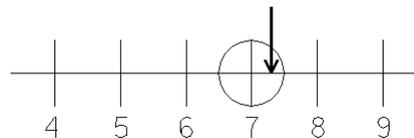
A **exactidão** de um conjunto de medidas representa o grau de proximidade dos valores observados com o valor verdadeiro da grandeza medida.

A **precisão** de um conjunto de medidas traduz a dispersão dos valores observados entre si.

Assim a exactidão é influenciada pelos **erros sistemáticos** e a precisão é influenciada pelos **erros aleatórios**.

## Levantamentos topográficos

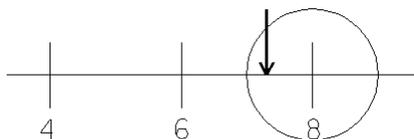
Não existindo erros sistemáticos, a exactidão depende da resolução do aparelho de medida utilizado: suponha-se que o valor exacto de um comprimento é igual a **7.3 m** e que se pretende determinar este valor utilizando uma régua graduada em m, sem estimação.



A exactidão do valor obtido corresponde a metade da menor graduação (1 m) e portanto qualquer valor entre 6.5 m e 7.5 m é arredondado para **7 m**.

## Levantamentos topográficos

Repita-se a medição do comprimento utilizando uma régua graduada de 2 em 2 m, sem estimação:

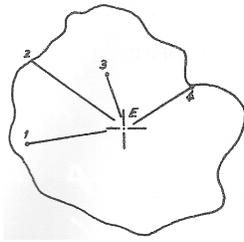


A exactidão do valor obtido corresponde a metade da menor graduação (2 m) e portanto qualquer valor entre 7 m e 9 m é arredondado para **8 m**.

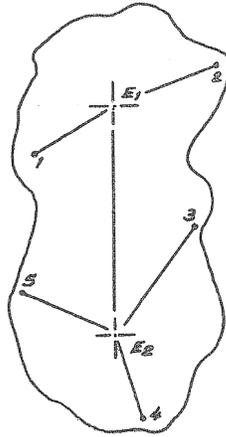
## Levantamentos topográficos

Nalguns casos, a configuração da zona a levantar permite basear o trabalho numa **única** estação (embora, para efeitos de orientação, seja necessário pelo menos mais um ponto de coordenadas conhecidas), de onde, por **transporte de coordenadas**, se irradiará para todos os pontos do pormenor. Noutros casos bastarão **2** estações, noutros ainda, a configuração da zona obriga à utilização de **3** estações, formando um triângulo, que para maior precisão na respectiva resolução deve ser o mais próximo possível de um triângulo equilátero (em qualquer caso, os ângulos internos devem estar compreendidos entre 40 e 160 graus).

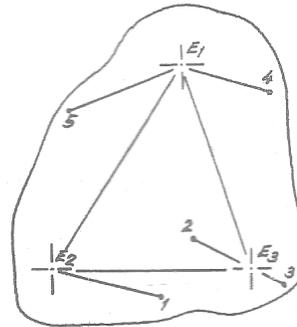
## Levantamentos topográficos



1 estação

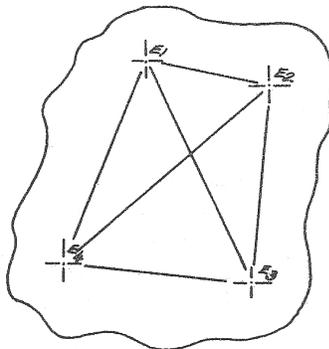


2 estações



triângulo

## Levantamentos topográficos



quadrilátero

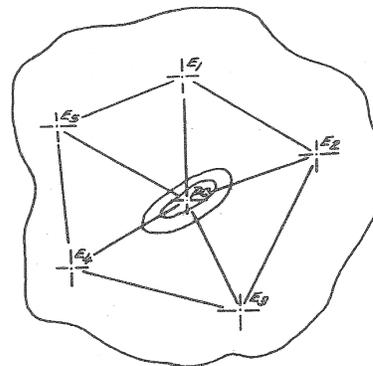
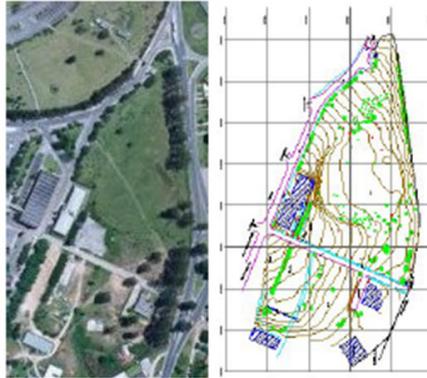


figura de ponto central

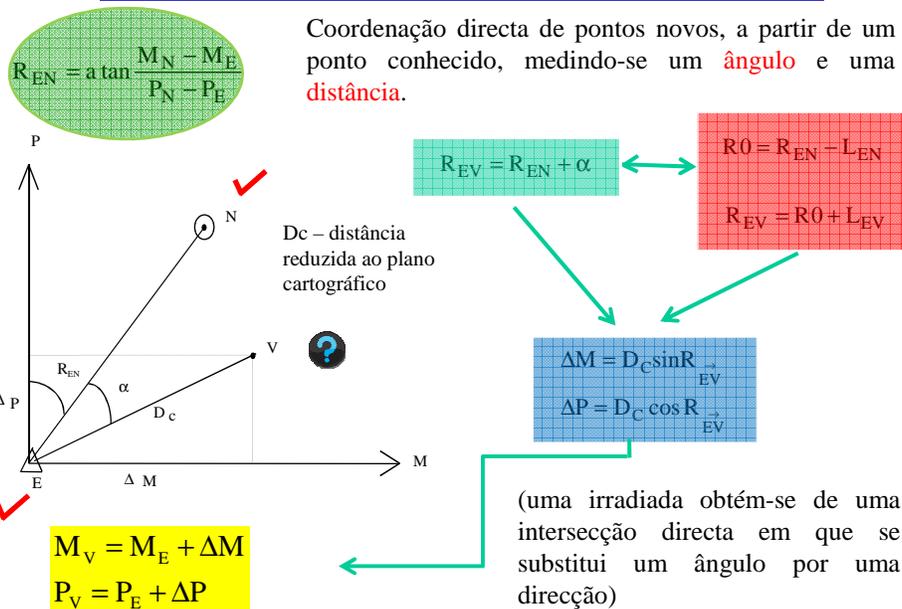
Os pontos de apoio ao levantamento devem ser convenientemente **monumentalizados** e a figura utilizada deve ser **ajustada** com rigor.

## Levantamentos topográficos



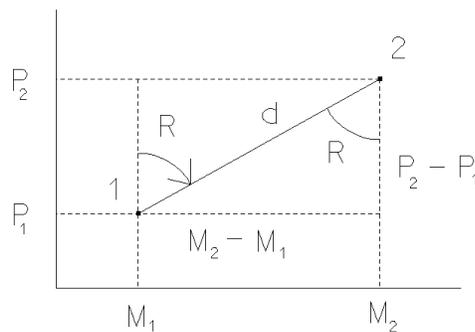
Tradicionalmente o levantamento topográfico é dividido em duas partes: o levantamento **planimétrico**, onde se determina a posição planimétrica dos pontos (coordenadas **M** e **P**) e o levantamento **altimétrico**, onde o objetivo é determinar a cota ou altitude de um ponto (coordenada **C**).

## Irradiada simples



## Irradiada simples

As operações topográficas baseiam-se numa rede de pontos cujas coordenadas  $(M_1, P_1)$  são conhecidas no referencial adoptado com uma dada incerteza  $(\sigma_{M_1}, \sigma_{P_1})$ . É importante efectuar a **propagação dos erros** (conhecidos) em **rumo** e **distância**, das **coordenadas** do ponto estação  $(M_1, P_1)$  para as **coordenadas** do ponto visado  $(M_2, P_2)$ :



$$\begin{cases} M_2 = M_1 + d \cos R \\ P_2 = P_1 + d \sin R \end{cases}$$

(irradiada)

## Irradiada simples

Sejam  $\Sigma_{obs}$  a matriz de variâncias-covariâncias das **grandezas observadas**, incluindo as coordenadas do ponto estação 1 e **J** a matriz jacobiana da transformação que permite obter as **coordenadas** do ponto visado 2 (transporte de coordenadas) a partir do ponto 1:

$$\Sigma_b = \begin{bmatrix} \sigma_{M_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{P_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_R^2 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_2}{\partial M_1} & \frac{\partial M_2}{\partial P_1} & \frac{\partial M_2}{\partial d} & \frac{\partial M_2}{\partial R} \\ \frac{\partial P_2}{\partial M_1} & \frac{\partial P_2}{\partial P_1} & \frac{\partial P_2}{\partial d} & \frac{\partial P_2}{\partial R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos R & -d \sin R \\ 0 & 1 & \sin R & d \cos R \end{bmatrix}$$

## Irradiada simples

A matriz  $\Sigma_{\text{coord}}$  de variâncias-covariâncias das coordenadas do ponto irradiado 2 é:

$$\Sigma_d = \begin{bmatrix} \sigma_{M_2}^2 & \sigma_{M_2 P_2} \\ \sigma_{M_2 P_2} & \sigma_{P_2}^2 \end{bmatrix} = J \Sigma_b J^t =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{M_1}^2 + \sigma_d^2 \sin^2 R + \sigma_R^2 d^2 \cos^2 R & \sigma_d^2 \sin R \cos R - \sigma_R^2 d^2 \sin R \cos R \\ \sigma_d^2 \sin R \cos R - \sigma_R^2 d^2 \sin R \cos R & \sigma_{P_1}^2 + \sigma_d^2 \cos^2 R + \sigma_R^2 d^2 \sin^2 R \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{M_1}^2 + \left(\frac{M_2 - M_1}{d}\right)^2 \sigma_d^2 + (P_2 - P_1)^2 \sigma_R^2 & \frac{(M_2 - M_1)(P_2 - P_1)}{d^2} \sigma_d^2 - (M_2 - M_1)(P_2 - P_1) \sigma_R^2 \\ \frac{(M_2 - M_1)(P_2 - P_1)}{d^2} \sigma_d^2 - (M_2 - M_1)(P_2 - P_1) \sigma_R^2 & \sigma_{P_1}^2 + \left(\frac{P_2 - P_1}{d}\right)^2 \sigma_d^2 + (M_2 - M_1)^2 \sigma_R^2 \end{bmatrix}$$

## Irradiada simples

O rumo  $R$  utilizado no cálculo da irradiada é obtido como  $R = R_2 = R_{1P} + \alpha^A$

em que  $I$  e  $P$  são pontos de coordenadas conhecidas, com incertezas  $(\sigma_{M_1}, \sigma_{P_1})$  e  $(\sigma_{M_P}, \sigma_{P_P})$  conhecidas, respectivamente e  $\alpha$  é o ângulo azimutal entre as direcções

1P e P2, tal que  $\alpha = L_{12}^{AZ} - L_{1P}^{AZ}$ , cada uma destas direcções tendo incerteza  $\sigma_u$

conhecida; assim:

$$R_{1P} = a \tan \frac{M_1 - M_P}{P_1 - P_P}, \quad \Sigma_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \sigma_{M_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{P_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{M_P}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{P_P}^2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1P}}{\partial M_1} & \frac{\partial R_{1P}}{\partial P_1} & \frac{\partial R_{1P}}{\partial M_P} & \frac{\partial R_{1P}}{\partial P_P} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{R_{1P}}^2 = J \Sigma_{\text{obs}} J^t =$$

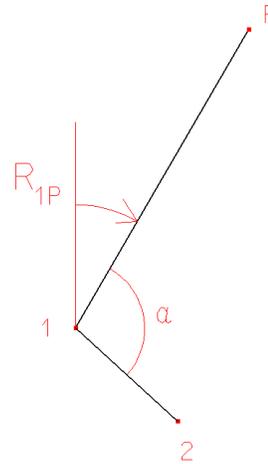
$$= \frac{\sigma_{M_1}^2}{(P_P - P_1)^2 \left(1 + \frac{(M_P - M_1)^2}{(P_P - P_1)^2}\right)^2} + \frac{(M_P - M_1)^2 \sigma_{P_1}^2}{(P_P - P_1)^4 \left(1 + \frac{(M_P - M_1)^2}{(P_P - P_1)^2}\right)} + \frac{\sigma_{M_P}^2}{(P_P - P_1)^2 \left(1 + \frac{(M_P - M_1)^2}{(P_P - P_1)^2}\right)^2} + \frac{(M_P - M_1)^2 \sigma_{P_P}^2}{(P_P - P_1)^4 \left(1 + \frac{(M_P - M_1)^2}{(P_P - P_1)^2}\right)}$$

## Irradiada simples

$$\alpha_{P_2}^{AZ} = L_{12}^{AZ} - L_{1P}^{AZ}, \quad \Sigma_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\lambda Z}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\lambda Z}^2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_{P_2}^{AZ}}{\partial L_{12}^{AZ}} & \frac{\partial \alpha_{P_2}^{AZ}}{\partial L_{1P}^{AZ}} \end{bmatrix} = [1 \quad -1], \quad \Sigma_{\alpha} = J \Sigma_{\text{obs}} J^t = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} \sigma_{\lambda Z}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\lambda Z}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\sigma_{\lambda Z}^2$$

Finalmente:  $\sigma_R^2 = \sigma_{R_{1P}}^2 + \sigma_{\alpha}^2$

Exemplo: supondo  $M_1=150.000\text{m}$ ,  
 $P_1=250.000\text{m}$ ,  $M_p=250.000\text{m}$ ,  $P_p=423.205\text{m}$   
 $\sigma_{M_1}=\sigma_{P_1}=\sigma_{M_p}=\sigma_{P_p}=\pm 0.010\text{m}$ ,  $d_{12}=80.123\text{m}$ ,  
 $\alpha_{P_2}=102^\circ.456$ ,  $\sigma_d=\pm 0.005\text{m}$ ,  $\sigma_{AZ}=\pm 3''$ , calcule  
as coordenadas do ponto 2 obtidas por  
irradiação a partir do ponto 1 e a respectiva  
precisão.



## Irradiada simples

$$R_{1P} = a \tan \frac{M_p - M_1}{P_p - P_1} = a \tan \frac{250.000 - 150.000}{423.205 - 250.000} = a \tan \frac{100.000}{173.205} = 30^\circ.000$$

$$R_{12} = R_{1P} + \alpha_{P_2}^{AZ} = 30^\circ.000 + 102^\circ.456 = 132^\circ.456$$

$$\begin{cases} M_2 = M_1 + d_{12} \sin R_{12} = \underline{209.114\text{m}} \\ P_2 = P_1 + d_{12} \cos R_{12} = \underline{195.915\text{m}} \end{cases}$$

$$\sigma_{R_{1P}}^2 = \frac{2(0.010)^2}{(423.205 - 250.000)^2 \left( 1 + \frac{(250.000 - 150.000)^2}{(423.205 - 250.000)^2} \right)^2} + \frac{2(0.010)^2 (250.000 - 150.000)^2}{(423.205 - 250.000)^4 \left( 1 + \frac{(250.000 - 150.000)^2}{(423.205 - 250.000)^2} \right)^2}$$

$$= \frac{2 \times 0.010^2}{173.205^2 \times \left( 1 + \frac{100.000^2}{173.205^2} \right)^2} + \frac{2 \times 0.010^2 \times 100.000^2}{173.205^4 \times \left( 1 + \frac{100.000^2}{173.205^2} \right)^2} = 5 \times 10^{-9} \text{ rad}^2$$

$$\sigma_{R_{1P}} = \pm 0.00405 \approx \pm 14''.6$$

(incerteza no rumo entre os pontos de coordenadas conhecidas devida à incerteza nas respectivas coordenadas)

## Irradiada simples

A incerteza no ângulo observado  $\alpha_{2P}$  no ponto 1 entre os pontos 2 e P devida à incerteza associada à realização de leituras azimutais é:  $\sigma_\alpha = \pm\sqrt{2} 3'' = 1.45444 \times 10^{-5}$  rad

A incerteza no rumo R do ponto 1 para o ponto 2 é:  $\sigma_R^2 = \sigma_{R_{1P}}^2 + \sigma_\alpha^2 = 14''.89$

Então, tem-se:

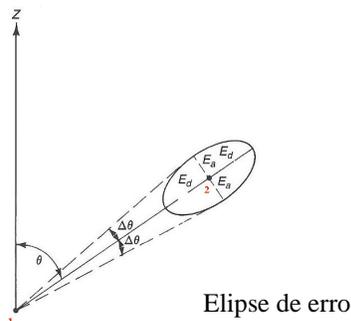
$$\sigma_{M_2}^2 = \sigma_{M_1}^2 + \left(\frac{M_2 - M_1}{d}\right)^2 \sigma_d^2 + (P_2 - P_1)^2 \sigma_R^2 = 0.000129 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{M_2} = \underline{0.011 \text{ m}}$$

$$\sigma_{P_2}^2 = \sigma_{P_1}^2 + \left(\frac{P_2 - P_1}{d}\right)^2 \sigma_d^2 + (M_2 - M_1)^2 \sigma_R^2 = 0.000129 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{P_2} = \underline{0.011 \text{ m}}$$

$$\sigma_{M_2 P_2}^2 = \frac{(M_2 - M_1)(P_2 - P_1)}{d^2} \sigma_d^2 - (M_2 - M_1)(P_2 - P_1) \sigma_R^2 = 4.21052943 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{M_2 P_2} = \underline{0.002 \text{ m}}$$

## Irradiada simples

$\sigma_{M_2}^2$  e  $\sigma_{P_2}^2$  são as variâncias das coordenadas do ponto visado nas direcções M e P; no entanto, os valores máximo e mínimo do erro de posicionamento do ponto visado não se encontram normalmente nas direcções dos eixos do referencial considerado. A **elipse de erro**, cujos eixos são definidos segundo as direcções dos erros máximo e mínimo, indicam graficamente a precisão do posicionamento do ponto visado.



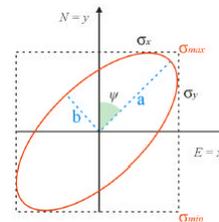
## Irradiada simples

A ellipse de erro obtém-se da equação  $|\Sigma_{MP} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\sigma_M^2 + \sigma_P^2)\lambda + (\sigma_M^2\sigma_P^2 - \sigma_{MP}^2) = 0$  ou seja, das duas soluções  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tem-se que os semieixos maior e menor e o ângulo do semieixo maior com o eixo P são:

$$\Psi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\sigma_{MP}}{\sigma_P^2 - \sigma_M^2}$$

$$a = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2) + \sqrt{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2)^2 - 4(\sigma_M^2\sigma_P^2 - \sigma_{MP}^2)}}{2}}$$

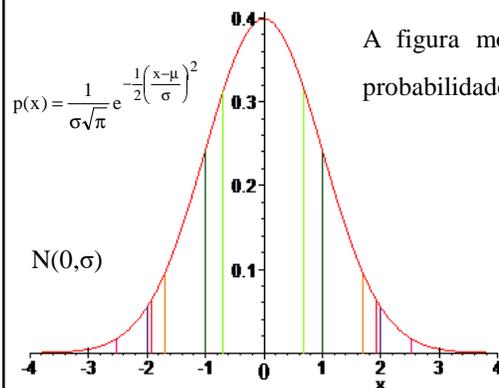
$$b = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2) - \sqrt{(\sigma_M^2 + \sigma_P^2)^2 - 4(\sigma_M^2\sigma_P^2 - \sigma_{MP}^2)}}{2}}$$



## Irradiada simples

Como já foi previamente assinalado, a análise estatística dos erros de observação parte do pressuposto de que as observações apenas estão afectadas por erros aleatórios, cuja distribuição é normal com valor médio  $\mu=0$  e desvio padrão  $\sigma$ , respectivamente aproximados por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad s = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1}$$



A figura mostra a curva da densidade de probabilidade dos erros:

$$P(-0.6745\sigma < x < 0.6745\sigma) = 0.5000$$

$$P(-\sigma < x < \sigma) = 0.6827$$

$$P(-1.6449\sigma < x < 1.6449\sigma) = 0.9000$$

$$P(-1.9600\sigma < x < 1.9600\sigma) = 0.9500$$

$$P(-2\sigma < x < 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-2.5758\sigma < x < 2.5758\sigma) = 0.9900$$

$$P(-3\sigma < x < 3\sigma) = 0.9973$$

## Irradiada simples

**Exemplo:** 50% dos erros de uma dada série de medições não excedem  $\pm 20$  cm (erro provável); 90% dos erros dessa série de medições não excedem  $\pm 49$  cm. Apesar de serem dados diferentes erros, cada um deles expressa a mesma precisão do processo de medição:

$$0.6 \quad \sigma = \pm 20 \text{ cm} \Rightarrow \sigma = \pm 20.7 \text{ cm}$$

$$1.0 \quad \sigma = \pm 49 \text{ cm} \Rightarrow \sigma = \pm 49.7 \text{ cm}$$

Qual é o erro padrão do processo considerado ( $P[-\sigma < x < \sigma] = 0.6827$ )?

$$1\sigma = 0.6827 \Rightarrow 0.6827 = \pm 20.7 \text{ cm}$$

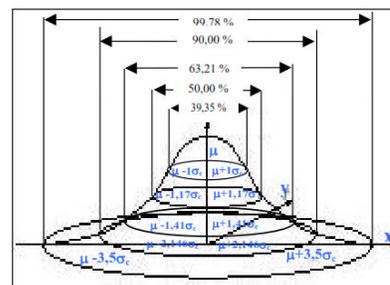
(68.27% dos erros ocorrem dentro do intervalo  $\pm\sigma$ )

## Irradiada simples

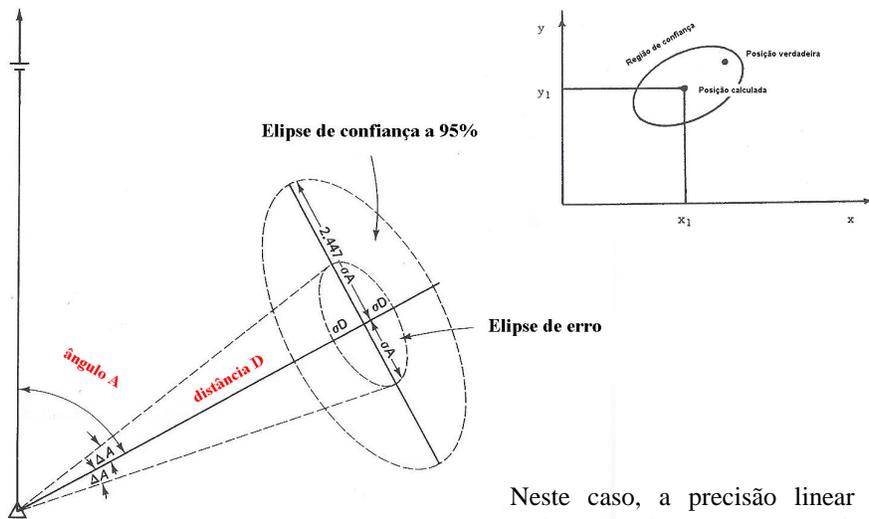
No caso **bidimensional**, a probabilidade de um ponto estar contido na **elipse de erro** é igual a **0.3935** (probabilidade de um acontecimento conjunto correspondente a um intervalo de  $1\sigma$  em cada direcção). Mais geralmente:

intervalo	$1.000\sigma$	$1.177\sigma$	$1.41\sigma$	$2.146\sigma$	$2.447\sigma$	$2.76\sigma$	$3.035\sigma$	$3.5\sigma$
probabilidade	0.3935	0.5000	0.6321	0.9000	0.950	0.975	0.9900	0.9978

A **elipse de confiança** obtém-se da elipse de erro ampliando os semieixos por um factor conveniente, por exemplo 2.45 para a elipse de confiança a 95%, 3.03 para a elipse de confiança a 99%.



## Irradiada simples



Neste caso, a precisão linear é mais elevada que a precisão angular.

## Irradiada simples

Supondo que um ponto A localizado a 450.00 m da estação deve ser determinado por irradiação com precisão posicional P igual a  $\pm 0.04$  m, qual é a precisão necessária na medição do ângulo e da distância?

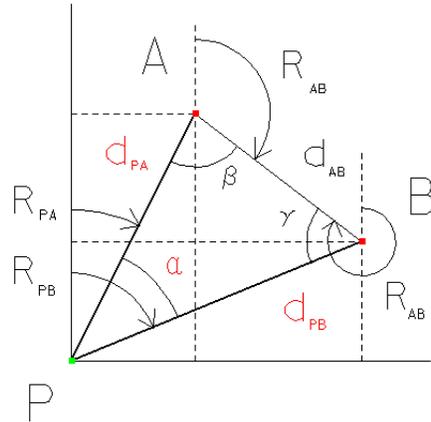
De  $P = \sqrt{(\sigma_M^2 + \sigma_p^2)} = \pm 0.04$ , o que significa que a elipse de erro é uma circunferência com  $\sigma_M = \sigma_p$ ,  $\sqrt{(2\sigma_M^2)} = \pm 0.04$ ,  $\sigma_M = 0.04 / \sqrt{2} = 0.028$  m.

Para um erro linear de 0.028 m, a precisão com que a distância deve ser medida é igual a  $\sigma_d = 0.028/450 = 1/16000$ ; como o erro angular também é igual a 0.028, a precisão com que o ângulo deve ser medido é  $0.028/450 = \tan \sigma_\alpha \Rightarrow \sigma_\alpha = 0^\circ 0' 13''$ .

Estes valores correspondem à elipse de erro; caso se considere a elipse de confiança a 95%, o erro limite é  $0.028/2.45 = 0.011$  tanto para as distâncias como para os ângulos, o que para uma distância de 450 m, implica uma precisão angular de  $0^\circ 0' 05''$ .

### Estação livre (excêntrica)

**Problema:** estacionou-se no ponto P de coordenadas desconhecidas e observou-se a distância horizontal  $d_{PA}$ , (a distância horizontal  $d_{PB}$ ) e o ângulo  $\alpha$ . Sendo conhecidas as coordenadas dos pontos A e B, calcule as coordenadas do ponto P.



(uma estação livre obtém-se de uma intersecção inversa onde se substituiu um ângulo por uma distância)

### Estação livre (excêntrica)

$$d_{AB} = \sqrt{(M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2}$$

$$R_{AB} = a \tan \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A}$$

$$\frac{\sin \alpha}{d_{AB}} = \frac{\sin \beta}{d_{PB}} = \frac{\sin \gamma}{d_{PA}} \Rightarrow \begin{cases} \beta = a \sin \left( \frac{d_{PB}}{d_{AB}} \sin \alpha \right) \\ \gamma = a \sin \left( \frac{d_{PA}}{d_{AB}} \sin \alpha \right) \end{cases}$$

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \Rightarrow \begin{cases} \bar{\beta} = \beta + \frac{\varepsilon}{3} \\ \bar{\gamma} = \gamma + \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

## Estação livre (excêntrica)

$$R_{AP} = R_{AB} + \beta \Rightarrow R_{PA} = R_{AP} \pm \pi$$

$$R_{BP} = R_{BA} - \gamma \Rightarrow R_{PB} = R_{BP} \pm \pi$$

$$\sin R_{PA} = \frac{M_A - M_P}{d_{PA}} \Rightarrow M_P = M_A - d_{PA} \sin R_{PA}$$

$$\cos R_{PA} = \frac{P_A - P_P}{d_{PA}} \Rightarrow P_P = P_A - d_{PA} \cos R_{PA}$$

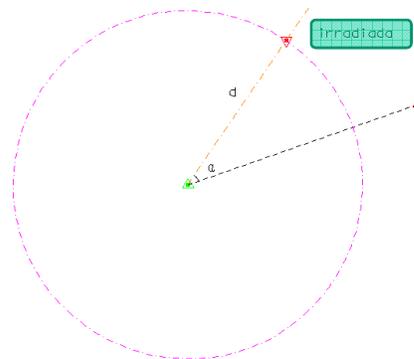
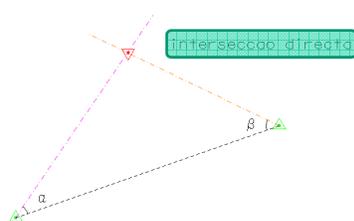
$$\sin R_{PB} = \frac{M_B - M_P}{d_{PB}} \Rightarrow M_P = M_B - d_{PB} \sin R_{PB}$$

$$\cos R_{PB} = \frac{P_B - P_P}{d_{PB}} \Rightarrow P_P = P_B - d_{PB} \cos R_{PB}$$

## Resumo

Pretendendo-se determinar as coordenadas de um ponto (2 incógnitas), é necessário utilizar 2 observações independentes.

2 ângulos

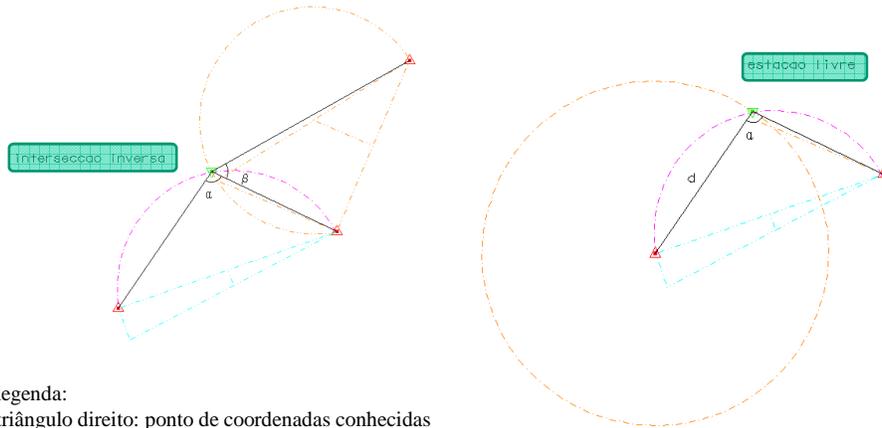


legenda:  
 triângulo direito: ponto de coordenadas conhecidas  
 triângulo invertido: ponto de coordenadas desconhecidas  
 triângulo verde: ponto estacionado  
 triângulo encarnado: ponto não estacionado

1 ÂNGULO, 1 DISTANCIA

## Resumo

2 angulos

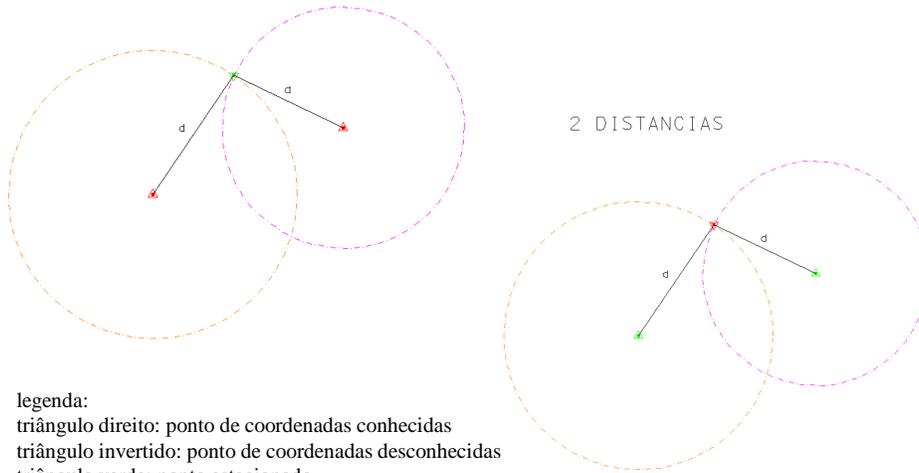


legenda:  
 triângulo direito: ponto de coordenadas conhecidas  
 triângulo invertido: ponto de coordenadas desconhecidas  
 triângulo verde: ponto estacionado  
 triângulo encarnado: ponto não estacionado

1 ANGULO, 1 DISTANCIA

## Resumo

2 DISTANCIAS



legenda:  
 triângulo direito: ponto de coordenadas conhecidas  
 triângulo invertido: ponto de coordenadas desconhecidas  
 triângulo verde: ponto estacionado  
 triângulo encarnado: ponto não estacionado

2 DISTANCIAS

## Poligonal

A figura de apoio mais vulgar, por se adaptar a todas as condições de terreno, é a **poligonal**. Para a respectiva resolução (cálculo das coordenadas das estações intermédias), além do conhecimento das coordenadas do ponto inicial, é necessário conhecer a orientação inicial.

As poligonais podem ser, do ponto de vista **geométrico**:

- **fechadas**, quando têm início e fim no mesmo ponto.
- **abertas**, quando o primeiro e o último ponto não coincidem.

As poligonais podem ser, do ponto de vista **matemático**:

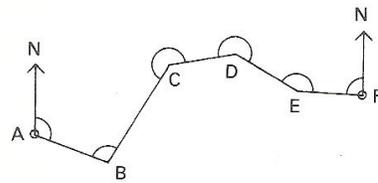
- **apoiadas ou fechadas**, quando têm início e fim em pontos de coordenadas conhecidas.
- **abertas**, quando têm início num ponto de coordenadas conhecidas mas terminam num ponto de coordenadas desconhecidas.

## Poligonal

Como o nome indica, uma poligonal é uma figura de apoio formada por uma linha quebrada (ou poligonal) cujos vértices são as estações cujas coordenadas se pretende determinar.

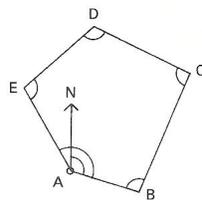
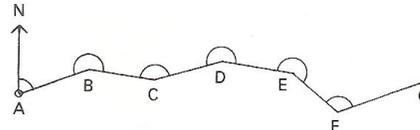
Em topografia não devem ser utilizadas poligonais abertas do ponto de vista matemático (por não permitirem o respectivo ajustamento).

## Poligonais - Classificação

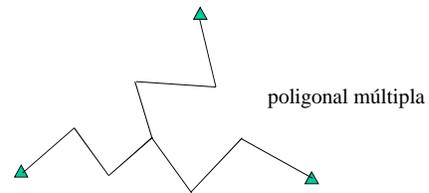


- A) poligonal **geomericamente aberta**  
 B) poligonal **matematicamente fechada**

- A) poligonal **geomericamente aberta**  
 B) poligonal **matematicamente aberta**



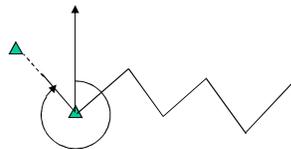
- A) poligonal **geomericamente fechada**  
 B) poligonal **matematicamente fechada**



## Poligonais: orientação

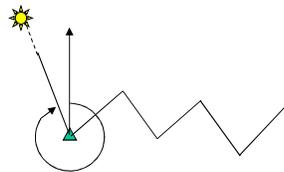
- Modo de Orientação {
- Goniométrico: o rumo em cada estação é **transportado** a partir do rumo calculado no ponto inicial, usando os ângulos entre visadas atrás e à frente)
  - Declinado: o rumo é **observado** em cada estação

Modo Goniométrico:



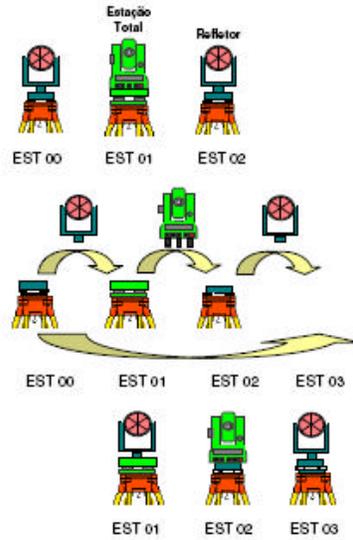
Orientação a partir de um vértice.

Modo Declinado:



Orientação a partir de uma estrela, do sol, de uma agulha magnética, ou com um giroscópio.

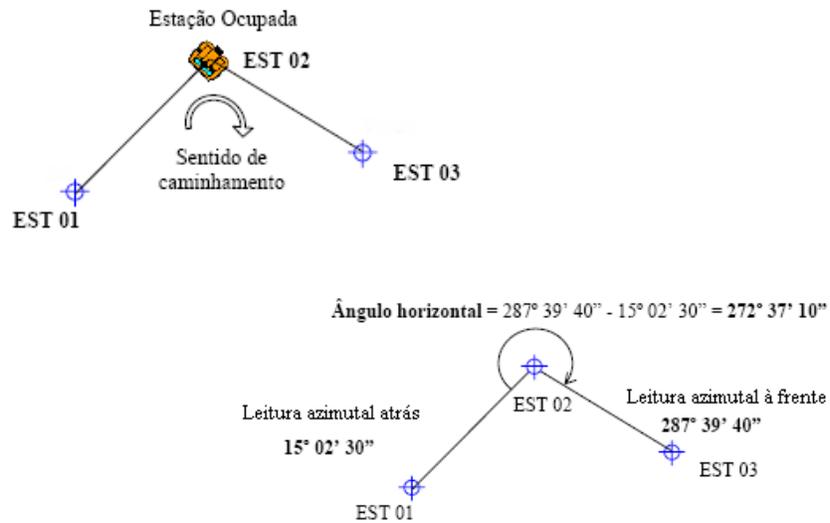
## Poligonais: método dos 3 tripés



## Poligonais: método dos 3 tripés



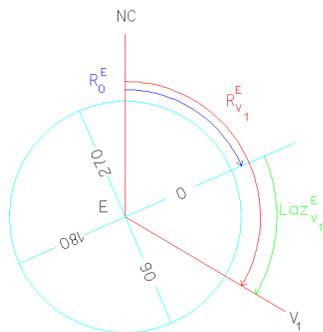
## Poligonal: cálculo do ângulo entre visadas



## Poligonal: cálculo de R0 nos pontos extremos

Sendo o ponto estação E de coordenadas conhecidas e o ponto visado  $V_1$  igualmente de coordenadas conhecidas, tem-se:

$$R_0^E = R_E^{V_1} - \text{Laz}_E^{V_1} = a \tan \frac{M_{V_1} - M_E}{P_{V_1} - P_E} - \text{Laz}_E^{V_1}$$

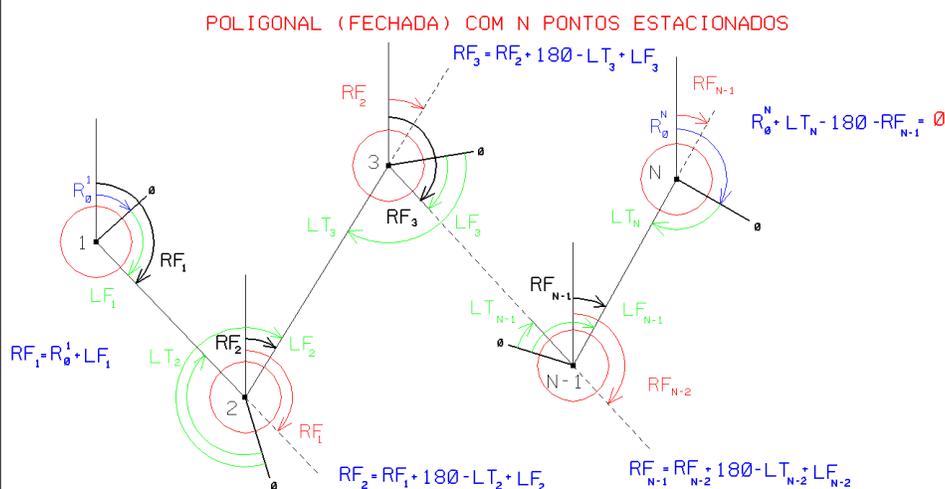


Este cálculo deve ser confirmado através de uma pontaria para pelo menos mais um ponto de coordenadas conhecidas pois se ocorrer algum erro na identificação do ponto visado, não há forma de no cálculo da poligonal identificar este erro.

## Irradiada Sucessiva - Poligonal

Considere-se uma poligonal com **n pontos (incluindo os extremos)**, observada em modo goniométrico (ou seja, os rumos são transmitidos por observação de ângulos), cujo ponto inicial é o ponto **1**, onde foi feita uma orientação para um ponto de coordenadas conhecidas (para o cálculo do  $R_0$  nesse ponto), sendo aí efectuadas leituras de distância para a frente e de direcção azimutal para a frente; nos pontos intermédios **2 a n-1**, são efectuadas observações de direcção azimutal e distância entre pontos da poligonal; no último ponto da poligonal (**n**), para além de ser feita uma orientação para um ponto de coordenadas conhecidas (para o cálculo de  $R_0$  nesse ponto), apenas se observam a direcção azimutal e a distância para trás; há portanto **n-2 ângulos observados**, **n-1 distâncias observadas**, **n-1 rumos calculados**:

## Irradiada Sucessiva - Poligonal



## Irradiada Sucessiva - Poligonal

Cálculo do rumo para frente em cada ponto da poligonal:

- No ponto 1:  $RF_1 = R_0^1 + LF_1$
- No ponto k, k=2,...,n-1:  $RF_k = RF_{k-1} + \pi + LF_k - LT_k$

Cálculo do erro de fecho angular:  $e_\alpha = RF_{n-1} + \pi - LT_n - R_0^n$

Cálculo da compensação dos rumos:  $RF_k = RF_k - \frac{k}{n-1} e_\alpha, k=1, \dots, n-1$

<i>Tipo de poligonal</i>	<i>Tolerância p/ erro de fecho angular (minutos de grau)</i>
Corrente	$e_\alpha \approx 4\sqrt{n}$
Precisão	$e_\alpha \approx 2\sqrt{n}$
Alta precisão	$e_\alpha \approx \sqrt{n}$

n é o número de vértices da poligonal, incluindo os extremos

## Irradiada Sucessiva - Poligonal

Cálculo da redução das distâncias ao horizonte:

- No ponto 1:  $DHF_1 = DIF_1 \times \sin(ZF_1)$
- No ponto k, k=2,...,n-1:  $DHT_k = DIT_k \times \sin(ZT_k), DHF_k = DIF_k \times \sin(ZF_k)$
- No ponto n:  $DHT_n = DIT_n \times \sin(ZT_n)$

Cálculo da média das distâncias horizontais:

- No ponto k, k=1,...,n-1:  $DMH_k = (DHF_k + DHT_{k+1}) / 2$
- Caso só exista distância num sentido, a média coincide com esse valor

Cálculo do somatório das distâncias horizontais:  $DHT = \sum_{k=1}^{n-1} DMH_k$

## Irradiada Sucessiva - Poligonal

Cálculo dos desníveis:

- No ponto  $k, k=1, \dots, n-1$ :  $\Delta F_k = DMH_k / \tan(ZF_k) + a_k^{inst} - a_k^{vis} + 6.82 \times 10^{-8} \times DMH_k^2$

$$\Delta T_k = DMH_k / \tan(ZT_{k+1}) + a_{k+1}^{inst} - a_{k+1}^{vis} + 6.82 \times 10^{-8} \times DMH_k^2$$

Cálculo da média dos desníveis:  $\Delta M_k = (\Delta F_k + \Delta T_k) / 2$

Cálculo do somatório dos desníveis:  $\Delta_{total} = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta M_k$

Cálculo do erro de fecho altimétrico:  $\varepsilon_x = \cot a_1 - \cot a_n + \Delta_{total}$

## Irradiada Sucessiva - Poligonal

Compensação do erro de fecho altimétrico:

- No ponto 1: cota<sub>1</sub>
- No ponto  $k, k=2, \dots, n$ :  $\cot a_k = \cot a_{k-1} + \Delta M_k - \frac{DMH_{k-1}}{DHT} \varepsilon_x$

Calculo da tolerância para o erro altimétrico:  $t_x = \sqrt{n-1} \times 0.03 + 0.1$

## Irradiada Sucessiva - Poligonal

Cálculo da redução das distâncias ao elipsóide:

- No ponto  $k, k=1, \dots, n-1$ :  $DME_k = DMH_k \times R / (R + (\cot a_k + \cot a_{k+1}) / 2)$

Cálculo provisório da planimetria:

- No ponto 1:  $M_1, P_1$
- No ponto  $k, k=1, \dots, n$ :  $M_k = M_{k-1} + DME_{k-1} \times \sin(RF_{k-1})$   
 $P_k = P_{k-1} + DME_{k-1} \times \cos(RF_{k-1})$

Cálculo da redução ao plano cartográfico:

- No ponto  $k, k=1, \dots, n-1$ :  $DMP_k = DME_k + (M_k^2 + M_k \times M_{k+1} + M_{k+1}^2) \times 4.1018 \times 10^{-15} \times DME_k$

Calculo do somatório das distâncias reduzidas ao plano cartográfico:  $DPT = \sum_{k=1}^{n-1} DMP_k$  (desenvolvimento)

## Irradiada Sucessiva - Poligonal

Calculo definitivo da planimetria:

- No ponto  $k, k=1, \dots, n-1$ :  $\delta M_k = DMP_k \times \sin(RF_k)$

$$S\delta M = \sum_{k=1}^{n-1} \delta M_k$$

$$AS\delta M = \sum_{k=1}^{n-1} \text{abs}(\delta M_k)$$

$$\underline{\delta P_k} = DMP_k \times \cos(RF_k)$$

$$S\delta P = \sum_{k=1}^{n-1} \delta P_k$$

$$AS\delta P = \sum_{k=1}^{n-1} \text{abs}(\delta P_k)$$

## Irradiada Sucessiva - Poligonal

Cálculo do erro de fecho linear:

$$M_{\text{dif}} = M_1 - M_n$$

$$P_{\text{dif}} = P_1 - P_n$$

$$\varepsilon_M = M_{\text{dif}} + S\delta M$$

$$\varepsilon_P = P_{\text{dif}} + S\delta P$$

$$\varepsilon_{\text{linear}} = \sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_P^2}$$

Tipo de poligonal	Tolerância p/ erro de fecho linear (metros)
Corrente	$e_L \cong 0,06\sqrt{L}$
Precisão	$e_L \cong 0,01\sqrt{L} + 0,1$
Alta precisão	$e_L \cong 0,005\sqrt{L} + 0,05$

L=desenvolvimento)

## Irradiada Sucessiva - Poligonal

Cálculo da compensação planimétrica:

$$\text{corrM} = -\frac{\varepsilon_M}{AS\delta M}$$

$$\text{corrP} = -\frac{\varepsilon_P}{AS\delta P}$$

- No ponto k, k=1,...,n-1:

$$\delta M_k = \delta M_k + \text{corrM} \times \text{abs}(\delta M_k)$$

$$\delta P_k = \delta P_k + \text{corrP} \times \text{abs}(\delta P_k)$$

- No ponto k, k=2,...,n

$$M_k = M_{k-1} + \delta M_k$$

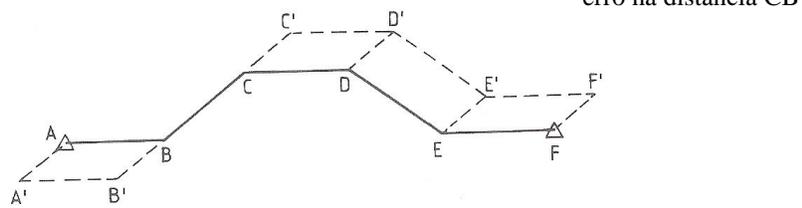
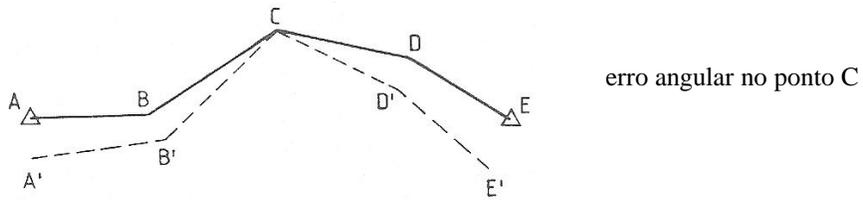
$$P_k = P_{k-1} + \delta P_k$$

Cálculo do erro relativo:

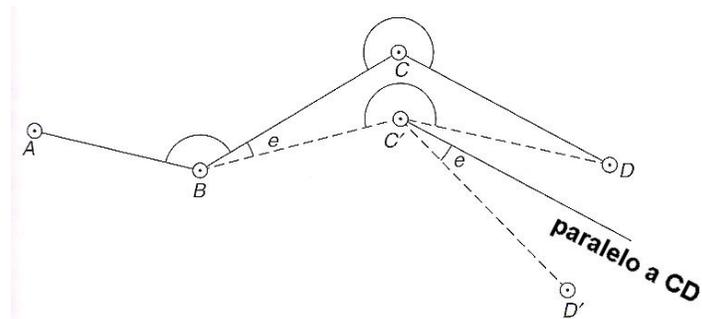
$$\varepsilon_{\text{relativo}} = \frac{\varepsilon_{\text{linear}}}{DPT}$$

(  $\approx \frac{1}{10000}$  em topografia)

## Irradiada Sucessiva - Poligonal



## Irradiada Sucessiva - Poligonal



## Poligonal

Observou-se uma poligonal para coordenar os pontos C, D, E, tendo-se obtido as observações seguintes:

Estação	Pontos visados	Leituras azimutais	Distâncias horizontais
A	B	120.300 g	---
	C	68.445 g	54.03 m
	E	364.160 g	37.48 m
C	A	239.330 g	---
	D	356.435 g	88.96 m
D	C	104.825 g	---
	E	153.160 g	93.62 m
E	D	299.730 g	---
	A	30.090 g	---

Sabendo que  $M_A=3264.87$  m,  $P_A=-5703.03$  m,  $M_B=3942.35$  m,  $P_B=-4967.50$  m, determine os rumos compensados dos lados da poligonal.

Tendo a poligonal n estações, tem-se:

$$R_{\text{frente}}(1) = R_0(1) + Az_{\text{frente}}(1)$$

$$R_{\text{frente}}(i) = R_{\text{frente}}(i-1) + 200 + Az_{\text{frente}}(i) - Az_{\text{trás}}(i), \quad i=2, \dots, n-1$$

O erro de fecho angular da poligonal é dado por:

$$\text{Erro}_{\text{fecho angular}} = R_{\text{frente}}(n-1) + 200 - Az_{\text{trás}}(n) - R_0(n)$$

Assim, tem-se:

$$R_0^A = R_{A,B} - L_{A,B}^{az} = a \tan \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A} - L_{A,B}^{az} = a \tan \frac{3942.35 - 3264.87}{-4967.50 + 5703.03} - 120.300 = 47.386 - 120.300 + 400 = 327.086 \text{ g}$$

$$R_{A,C} = R_0^A + L_{A,C}^{az} = 327.086 + 68.445 = 395.531 \text{ g}$$

$$R_{C,D} = R_{A,C} + 200 + L_{C,D}^{az} - L_{C,A}^{az} = 395.531 + 200 + 356.435 - 239.330 - 400 = 312.636 \text{ g}$$

$$R_{D,E} = R_{C,D} + 200 + L_{D,E}^{az} - L_{D,C}^{az} = 312.636 + 200 + 153.160 - 104.825 - 400 = 160.971 \text{ g}$$

$$R_{E,A} = R_{D,E} + 200 + L_{E,A}^{az} - L_{E,D}^{az} = 160.971 + 200 + 30.090 - 299.730 - 400 = 91.331 \text{ g}$$

Erro de fecho angular:

$$\varepsilon_\alpha = R_{E,A} + 200 - L_{A,E}^{az} - R_0^A = 91.331 + 200 - 364.160 - 327.086 + 400 = 0.085 \text{ g}$$

Os rumos compensados são obtidos por:

$$R_{\text{frente}}^{\text{compensados}}(i) = R_{\text{frente}}(i) - i \times \text{Erro}_{\text{fecho angular}}$$

$$R_{A,C}^c = R_{A,C} - \frac{0.085}{4} = 395.510 \text{ g}$$

$$R_{C,D}^c = R_{C,D} - \frac{2 \times 0.085}{4} = 312.594 \text{ g}$$

$$R_{D,E}^c = R_{D,E} - \frac{3 \times 0.085}{4} = 160.907 \text{ g}$$

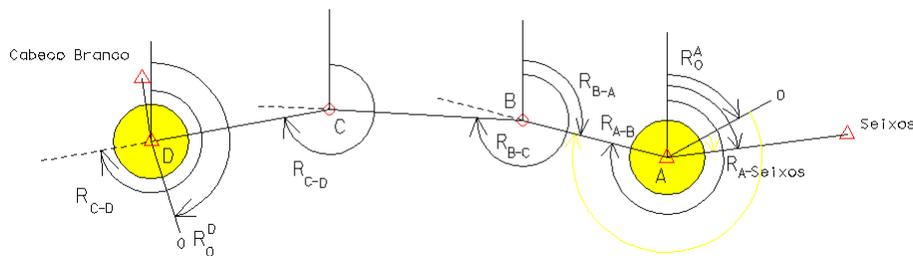
$$R_{E,A}^c = R_{E,A} - 0.085 = 91.246 \text{ g}$$

## Poligonal

Ajuste recorrendo ao método clássico a seguinte poligonal observada entre os vértices A e D, cujas coordenadas são  $M_A=208.715$  m,  $P_A=-73095.011$  m,  $C_A=841.260$  m e  $M_D=-5397.377$  m,  $P_D=-72916.893$  m  $C_D=982.048$  m, sabendo que em A e em D foi efectuada a orientação da poligonal respectivamente para os vértices Seixos e Cabeço Branco, de coordenadas  $M_{\text{Seixos}}=2167.644$  m,  $P_{\text{Seixos}}=-72841.331$  m e  $M_{\text{Cabeço Branco}}=-5498.351$  m,  $P_{\text{Cabeço Branco}}=-72231.579$  m (despreze a redução ao plano cartográfico):

	Leituras azimutais		Leituras zenitais	Distâncias inclinadas	Altura instrumento	Altura visada
	P/ trás	P/ frente	P/ frente	P/ frente	P/ frente	P/ frente
A	023.741	248.099	103.922	1628.090	1.72	1.65
B	301.630	088.889	098.615	2104.551	1.69	1.76
C	079.381	264.802	093.710	1972.649	1.74	1.80
D	308.106	209.960				

(as distâncias estão em m e as leituras angulares em graus).



•cálculo do  $R_0$  no ponto inicial da poligonal (A)

$$R_0^A = a \tan \frac{M_{\text{Seixos}} - M_A}{P_{\text{Seixos}} - P_A} - L_{A,\text{Seixos}}^{\text{az}} = a \tan \frac{1958,929}{253,68} - 23^\circ,741 = 91^\circ,801 - 23^\circ,741 = 68^\circ,060$$

•cálculo do  $R_0$  no ponto final da poligonal (D)

$$R_0^D = a \tan \frac{M_{\text{Cabeço Branco}} - M_D}{P_{\text{Cabeço Branco}} - P_D} - L_{D,\text{Cabeço Branco}}^{\text{az}} = a \tan \frac{-100,974}{685,314} - 209^\circ,960 = 400^\circ - 9^\circ,313 - 209^\circ,960 = 180^\circ,727$$

•cálculo dos rumos para a frente por transporte ao longo da poligonal

$$\text{em A: } R_{A,B} = R_0^A + L_{A,B}^{Az} = 91^\circ.801 + 248^\circ.099 = 316^\circ.159$$

$$\text{em B: } R_{B,C} = R_{A,B} + L_{B,C}^{Az} - L_{B,A}^{Az} + 200^\circ = 316^\circ.159 + 88^\circ.889 - 301^\circ.630 + 200^\circ = 303^\circ.418$$

$$\text{em C: } R_{C,D} = R_{B,C} + L_{C,D}^{Az} - L_{C,B}^{Az} + 200^\circ = 303^\circ.418 + 264^\circ.802 - 79^\circ.381 + 200^\circ = 288^\circ.839$$

•cálculo do erro de fecho angular

$$\varepsilon_\alpha = R_{C,D} + 200^\circ - L_{D,C}^{az} - R_0^D = 288^\circ.839 + 200^\circ - 308^\circ.106 - 180^\circ.727 = 0^\circ.006$$

•compensação dos rumos

$$\bar{R}_{A,B} = R_{A,B} - \frac{\varepsilon_\alpha}{3} = 316^\circ.159 - 0^\circ.002 = 316^\circ.157$$

$$\bar{R}_{B,C} = R_{B,C} - \frac{2\varepsilon_\alpha}{3} = 303^\circ.418 - 0^\circ.004 = 303^\circ.414$$

$$\bar{R}_{C,D} = R_{C,D} - \frac{3\varepsilon_\alpha}{3} = 288^\circ.839 - 0^\circ.006 = 288^\circ.833$$

•redução das distâncias ao horizonte

$$d_{A,B}^{\text{hor}} = d_{A,B}^{\text{incl}} \sin L_{A,B}^z = 1628.090 \sin 103^\circ.922 = 1625.001 \text{ m}$$

$$d_{B,C}^{\text{hor}} = d_{B,C}^{\text{incl}} \sin L_{B,C}^z = 2104.551 \sin 98^\circ.615 = 2104.053 \text{ m}$$

$$d_{C,D}^{\text{hor}} = d_{C,D}^{\text{incl}} \sin L_{C,D}^z = 1972.649 \sin 93^\circ.710 = 1963.028 \text{ m}$$

•cálculo dos desníveis

$$\Delta_{A,B} = d_{A,B}^{\text{hor}} / \tan L_{A,B}^z + \frac{0.43}{6371000} d_{A,B}^{\text{hor}^2} + a_A^{\text{ins}} - a_A^{\text{vis}} = 1625.001 / \tan 103^\circ.922 + \frac{0.43}{6371000} 1625.001^2 + 1.72 - 1.65 = -99.988 \text{ m}$$

$$\Delta_{B,C} = d_{B,C}^{\text{hor}} / \tan L_{B,C}^z + \frac{0.43}{6371000} d_{B,C}^{\text{hor}^2} + a_B^{\text{ins}} - a_B^{\text{vis}} = 2104.053 / \tan 98^\circ.615 + \frac{0.43}{6371000} 2104.053^2 + 1.69 - 1.76 = 46.014 \text{ m}$$

$$\Delta_{C,D} = d_{C,D}^{\text{hor}} / \tan L_{C,D}^z + \frac{0.43}{6371000} d_{C,D}^{\text{hor}^2} + a_C^{\text{ins}} - a_D^{\text{vis}} = 1963.028 / \tan 93^\circ.710 + \frac{0.43}{6371000} 1963.028^2 + 1.74 - 1.80 = 194.790 \text{ m}$$

•cálculo do erro de fecho altimétrico

$$\epsilon_c = C_A - C_D + (\Delta_{A,B} + \Delta_{B,C} + \Delta_{C,D}) = 841.260 - 982.048 + (-99.988 + 46.014 + 194.790) = 0.028 \text{ m}$$

•compensação dos deníveis

$$\bar{\Delta}_{A,B} = \Delta_{A,B} - \frac{d_{A,B}^{\text{hor}}}{d_{A,B}^{\text{hor}} + d_{B,C}^{\text{hor}} + d_{C,D}^{\text{hor}}} \epsilon_c = -99.988 - \frac{1625.001}{1625.001 + 2104.053 + 1963.028} 0.028 = -99.996 \text{ m}$$

$$\bar{\Delta}_{B,C} = \Delta_{B,C} - \frac{d_{B,C}^{\text{hor}}}{d_{A,B}^{\text{hor}} + d_{B,C}^{\text{hor}} + d_{C,D}^{\text{hor}}} \epsilon_c = 46.014 - \frac{2104.053}{1625.001 + 2104.053 + 1963.028} 0.028 = 46.004 \text{ m}$$

$$\bar{\Delta}_{C,D} = \Delta_{C,D} - \frac{d_{C,D}^{\text{hor}}}{d_{A,B}^{\text{hor}} + d_{B,C}^{\text{hor}} + d_{C,D}^{\text{hor}}} \epsilon_c = 194.790 - \frac{1963.028}{1625.001 + 2104.053 + 1963.028} 0.028 = 194.780 \text{ m}$$

•cálculo das cotas

$$C_B = C_A + \bar{\Delta}_{A,B} = 841.260 - 99.996 = 741.264 \text{ m}$$

$$C_C = C_B + \bar{\Delta}_{B,C} = 741.264 + 46.004 = 787.268 \text{ m}$$

$$C_D = C_C + \bar{\Delta}_{C,D} = 787.268 + 194.780 = 982.048 \text{ m}$$

•redução das distâncias ao elipsóide

$$d_{A,B}^{\text{elip}} = d_{A,B}^{\text{hor}} \frac{6371000}{6371000 + \frac{C_A + C_B}{2}} = 1624.799 \text{ m}$$

$$d_{B,C}^{\text{elip}} = d_{B,C}^{\text{hor}} \frac{6371000}{6371000 + \frac{C_B + C_C}{2}} = 2103.801 \text{ m}$$

$$d_{C,D}^{\text{elip}} = d_{C,D}^{\text{hor}} \frac{6371000}{6371000 + \frac{C_C + C_D}{2}} = 1962.755 \text{ m}$$

•cálculo das coordenadas planimétricas

$$\delta M_A = d_{A,B}^{\text{elip}} \sin \bar{R}_{A,B} = 1624.799 \sin 316^{\circ}.157 = -1572.752$$

$$\delta P_A = d_{A,B}^{\text{elip}} \cos \bar{R}_{A,B} = 1624.799 \cos 316^{\circ}.157 = 407.951$$

$$\delta M_B = d_{B,C}^{\text{elip}} \sin \bar{R}_{B,C} = 2103.801 \sin 303^{\circ}.414 = -2100.777$$

$$\delta P_B = d_{B,C}^{\text{elip}} \cos \bar{R}_{B,C} = 2103.801 \cos 303^{\circ}.414 = 112.766$$

$$\delta M_C = d_{C,D}^{\text{elip}} \sin \bar{R}_{C,D} = 1962.755 \sin 288^{\circ}.833 = -1932.636$$

$$\delta P_C = d_{C,D}^{\text{elip}} \cos \bar{R}_{C,D} = 1962.755 \cos 288^{\circ}.833 = -342.526$$

$$M_B = M_A + \delta M_A = 208.715 - 1572.752 = -1364.037 \text{ m}$$

$$P_B = P_A + \delta P_A = -73095.011 + 407.951 = -72687.060 \text{ m}$$

$$M_C = M_B + \delta M_B = -1364.037 - 2100.777 = -3464.814 \text{ m}$$

$$P_C = P_B + \delta P_B = -72687.060 + 112.7664 = -72574.294 \text{ m}$$

$$M_D = M_C + \delta M_C = -3464.814 - 1932.636 = -5397.450 \text{ m}$$

$$P_D = P_C + \delta P_C = -72574.294 - 342.526 = -72916.820 \text{ m}$$

•cálculo definitivo da planimetria

$$\sum \delta M = \delta M_A + \delta M_B + \delta M_C = -5606.165$$

$$\sum \delta P = \delta P_A + \delta P_B + \delta P_C = 178.191$$

$$\Delta M = M_A - M_D = 5606.092$$

$$\Delta P = P_A - P_D = -178.118$$

$$EFM = \Delta M + \sum \delta M = -0.073$$

$$EFP = \Delta P + \sum \delta P = 0.073$$

$$\left| \sum \delta M \right| = |\delta M_A| + |\delta M_B| + |\delta M_C| = 5606.165$$

$$\left| \sum \delta P \right| = |\delta P_A| + |\delta P_B| + |\delta P_C| = 863.243$$

$$KM = -EFM / \left| \sum \delta M \right| = 1.302138 \times 10^{-5}$$

$$KP = -EFP / \left| \sum \delta P \right| = -8.456448 \times 10^{-5}$$

$$\bar{\delta}M_A = \delta M_A + KM \times |\delta M_A| = -1572.732$$

$$\bar{\delta}P_A = \delta P_A + KP \times |\delta P_A| = 407.917$$

$$\bar{\delta}M_B = \delta M_B + KM \times |\delta M_B| = -2100.750$$

$$\bar{\delta}P_B = \delta P_B + KP \times |\delta P_B| = 112.756$$

$$\bar{\delta}M_C = \delta M_C + KM \times |\delta M_C| = -1932.611$$

$$\bar{\delta}P_C = \delta P_C + KP \times |\delta P_C| = -342.555$$

$$M_B = M_A + \bar{\delta}M_A = -1364.017$$

$$P_B = P_A + \bar{\delta}P_A = -72687.094$$

$$M_C = M_B + \bar{\delta}M_B = -3464.767$$

$$P_C = P_B + \bar{\delta}P_B = -72574.338$$

$$M_D = M_C + \bar{\delta}M_C = -5397.378$$

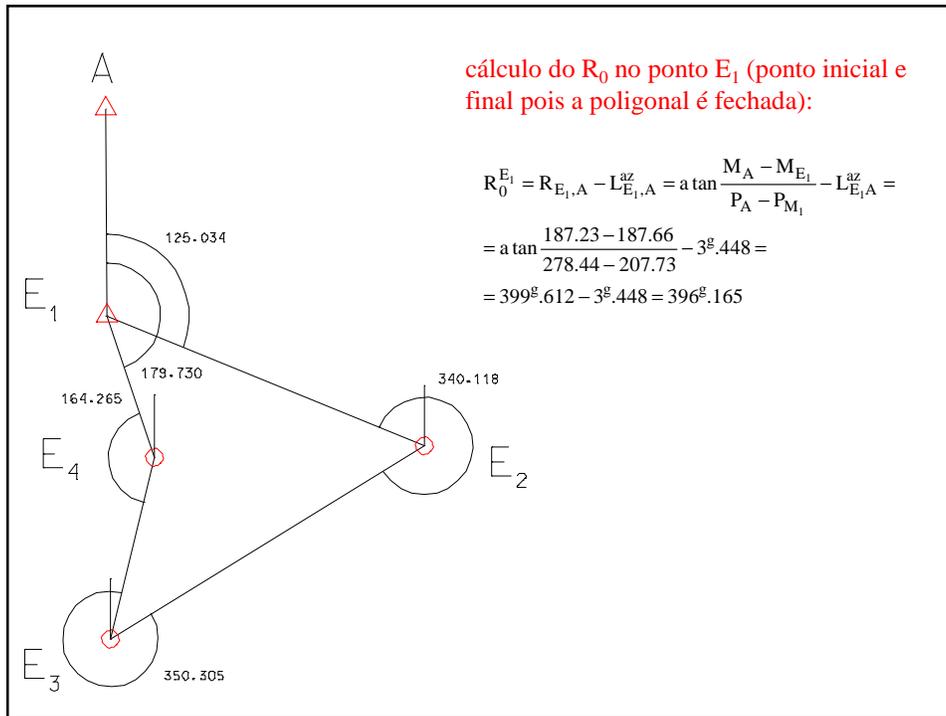
$$P_D = P_C + \bar{\delta}P_C = -72916.893$$

## Poligonal

Na observação de uma poligonal de média precisão obteve-se o seguinte registo de campo:

Estação	Ponto visado	Leitura azimutal	Distância (m)
E <sub>1</sub>	A	003 °.448	---
	E <sub>2</sub>	128 °.482	116.88
	E <sub>4</sub>	183 °.178	---
E <sub>2</sub>	E <sub>1</sub>	321 °.869	---
	E <sub>3</sub>	261 °.987	125.73
E <sub>3</sub>	E <sub>2</sub>	051 °.530	---
	E <sub>4</sub>	001 °.835	63.77
E <sub>4</sub>	E <sub>3</sub>	027 °.853	---
	E <sub>1</sub>	192 °.118	50.90

Conhecendo as coordenadas  $M_A=187.23$  m,  $P_A=278.44$  m,  $M_{E1}=187.66$  m,  $P_{E1}=207.73$  m, determine as coordenadas planimétricas ajustadas dos restantes pontos da poligonal.



cálculo dos rumos para a frente por transporte ao longo da poligonal:

$$R_{E_1, E_2} = R_0^{E_1} + L_{E_1, E_2}^{az} = 396^{\circ}.165 + 128^{\circ}.482 = 124^{\circ}.647$$

$$R_{E_2, E_3} = R_{E_1, E_2} + L_{E_2, E_3}^{az} - L_{E_2, E_1}^{az} + 200^{\circ} = 124^{\circ}.647 + 261^{\circ}.987 - 321^{\circ}.869 + 200^{\circ} = 264^{\circ}.765$$

$$R_{E_3, E_4} = R_{E_2, E_3} + L_{E_3, E_4}^{az} - L_{E_3, E_2}^{az} + 200^{\circ} = 264^{\circ}.765 + 1^{\circ}.835 - 51^{\circ}.530 + 200^{\circ} = 15^{\circ}.070$$

$$R_{E_4, E_1} = R_{E_3, E_4} + L_{E_4, E_1}^{az} - L_{E_4, E_3}^{az} + 200^{\circ} = 15^{\circ}.070 + 192^{\circ}.118 - 27^{\circ}.853 + 200^{\circ} = 379^{\circ}.335$$

cálculo do erro de fecho angular:

$$\varepsilon_{\alpha} = R_{E_4, E_1} + 200^{\circ} - L_{E_1, E_4}^{az} - R_0^{E_1} = 379^{\circ}.335 + 200^{\circ} - 183^{\circ}.178 - 396^{\circ}.165 = -0^{\circ}.008$$

compensação dos rumos:

$$\bar{R}_{E_1,E_2} = R_{E_1,E_2} + \frac{0^{\circ}.008}{4} = 124^{\circ}.649$$

$$\bar{R}_{E_2,E_3} = R_{E_2,E_3} + \frac{2 \times 0^{\circ}.008}{4} = 264^{\circ}.769$$

$$\bar{R}_{E_3,E_4} = R_{E_3,E_4} + \frac{3 \times 0^{\circ}.008}{4} = 15^{\circ}.076$$

$$\bar{R}_{E_4,E_1} = R_{E_4,E_1} + \frac{4 \times 0^{\circ}.008}{4} = 379^{\circ}.343$$

cálculo das coordenadas planimétricas:

$$\delta M_{E_2} = d_{E_1,E_2} \sin \bar{R}_{E_1,E_2} = 116.88 \sin 124^{\circ}.649 = 108.23 \text{ m}$$

$$\delta P_{E_2} = d_{E_1,E_2} \cos \bar{R}_{E_1,E_2} = 116.88 \cos 124^{\circ}.649 = -44.13 \text{ m}$$

$$\delta M_{E_3} = d_{E_2,E_3} \sin \bar{R}_{E_2,E_3} = 125.73 \sin 264^{\circ}.769 = -106.96 \text{ m}$$

$$\delta P_{E_3} = d_{E_2,E_3} \cos \bar{R}_{E_2,E_3} = 125.73 \cos 264^{\circ}.769 = -66.08 \text{ m}$$

$$\delta M_{E_4} = d_{E_3,E_4} \sin \bar{R}_{E_3,E_4} = 63.77 \sin 15^{\circ}.076 = 14.96 \text{ m}$$

$$\delta P_{E_4} = d_{E_3,E_4} \cos \bar{R}_{E_3,E_4} = 63.77 \cos 15^{\circ}.076 = 61.99 \text{ m}$$

$$\delta M_{E_1} = d_{E_4,E_1} \sin \bar{R}_{E_4,E_1} = 50.90 \sin 379^{\circ}.343 = -16.23 \text{ m}$$

$$\delta P_{E_1} = d_{E_4,E_1} \cos \bar{R}_{E_4,E_1} = 50.90 \cos 379^{\circ}.343 = 48.24 \text{ m}$$

$$M_{E_2} = M_{E_1} + \delta M_{E_1} = 187.66 + 108.23 = 295.89 \text{ m}$$

$$P_{E_2} = P_{E_1} + \delta P_{E_1} = 207.73 - 44.13 = 163.60 \text{ m}$$

$$M_{E_3} = M_{E_2} + \delta M_{E_2} = 295.89 - 106.96 = 188.93 \text{ m}$$

$$P_{E_3} = P_{E_2} + \delta P_{E_2} = 163.60 - 66.08 = 97.52 \text{ m}$$

$$M_{E_4} = M_{E_3} + \delta M_{E_3} = 188.93 + 14.96 = 203.89 \text{ m}$$

$$P_{E_4} = P_{E_3} + \delta P_{E_3} = 97.52 + 61.99 = 159.51 \text{ m}$$

$$\Delta M = 0 \text{ m} \quad (\text{os pontos inicial e final coincidem})$$

$$\Delta P = 0 \text{ m}$$

$$EFM = \Delta M + \sum \delta M = \delta M_{E_1} + \delta M_{E_2} + \delta M_{E_3} + \delta M_{E_4} = 0 \text{ m}$$

$$EFP = \Delta P + \sum \delta P = \delta P_{E_1} + \delta P_{E_2} + \delta P_{E_3} + \delta P_{E_4} = 0.02 \text{ m}$$

$$\sum |\delta M| = 246.38 \text{ m}$$

$$\sum |\delta P| = 220.44 \text{ m}$$

$$KM = -EFM / \sum |\delta M| = 0$$

$$KP = -EFP / \sum |\delta P| = -9.072763 \times 10^{-5}$$

$$\bar{\delta}M_{E_2} = \delta M_{E_2} + KM \times |\delta M_{E_2}| = 108.23 \text{ m}$$

$$\bar{\delta}P_{E_2} = \delta P_{E_2} + KP \times |\delta P_{E_2}| = -44.13 \text{ m}$$

$$\bar{\delta}M_{E_3} = \delta M_{E_3} + KM \times |\delta M_{E_3}| = -106.96 \text{ m}$$

$$\bar{\delta}P_{E_3} = \delta P_{E_3} + KP \times |\delta P_{E_3}| = -68.09 \text{ m}$$

$$\bar{\delta}M_{E_4} = \delta M_{E_4} + KM \times |\delta M_{E_4}| = 14.96 \text{ m}$$

$$\bar{\delta}P_{E_4} = \delta P_{E_4} + KP \times |\delta P_{E_4}| = 61.98 \text{ m}$$

$$\bar{\delta}M_{E_1} = \delta M_{E_1} + KM \times |\delta M_{E_1}| = -16.23 \text{ m}$$

$$\bar{\delta}P_{E_1} = \delta P_{E_1} + KP \times |\delta P_{E_1}| = 48.24 \text{ m}$$

$$M_{E_2} = M_{E_1} + \bar{\delta}M_{E_2} = 187.66 + 108.23 = 295.89 \text{ m}$$

$$P_{E_2} = P_{E_1} + \bar{\delta}P_{E_2} = 207.73 - 44.13 = 163.60 \text{ m}$$

$$M_{E_3} = M_{E_2} + \bar{\delta}M_{E_3} = 295.89 - 106.96 = 188.93 \text{ m}$$

$$P_{E_3} = P_{E_2} + \bar{\delta}P_{E_3} = 163.60 - 68.09 = 95.51 \text{ m}$$

$$M_{E_4} = M_{E_3} + \bar{\delta}M_{E_4} = 188.93 + 14.96 = 203.89 \text{ m}$$

$$P_{E_4} = P_{E_3} + \bar{\delta}P_{E_4} = 95.51 + 61.98 = 157.49 \text{ m}$$

## Nivelamento

Medição de desnível ou distância vertical entre planos horizontais, ou mais precisamente, entre duas superfícies de nível.

O desnível é uma medida que depende directamente do campo gravítico, pois é medida sobre a vertical do lugar entre superfícies equipotenciais.

Os diversos tipos de nivelamento baseiam-se em diferentes princípios, e consoante o princípio, assim se define o método ou o tipo de nivelamento.

**Desníveis**

{  
Níveis;  
Taquéómetros auto redutores  
Estações totais

## Nivelamento

Tipos de nivelamento

{  
- Trigonométrico (10 cm/km)  
1- teodolito + distanciómetro e alvo reflector  
2- teodolito e estadia  
3- taquéómetro e mira  
4- taquéómetro auto-reductor e mira;  
- geométrico (1 mm/km a 1 cm/km) (com níveis);  
- barométrico (1 m/km) (com altímetro de precisão);  
- hidrostático (vasos comunicantes).

Precisão do nivelamento: - alta precisão (1mm/1000 m=1 ppm);  
- média precisão (1cm/1000 m=10 ppm);  
- baixa precisão (10 cm/1000 m=100 ppm).

## **Nivelamento barométrico**

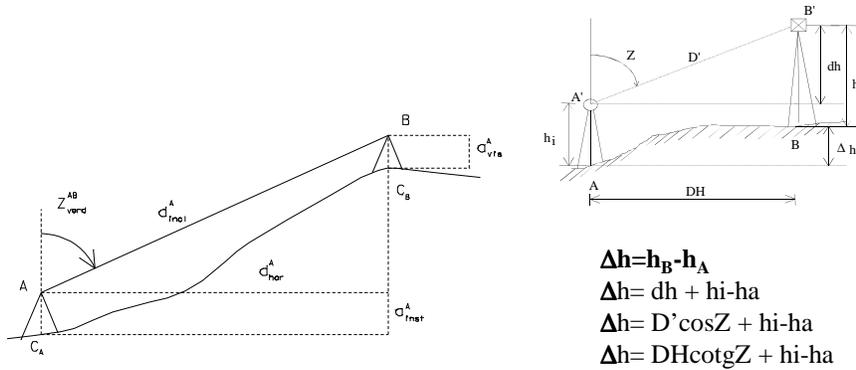
O nivelamento barométrico baseia-se numa lei física: a pressão atmosférica é igual ao peso de uma coluna cilíndrica vertical de ar, com base unitária, que atravessa a atmosfera. Este método baseia-se na relação que existe entre a diferença de nível entre dois pontos e as respectivas pressões atmosféricas, obtidas por barómetros ou altímetros (embora dependendo da temperatura e da latitude do ponto de observação, cada milímetro de variação da coluna de mercúrio corresponde aproximadamente a 11 metros de variação em altitude).

## **Nivelamento Trigonométrico**

Método de transporte de cota através da observação do ângulo zenital e distância inclinada da visada.

O desnível resulta da resolução do triângulo formado pela visada, pela intersecção dos planos vertical e horizontal da estação, e pela vertical do ponto visado.

## Nivelamento Trigonométrico



Da figura, sendo  $Z_{\text{verd}}^{AB}$  a distância zenital verdadeira (geométrica) correspondente à visada de A para B:

$$C_A + a_{\text{inst}}^A + d_{\text{incl}}^A \cos Z_{\text{verd}}^{AB} - a_{\text{vis}}^A = C_B \Rightarrow C_B - C_A = \Delta_{AB} = d_{\text{incl}}^A \cos Z_{\text{verd}}^{AB} + a_{\text{inst}}^A - a_{\text{vis}}^A = d_{\text{hor}}^A \cot Z_{\text{verd}}^{AB} + a_{\text{inst}}^A - a_{\text{vis}}^A$$

## Nivelamento Trigonométrico

Sentido de transporte de cota:

**Directo** – visada de A para B:  $h_B = h_A + \Delta h_{AB}$

**Inverso** – visada de B para A:  $h_B = h_A - \Delta h_{BA}$

Sendo  $\Delta h_{BA} = D' \cos Z_{BA}$  (a menos das alturas instrumentais)

e  $Z_{BA} = 180^\circ - Z_{AB}$

vem  $\Delta h_{BA} = D' \cos Z_{BA} = -D' \cos Z_{AB}$

logo  $\Delta h_{AB} = -\Delta h_{BA}$

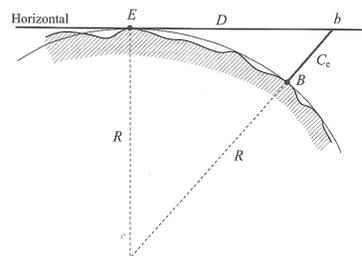
## Nivelamento Trigonométrico

A equação deduzida para obter o desnível trigonométrico entre dois pontos A e B:

$$\Delta_{AB} = d_{\text{incl}}^A \cos Z_{\text{verd}}^{AB} + a_{\text{inst}}^A - a_{\text{vis}}^A = d_{\text{hor}}^A \cot Z_{\text{verd}}^{AB} + a_{\text{inst}}^A - a_{\text{vis}}^A$$

**não inclui** dois efeitos que é fundamental considerar: um deles é consequência da curvatura da Terra – **erro de esfericidade ou depressão do horizonte** – o outro é provocado pela influência das camadas atmosféricas na propagação dos raios ópticos – **erro de refração**.

## Nivelamento Trigonométrico



**Correcção de esfericidade ou depressão do horizonte:** os pontos E e B têm a mesma cota; como a figura ilustra, quando do ponto estação E se efectua uma visada horizontal (tangente à superfície de nível em E) para o ponto B, devido à influência da curvatura terrestre parece existir entre os dois pontos uma diferença de nível igual a **C<sub>e</sub>**.

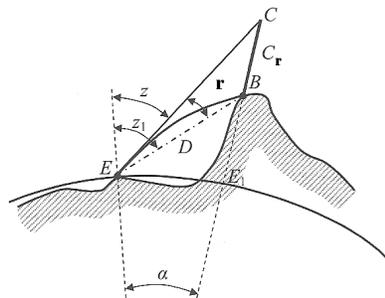
## Nivelamento Trigonométrico

O erro  $C_e$  pode ser calculado admitindo localmente a Terra como esférica por aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo OEB:  $(R+C_e)^2=R^2+C_e^2+2RC_e=R^2+D^2$ , donde  $D^2=C_e(C_e+2R)$  ou  $C_e=D^2/(C_e+2R)$  ou  $C_e \approx D^2/2R$ , pois pode desprezar-se  $C_e$  comparado com  $R$ . Esta correcção é sempre **positiva** já que o datum vertical se encontra abaixo do plano horizontal. No caso de a distância ser inclinada, a fórmula é mais extensa mas para distâncias da ordem de alguns quilómetros pode manter-se a mesma expressão.

Tomando  $R=6370$  km e exprimindo a distância  $D$  em quilómetros, tem-se

$C_e(m)=0.078D^2$ . Por exemplo, para  $D=500$  m,  $C_e=0.0195$  m  $\approx 2$  cm.

## Nivelamento Trigonométrico



A refração atmosférica provoca nos raios luminosos que atravessam a atmosfera uma trajectória curva e por esta razão a posição onde os pontos são observados não correspondem à sua posição real: o ponto B é observado numa posição aparente C, mais elevada que a real, devendo assim ser aplicada uma correcção **negativa**.

## Nivelamento Trigonométrico

Este facto deve-se à variação de densidade das várias camadas que constituem a atmosfera, que vai diminuindo (no caso mais geral) com a altitude, o que faz com que um raio luminoso vá sofrendo refrações sucessivas, definindo uma curva com concavidade voltada para o terreno (a visada que é definida é tangente a esta curva no ponto estação).

A partir de observações efectuadas por Biot, concluiu-se que o ângulo de refração  $r$  é proporcional ao ângulo  $\alpha$ , de acordo com a relação  $r = n\alpha/2$ , em que  $n$  é o **índice de refração** que traduz o estado da atmosfera no instante de observação e  $\alpha = EE_1/R \approx D/R$ , sendo  $R$  o raio médio da Terra, suposta esférica e  $D$  a distância entre os pontos  $E$  e  $B$  (a simplificação  $D = EE_1$  não introduz erro significativo), donde  $r = nD/2R$ .

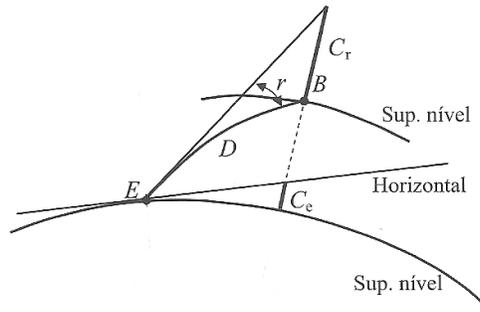
## Nivelamento Trigonométrico

Por outro lado, como  $C_r$  tem também um valor pequeno, pode considerar-se  $r = C_r/D$ .

Comparando as duas expressões obtém-se:

$$nD/2R = C_r/D \Rightarrow C_r = nD^2/2R.$$

## Nivelamento Trigonométrico



Efeito conjunto da esfericidade e da refração: no cálculo do desnível tem-se

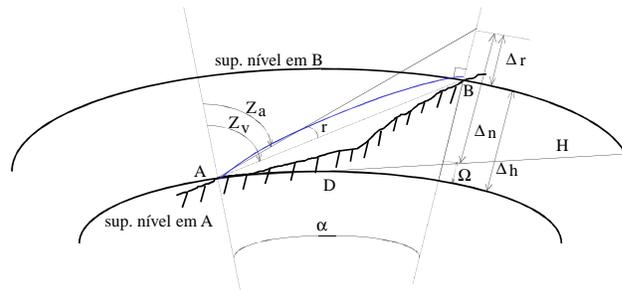
$$\Delta_{EB}^{\text{real}} = \Delta_{EB}^{\text{observado}} + C_e - C_r$$

## Nivelamento Trigonométrico

Juntando os 2 efeitos, tem-se  $\Delta_{EB}^{\text{real}} = \Delta_{EB}^{\text{observado}} + D^2(1-n)/2R$ .

O valor de  $n$  depende das características físicas instantâneas da atmosfera, tomando-se normalmente o valor médio  $n=0.14$ ; assim, usando o valor  $R=6370$  km obtém-se a expressão  $K_m = D^2(1-n)/2R = 0.000000675D_m^2$ , sendo de notar que como as duas correcções têm sinais contrários, anulam-se parcialmente (como a correcção de esfericidade tem maior magnitude, é este erro que mais influencia o resultado final; contudo, é o erro de refração que origina maior incerteza no valor calculado uma vez que o seu efeito é inconstante, dependendo de factores locais).

## Fenómenos de Influência



$$r = k\alpha = 0,07 \frac{D}{R}$$

$\Delta r$  – erro devido ao efeito da refração sobre o desnível  $\Delta r = Dr = 0,07 \frac{D^2}{R}$

$\Omega$  – erro devido ao efeito da depressão do horizonte  $\Omega = \frac{D^2}{2R}$

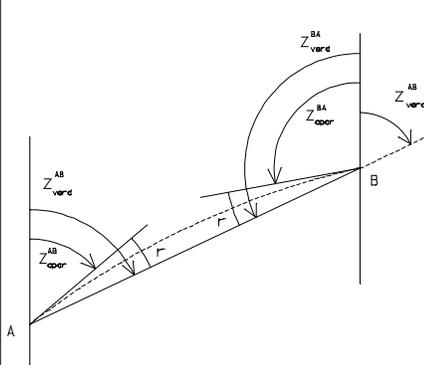
Efeito conjunto:  $\Omega - \Delta r = \frac{D^2}{2R} - 0,07 \frac{D^2}{R} = 0,43 \frac{D^2}{R}$

$$\Delta h = \Delta n + (\Omega - \Delta r)$$

$$\Delta h = \Delta n + 6,8E^{-8} D^2$$

## Nivelamento Trigonométrico

A visada de A para B está afectada pela refração, pelo que a distância zenital efectivamente medida é a distância zenital aparente  $Z_{\text{apar}}^{AB}$



$$Z_{\text{verd}}^{AB} = Z_{\text{apar}}^{AB} + r$$

$$Z_{\text{verd}}^{BA} = Z_{\text{apar}}^{BA} + r$$

$$Z_{\text{verd}}^{BA} = 180^\circ - Z_{\text{verd}}^{AB} \Rightarrow$$

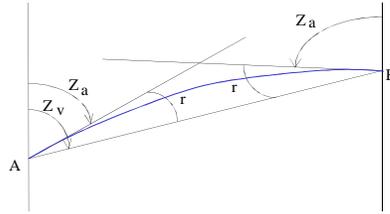
$$Z_{\text{verd}}^{AB} = 180^\circ - Z_{\text{verd}}^{BA}$$

$$Z_{\text{verd}}^{AB} = 180^\circ - (Z_{\text{apar}}^{BA} + r)$$

$$Z_{\text{verd}}^{AB} = 180^\circ - Z_{\text{apar}}^{BA} + Z_{\text{apar}}^{AB} - Z_{\text{verd}}^{AB} \Rightarrow$$

$$Z_{\text{verd}}^{AB} = \frac{Z_{\text{apar}}^{AB} + 180^\circ - Z_{\text{apar}}^{BA}}{2}$$

## Zenitais Recíprocas



A observação de zenitais recíprocas pode **atenuar** o efeito de refração

O efeito de depressão do horizonte é completamente anulado com zenitais recíprocas

$$Z_{AB} = \frac{z_{aA} + (180^\circ - z_{aB})}{2} = \frac{(z_{vA} - r) + (180^\circ - (z_{vB} - r))}{2}$$

Assumindo que os valores de (P,T,H) são iguais em A e B, os ângulos de refração são também iguais.

$$Z_{AB} = \frac{z_{vA} + (180^\circ - z_{vB})}{2}$$

## Zenitais Recíprocas e Simultâneas

A observação de zenitais recíprocas e simultâneas reduz o efeito da refração, porque as condições atmosféricas dos pontos A e B são idênticas.

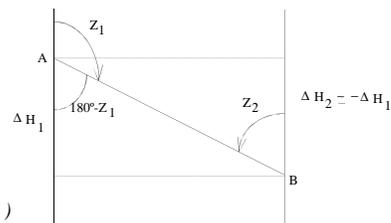
Pode-se dizer que esse efeito é quase completamente eliminado.

$$H_B = H_A + \Delta H_1 \quad H_B = H_A + \frac{\Delta H_1 - \Delta H_2}{2}$$

$$\Delta H_1 = D_1 \cos Z_1 + h_1^1 - h_A^2 + \epsilon_1$$

$$\Delta H_2 = D_2 \cos Z_2 + h_1^2 - h_A^1 + \epsilon_2$$

$$H_B = H_A + \frac{D_1 \cos Z_1 - D_2 \cos Z_2 + (h_1^1 - h_1^2) - (h_A^2 - h_A^1)}{2}$$



$$H_B = H_A + \frac{\bar{D}(\cos Z_1 - \cos Z_2)}{2} + h_{TB}^1 - h_{TB}^2$$

## Considerações

---

O valor do coeficiente de refração  $K=0,07$  é válido para as horas de maior calor, quando se verifica o máximo do gradiente vertical da temperatura. Por isso, a **observação de zenitais** deve ser feita à hora de maior calor, apesar da instabilidade da atmosfera causar erros de pontaria.

As **observações de ângulos azimutais**, pelo contrário, devem ser feitas sempre nas horas de menos calor, quando a atmosfera se apresenta estável; e de preferência pela manhã pois é quando a atmosfera está mais límpida e transparente.

Como a leitura de zenitais obriga à calagem da bolha zenital, sendo as observações feitas nas horas de calor deve de haver o cuidado de proteger a nivela para garantir a sua estabilidade. Esta precaução não é necessária para os instrumentos munidos de compensadores automáticos.