EXERCÍCIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA
FOLHA G

FERNANDO FERREIRA

MARÇO DE 2017

(1) Dado $e \in \mathbb{N}$, seja W_e o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : \varphi_e^{(1)}(x) \downarrow\}$.
   (a) Mostre que, para cada $e \in \mathbb{N}$, W_e é um conjunto recursivamente enumerável.
   (b) Mostre que existe uma função recursiva total $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tal que, para todos $x, y \in \mathbb{N}$, $W_{f(x,y)} = W_x \cap W_y$. Mostre um resultado semelhante para a união. [Sugestão: use o teorema da parametrização.]

(2) (a) Mostre que se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função (total) recursiva estritamente crescente então $im(f)$ é um conjunto recursivo.
   (b) Mostre que todo o conjunto infinito recursivamente enumerável contém um conjunto infinito recursivo.

(3) Considere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função recursiva total.
   (a) Mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{f(n)}^{(1)} \simeq \varphi_n^{(1)}$. [Use o teorema da recursão.]
   (b) Mostre que existem números arbitrariamente grandes n tais que $\varphi_{f(n)}^{(1)} \simeq \varphi_n^{(1)}$. [Dado $k \in \mathbb{N}$, seja $l \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_l^{(1)} \neq \varphi_0^{(1)}$, $\varphi_l^{(1)} \neq \varphi_1^{(1)}$, $\ldots$, $\varphi_l^{(1)} \neq \varphi_k^{(1)}$ e considere $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g(x) = l$, para $x \leq k$, e $g(x) = f(x)$, para $x > k$.]

(4) Mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{dom} \varphi_n^{(1)} = \{n\}$. [Use o teorema da recursão.]

(5) Uma *árvore binária* é um subconjunto T não vazio de $2^{<\mathbb{N}}$ tal que, se $\sigma \in T$ e ρ é um segmento inicial de σ, então $\rho \in T$. Um *caminho infinito* numa árvore binária T é uma função $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1)\rangle \in T$.
   (a) Sejam X e Y dois subconjuntos de $\mathbb{N}$ recursivamente enumeráveis e recursivamente inseparáveis. Suponha que $X = \{n \in \mathbb{N} : \exists k\, P(n, k)\}$ e $Y = \{n \in \mathbb{N} : \exists k\, Q(n, k)\}$, onde P e Q são relações recursivas. Defina $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ do seguinte modo: $\langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}\rangle \in T$ se, e somente se,
   $\forall i < n\, (\delta_i = 0 \to \forall k < n \neg P(i, k))$, e
   $\forall i < n\, (\delta_i = 1 \to \forall k < n \neg Q(i, k))$.
   Mostre que T é uma árvore recursiva infinita.
   (b) Mostre que T não tem caminhos infinitos recursivos.

(6) Mostre a seguinte propriedade de *redução*: dados conjuntos recursivamente enumeráveis X e Y, existem conjuntos recursivamente enumeráveis disjuntos A e B tais que $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ e $A \cup B = X \cup Y$.