ENUMERABILIDADE RECURSIVA

FERNANDO FERREIRA

Definição 1. *Uma relação* $R \subseteq \mathbb{N}^k$*,* $k > 0$*, é (ou* está em*)* Σ_1 *se existe uma relação recursiva* $Q \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ *tal que, para todo o tuplo* $(x_1, \ldots, x_k)$*,*

$$R(x_1, \ldots, x_k) \textit{ se, e somente se } \exists y Q(x_1, \ldots, x_k, y).$$

Uma classe de exemplos de relações em Σ_1 é constituída pelas relações da forma $\psi(x_1, \ldots, x_k)\downarrow$, onde ψ é uma função recursiva parcial. Dito de outro modo, os domínios de funções recursivas parciais estão em Σ_1. Com efeito, dado $e \in \mathbb{N}$ um índice para ψ, tem-se a equivalência:

$$\psi(x_1, \ldots, x_k)\downarrow \text{ se, e somente se, } \exists n[(State(e, x_1, \ldots, x_k, n))_0 = 0].$$

Note-se que a relação (de $x_1, \ldots, x_k, n$) acima, entre parêntesis retos, é uma relação recursiva (é, mesmo, recursiva primitiva). Esta classe de exemplos é, de facto, completamente geral:

Proposição 1. *Um conjunto* $X \subseteq \mathbb{N}^k$ *está em* Σ_1 *se, e somente se, é o domínio de alguma função recursiva parcial* k*-ária.*

Demonstração. Acabámos de observar que a direção da direita para a esquerda está correta. Reciprocamente, seja

$$X = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k : \exists y Q(x_1, \ldots, x_k, y)\},$$

com Q uma relação recursiva. Considere-se ψ definida por,

$$\psi(x_1, \ldots, x_k) \simeq \text{ menor } y \text{ tal que } Q(x_1, \ldots, x_k, y).$$

Claro que ψ é recursiva parcial e $X = dom(\psi)$. □

Este resultado, juntamente com a discussão do exemplo acima, tem imediatamente um corolário que é ocasionalmente útil:

Corolário 1. *Se uma relação* $R \subseteq \mathbb{N}^k$ *está em* Σ_1*, então existe uma relação* recursiva primitiva $Q \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ *tal que, para todo o tuplo* $(x_1, \ldots, x_k)$*,*

$$R(x_1, \ldots, x_k) \textit{ se, e somente se } \exists y Q(x_1, \ldots, x_k, y).$$

Vamos agora discutir algumas propriedades dos predicados em Σ_1.

Proposição 2. *Têm-se as seguintes propriedades:*

1. *Toda a relação recursiva está em* Σ_1*.*
2. *A conjunção e a disjunção de relações em* Σ_1 *é uma relação em* Σ_1*.*
3. *A quantificação limitada duma relação em* Σ_1 *é uma relação em* Σ_1
4. *A quantificação existencial duma relação em* Σ_1 *é uma relação em* Σ_1*.*

Demonstração. O primeiro item é claro, pois é sempre possível juntar quantificações "inertes". Com efeito, se $R(x_1, \ldots, x_k)$ é uma relação recursiva, então a mesma relação também se escreve da forma $\exists y[R(x_1, \ldots, x_k) \wedge y = y]$.

Para mostrar (2), sejam P_1 e P_2 duas relações (unárias, para simplificar) em Σ_1. Tomem-se, então, relações recursivas binárias Q_1 e Q_2 tais que se tenha: $P_1(x)$ sse $\exists y Q_1(x, y)$; e, $P_2(x)$ sse $\exists y Q_2(x, y)$. Tem-se claramente:

$$P_1(x) \wedge P_2(x) \text{ sse } \exists w[Q_1(x, (w)_0) \wedge Q_2(x, (w)_1)]; \text{ e}$$

$P_1(x) \vee P_2(x)$ sse $\exists y[Q_1(x,y) \vee Q_2(x,y)]$.

Suponhamos agora que se tem a relação $P(x,v)$ definida por $\exists y Q(x,v,y)$, com Q um predicado recursivo. Um pouco de reflexão permite-nos concluir que:

$\forall u < v P(x,u)$ sse $\exists z \forall u < v \exists y < z Q(x,u,y)$.

Note-se que a relação ternária (em x, v e z) "$\forall u < v \exists y < z Q(x,u,y)$" ainda é recursiva. O caso do quantificador existencial limitado conclui-se facilmente de (4). Para ver esta última propriedade, seja $P(x,v)$ como acima. Vem que $\exists v P(x,v)$ é equivalente a $\exists w Q(x,(w)_0,(w)_1)$. □

Nem toda a relação em Σ_1 é recursiva. Por exemplo, o conjunto H do problema da paragem está em Σ_1 pois é, por definição, o domínio da função recursiva parcial $x \rightsquigarrow \phi_x^{(1)}(0)$ e, como sabemos, H não é recursivo.

Proposição (Uniformização). *Seja $R \subseteq \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$, $k > 0$, uma relação em Σ_1. Então existe uma função recursiva parcial k-ária ψ tal que:*

(a) $\psi(x_1, \ldots, x_k) \simeq y \to R(x_1, \ldots, x_k, y)$;
(b) $\exists y R(x_1, \ldots, x_k, y) \to \psi(x_1, \ldots, x_k)\downarrow$.

A uma função ψ com as propriedades acima chama-se uma uniformização *da relação R.*

Demonstração. Seja Q uma relação recursiva tal que $R(x_1, \ldots, x_k, y)$ sse $\exists z Q(x_1, \ldots, x_k, y, z)$. Defina-se:

$\psi(x_1, \ldots, x_k) \simeq (\text{menor } w \text{ tal que } Q(x_1, \ldots, x_k, (w)_0, (w)_1))_0$.

Claramente, ψ tem as propriedades desejadas. □

Proposição 3. *Uma função parcial ψ é recursiva se, e somente se, o seu gráfico é um conjunto em Σ_1, i.e., se o seguinte conjunto está em Σ_1:*

$\{(x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathbb{N}^{k+1} : \psi(x_1, \ldots, x_k) \simeq y\}$.

Demonstração. Para simplificar notação, supomos $k = 1$. Admitamos que ψ é recursiva parcial. Seja e um índice para ψ. Então (x,y) está no gráfico de ψ se, e somente se,

$$\exists n[(State(e,x,n))_0 = 0 \wedge \forall k < n(State(e,x,k))_0 \neq 0 \wedge Output(e,x,n) = y].$$

Como a relação ternária (de x, y e n) entre parêntesis retos é recursiva, conclui-se que o gráfico de ψ está em Σ_1.

Reciprocamente, suponhamos que o gráfico de ψ está em Σ_1. Ora, pela proposição anterior, existe uma função recursiva parcial que uniformiza esse gráfico. Trata-se, claro, da própria função ψ. □

Proposição 4. *Se uma relação $R \subseteq \mathbb{N}^k$ e a sua negação estão em Σ_1, então R é recursiva.*

Demonstração. Sejam Q e S relações recursivas tais que, para todo o k-tuplo $(x_1, \ldots, x_k)$, $R(x_1, \ldots, x_k)$ sse $\exists y Q(x_1, \ldots, x_k, y)$, e $\neg R(x_1, \ldots, x_k)$ sse $\exists y S(x_1, \ldots, x_k, y)$. Então a função que a cada k-tuplo $(x_1, \ldots, x_k)$ faz corresponder o número

$\chi_Q(x_1, \ldots, x_k, \text{menor } y \text{ tal que } [Q(x_1, \ldots, x_k, y) \vee S(x_1, \ldots, x_k, y)])$

é uma função recursiva total sendo, de facto, a função característica de R. □

Deste resultado conclui-se que se uma relação R está em Σ_1 e não é recursiva então $\neg R$ não está em Σ_1. Em particular, $\mathbb{N} \setminus H$ não está em Σ_1.

Os subconjuntos de $\mathbb{N}$ (relações unárias) que estão em Σ_1 são tradicionalmente chamados de conjuntos *recursivamente enumeráveis*. Esta terminologia explica-se pela caracterização (4) abaixo. Com efeito, segundo esta caracterização, um conjunto não vazio $X \subseteq \mathbb{N}$ é Σ_1 se, e somente se, os seus elementos se puderem enumerar

$f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots$

por meio duma função recursiva total f.

Proposição 5. *Para todo $X \subseteq \mathbb{N}$ as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *X é um conjunto Σ_1.*
(2) *X é o domínio de alguma função recursiva parcial.*
(3) *X é a imagem de alguma função recursiva parcial.*
(4) *$X = \emptyset$ ou X é a imagem de alguma função recursiva total.*
(5) *X é finito ou X é a imagem de alguma função recursiva total injetiva.*

Demonstração. Já mostrámos a equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (2) na Proposição 1, enquanto que as implicações (5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) são óbvias. Para mostrar que (3) $\Rightarrow$ (2), suponhamos que $X = im(\psi)$, para alguma função recursiva parcial ψ. Pela Proposição 3, a relação $\{(x, y) : \psi(y) \simeq x\}$ está em Σ_1. Qualquer função recursiva parcial que uniformize esta relação (e, como vimos, há pelo menos uma) tem como domínio X.

Finalmente, resta argumentar a implicação (1) $\Rightarrow$ (5). Suponhamos que existe uma relação binária recursiva R tal que se tenha: $x \in X$ se, e somente se, $\exists y R(x, y)$. Admitamos, agora, que X não é finito. Então o conjunto $I = \{2^x 3^y : R(x, y) \wedge \forall z < y \neg R(x, z)\}$ é um subconjunto recursivo infinito de $\mathbb{N}$. Conclui-se que a seguinte função recursiva ψ é total:

$$\psi(w) = \text{menor } z \text{ tal que } (z \geq w \wedge z \in I).$$

Define-se agora, por recursão primitiva, a função total $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ da seguinte maneira: $f(0)$ é o menor elemento de I; e $f(n+1) = \psi(1 + f(n))$. Claro que f enumera, de forma estritamente crescente (e, portanto, injetiva), os elementos de I. Daqui sai que a função $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ definida por $g(n) = (f(n))_0$ é recursiva total, injetiva e tem como imagem X. □

Definição 2. *Dois subconjuntos disjuntos A e B de $\mathbb{N}$ dizem-se* recursivamente inseparáveis *se não existir nenhum conjunto recursivo X tal que $A \subseteq X$ e $X \cap B = \emptyset$.*

Proposição 6. *Os conjuntos $\{x \in \mathbb{N} : \varphi_x^{(1)}(x) \simeq 0\}$ e $\{x \in \mathbb{N} : \varphi_x^{(1)}(x) \simeq 1\}$ são conjuntos recursivamente enumeráveis que são recursivamente inseparáveis.*

Demonstração. Designemos por A o primeiro conjunto acima e por B o segundo. Claro que são conjuntos recursivamente enumeráveis disjuntos. Vejamos que A e B são recursivamente inseparáveis. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe um conjunto recursivo X tal que $A \subseteq X$ e $B \cap X = \emptyset$. Seja e um índice para a função recursiva χ_X, a função característica de X. Dito de outro modo, $\varphi_e^{(1)}$ é a função (necessariamente total) χ_X. Então $\varphi_e^{(1)}(e)$ está definido e o seu valor é 0 ou 1. Se é 0, vem $e \in A$ e $\chi_X(e) = 0$, o que vai contra a inclusão $A \subseteq X$. Se é 1, vem $e \in B$ e $\chi_X(e) = 1$, o que contradiz o facto de X e B serem disjuntos. □