Folha **I** de exercícios

Fernando Ferreira

Introdução à Teoria dos Números
Abril de 2017

1. Seja $n = mr$ com $m, r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $m \perp r$. Considere-se $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \perp n$. Mostre que a é resíduo quadrático módulo n se, e somente se, a é resíduo quadrático módulo m e a é resíduo quadrático módulo r.

2. Seja p um primo ímpar. Mostre que, para qualquer inteiro m co-primo com p, o número de soluções da equação $x^2 \equiv m \pmod p$ é $1 + \left(\frac{m}{p}\right)$.

3. Calcule os seguintes símbolos de Legendre: $\left(\frac{3}{97}\right)$, $\left(\frac{3}{389}\right)$, $\left(\frac{5!}{7}\right)$, $\left(\frac{11}{37}\right)$, $\left(\frac{97}{101}\right)$, $\left(\frac{31}{167}\right)$ e $\left(\frac{5}{160465489}\right)$.

4. Seja p primo com $p \equiv 3 \pmod 4$ e considere-se a, com $a \perp p$, um resíduo quadrático. Mostre que $a^{(p+1)/4}$ é uma raíz quadrada de a módulo p. (Sugestão: use o critério de Euler.)

5. Use a lei da reciprocidade quadrática de Gauss para mostrar que, para p primo com ≥ 5,

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \equiv 1, 11 \pmod{12} \\ -1 & \text{se } p \equiv 5, 7 \pmod{12} \end{cases}$$

6. Use a lei da reciprocidade quadrática para caracterizar os primos p, com $p > 5$, para os quais 5 é resíduo quadrático. (Sugestão: inspire-se no exercício anterior.)

7. Mostre que 7 é um resíduo quadrático módulo um primo ímpar p diferente de 7 se, e somente se, p é congruente com 1, 3, 9, 19, 25 ou 27 módulo 28. (Sugestão: inspire-se nos exercícios anteriores.)

8. Sejam m e n números naturais ímpares. Mostre que $\frac{mn-1}{2}$ tem a mesma paridade de $\frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2}$.

9. Calcule o símbolo de Jacobi $\left(\frac{123}{917}\right)$. Deste cálculo pode concluir que 123 é resíduo módulo 917 ou que 123 é não resíduo quadrático módulo 917?

10. Calcule os seguintes símbolos de Legendre sem fatorizar números (excetuando fatores que são potências de 2): $\left(\frac{91}{167}\right)$, $\left(\frac{1801}{8191}\right)$, $\left(\frac{3083}{3911}\right)$ e $\left(\frac{43691}{65537}\right)$.