REPRESENTABILIDADE

FERNANDO FERREIRA

Definição 1. *Seja* T *um conjunto de fórmulas fechadas da linguagem da aritmética. Um predicado numérico* $P(x_1, \ldots, x_k)$ *diz-se* representável em T *se existir uma fórmula* $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ *da linguagem da aritmética tal que, para todos os números naturais* $n_1, \ldots, n_k$*:*

(a) *Se* $P(n_1, \ldots, n_k)$ *então* $\mathsf{T} \vdash \phi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$.
(b) *Se* $\neg P(n_1, \ldots, n_k)$ *então* $\mathsf{T} \vdash \neg\phi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$.

Se T é consistente, as duas implicações acima são realmente equivalências. Note-se, também, que se T é o conjunto $\mathsf{Vd}_{\mathbb{N}}$ das verdades aritméticas, a noção de representabilidade coincide com a noção de definibilidade no modelo standard $\mathbb{N}$, i.e., com a noção de definibilidade aritmética. No que se segue vamos estar interessados em representabilidade em Q. Neste caso, deve atentar-se à forma aritmética das cláusulas acima. Assim, tanto a cláusula $\mathsf{Q} \vdash \phi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$ como a cláusula $\mathsf{Q} \vdash \neg\phi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$ (em $n_1, \ldots, n_k$) estão em Σ_1, o que acarreta o seguinte facto: um predicado representável em Q é necessariamente recursivo (o recíproco também vale, como veremos). Portanto, convém mencioná-lo explicitamente, a representabilidade em Q é uma noção bastante diferente da definibilidade aritmética.

Definição 2. *Uma função numérica parcial k-ária f diz-se (fortemente)* representável em Q *se existir uma fórmula* $\psi(x_1, \ldots, x_k, y)$ *da linguagem da aritmética tal que, para todos os números naturais* $n_1, \ldots, n_k, m$*,*

$$f(n_1, \ldots, n_k) \simeq m \text{ se, e somente se, } \mathsf{Q} \vdash \forall y(\psi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, y) \leftrightarrow y = \overline{m}).$$

Novamente, chamamos a atenção para a forma aritmética da cláusula (em $n_1, \ldots, n_k, m$) acima: $\mathsf{Q} \vdash \forall y(\psi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, y) \leftrightarrow y = \overline{m})$ é uma cláusula do tipo Σ_1. Por conseguinte, se f é representável em Q então o seu gráfico está em Σ_1 e, por conseguinte, f é uma função *recursiva* parcial. Como veremos, o recíproco também vale.

Necessitamos do seguinte facto essencial:

Proposição 1. *Seja* ϕ *uma fórmula fechada rudimentar. Então,* $\models_{\mathbb{N}} \phi$ *sse* $\mathsf{Q} \vdash \phi$.

A direcção da direita para a esquerda é trivial, sendo mesmo correcta para qualquer fórmula fechada ϕ. Dá um pouco de trabalho mostrar a direcção contrária. Para isso, necessitamos dos resultados do seguinte lema:

Lema 1. *Têm-se as seguintes propriedades:*

1. *Para todos* $n, m \in \mathbb{N}$*, se* $n \neq m$ *então* $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$.
2. *Para todos* $n, m \in \mathbb{N}$*,* $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$.
3. *Para todos* $n, m \in \mathbb{N}$*,* $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{n \cdot m}$.
4. *Para todos* $n, m \in \mathbb{N}$*, se* $n < m$ *então* $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} < \overline{m}$.
5. *Para todos* $n, m \in \mathbb{N}$*, se* $n \not< m$ *então* $\mathsf{Q} \vdash \neg(\overline{n} < \overline{m})$.
6. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathsf{Q} \vdash \forall x(x < \overline{n+1} \leftrightarrow x = 0 \vee \cdots \vee x = \overline{n})$.

Demonstração. Antes de mais, recordemos que, por definição de numeral, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n+1}$ é o termo $\overline{n}'$. (1) argumenta-se por indução em n. Se $n = 0$, o resultado é consequência de (Q1). Suponhamos que $n + 1 \neq m$. Se $m = 0$, o resultado sai novamente por (Q1). Caso contrário,

$m = k+1$ para certo k. Logo, $n \neq k$. Por hipótese de indução, vem $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} \neq \overline{k}$. Por (Q2), sai $\mathsf{Q} \vdash \overline{n}' \neq \overline{k}'$, i.e., $\mathsf{Q} \vdash \overline{n+1} \neq \overline{m}$. (2) vê-se facilmente por indução em m usando (Q3) e (Q4). (3) também se vê por indução em m, usando (Q5), (Q6) e (2) atrás. Vamos, a título de exemplo, argumentar o passo de indução. O termo $\overline{n} \cdot \overline{m+1}$ é (por definição de numeral) $\overline{n} \cdot \overline{m}'$. Por (Q6), $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} \cdot \overline{m+1} = \overline{n} \cdot \overline{m} + \overline{n}$. Ora, por hipótese de indução, $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{n \cdot m}$. Logo, pelos axiomas da igualdade, podemos concluir que $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} \cdot \overline{m+1} = \overline{n \cdot m} + \overline{n}$. Por (2), $\mathsf{Q} \vdash \overline{n \cdot m} + \overline{n} = \overline{n(m+1)}$. Novamente, pelos axiomas da iguladade, conclui-se $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} \cdot \overline{m+1} = \overline{n \cdot (m+1)}$, como se queria. As propriedades (4) e (6) argumentam-se por indução em m, invocando (Q7) e (Q8). Para ver (5), observe-se em primeiro lugar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{Q} \vdash \overline{n} \not< \overline{n}$. Isto é consequência de (Q7) para o caso $n = 0$ e de (6) e (1) para o caso $n \neq 0$. Com este resultado, (5) argumenta-se facilmente por indução em m. □

Demonstração da proposição. Em primeiro lugar vamos argumentar que se tem $\mathsf{Q} \vdash t = \overline{t^{\mathbb{N}}}$, para todo o termo fechado t. A demonstração efectua-se por indução na complexidade do termo. O caso base, quando se trata do termo 0, é óbvio. Se tomarmos um termo fechado da forma t', note-se que o número $(t')^{\mathbb{N}}$ é, por definição de interpretação *standard*, $t^{\mathbb{N}} + 1$. Assim, o termo fechado $\overline{(t')^{\mathbb{N}}}$ é o termo $\overline{t^{\mathbb{N}} + 1}$, o qual (por definição de numeral) é $(\overline{t^{\mathbb{N}}})'$. Ora, por hipótese de indução, $\mathsf{Q} \vdash t = \overline{t^{\mathbb{N}}}$. Portanto, $\mathsf{Q} \vdash t' = \overline{(t')^{\mathbb{N}}}$. Os casos da soma e multiplicação são simples consequências de (2) e (3) do lema anterior.

Com este resultado e (4) do lema anterior, facilmente se conclui que, para todo o par de termos fechados t e q, (i) se $\models_{\mathbb{N}} t = q$, então $\mathsf{Q} \vdash t = q$; e (ii) se $\models_{\mathbb{N}} t < q$ então, $\mathsf{Q} \vdash t < q$. Usando ainda o mesmo resultado e (1) e (5) do lema anterior, também se tem, para todo o par de termos fechados t e q, (iii) se $\models_{\mathbb{N}} t \neq q$, então $\mathsf{Q} \vdash t \neq q$; e (iv) se $\models_{\mathbb{N}} t \not< q$, então $\mathsf{Q} \vdash \neg(t < q)$. Estes casos constituem o caso base duma demonstração por indução na complexidade das fórmulas de que se tem simultaneamente:

(a) Se $\models_{\mathbb{N}} \phi$, então $\mathsf{Q} \vdash \phi$;
(b) Se $\models_{\mathbb{N}} \neg\phi$, então $\mathsf{Q} \vdash \neg\phi$,

para fórmulas rudimentares ϕ. O passo de indução para a negação é óbvio, assim como os casos que advêm dos restantes conectivos Booleanos. Resta considerar as quantificações limitadas. Suponhamos que ϕ é $\forall x < t\, \psi(x)$ (o caso existencial é análogo) e que $\models_{\mathbb{N}} \phi$. Então, para todo o número $k < t^{\mathbb{N}}$, tem-se $\models_{\mathbb{N}} \psi(\overline{k})$. Por hipótese de indução, $\mathsf{Q} \vdash \psi(\overline{k})$. Agora aplica-se (6) do lema anterior (e (Q7), se $t^{\mathbb{N}} = 0$) para obter $\mathsf{Q} \vdash \forall x < t\, \psi(x)$. Suponhamos agora que $\models_{\mathbb{N}} \neg\phi$. Então existe $k < t^{\mathbb{N}}$ tal que $\models_{\mathbb{N}} \neg\psi(\overline{k})$. Por hipótese de indução sai $\mathsf{Q} \vdash \neg\psi(\overline{k})$ e, *a fortiori*, $\mathsf{Q} \vdash \exists x < t \neg\psi(x)$. Logo, $\mathsf{Q} \vdash \neg\phi$. □ (da Proposição)

Corolário 1. *Todo o predicado rudimentar é representável em* Q.

Demonstração. Seja $P(x_1, \ldots, x_k)$ um predicado rudimentar. Então existe uma fórmula rudimentar $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ tal que, para todos os números naturais $n_1, \ldots, n_k$, se tem: $P(n_1, \ldots, n_k)$ sse $\models_{\mathbb{N}} \phi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$. Agora, se $P(n_1, \ldots, n_k)$, pela proposição, vem $\mathsf{Q} \vdash \phi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$. Por outro lado, se $\neg P(n_1, \ldots, n_k)$ vem $\models_{\mathbb{N}} \neg\phi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$. Como $\neg\phi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$ ainda é uma fórmula rudimentar (fechada), novamente pela proposição anterior, vem $\mathsf{Q} \vdash \neg\phi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$. □

Corolário 2. *Seja* ϕ *uma fórmula fechada* $\exists$*-rudimentar. Então,* $\models_{\mathbb{N}} \phi$ *sse* $\mathsf{Q} \vdash \phi$.

Demonstração. Seja ϕ da forma $\exists x \psi(x)$, com $\psi(x)$ uma fórmula rudimentar. Se $\models_{\mathbb{N}} \phi$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\models_{\mathbb{N}} \psi(\overline{n})$. Pela proposição anterior, $\mathsf{Q} \vdash \psi(\overline{n})$ e, por conseguinte, $\mathsf{Q} \vdash \phi$. O recíproco é imediato pois Q é aritmeticamente verdadeira. □

Deve observar-se que, ao contrário dos predicados rudimentares, os predicados $\exists$-rudimentares não são necessariamente representáveis em Q, pois há conjuntos recursivamente enumeráveis que não são recursivos. Estamos agora em condições de mostrar o seguinte resultado essencial:

Teorema 1. *Toda a função recursiva parcial é (fortemente) representável em* Q .

Demonstração. Seja f uma função recursiva parcial (unária, para simplificar a notação). Como sabemos o seu gráfico está em Σ_1 e, portanto, é definível por uma fórmula $\exists$-rudimentar, i.e., da forma $\exists z\theta(x,y,z)$, com θ uma fórmula rudimentar. Assim, tem-se $f(n) \simeq m$ sse $\models_{\mathbb{N}} \exists z\theta(\overline{n},\overline{m},z)$.

Considerem-se as fórmulas:

$$\psi(x,w) := \exists y \leq w \exists z \leq w\, \theta(x,y,z) \quad \text{e}$$
$$\rho(x,w) := \psi(x,w) \wedge \forall u < w \neg\psi(x,u).$$

Suponhamos que $f(n) \simeq m$. Com esta hipótese, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\models_{\mathbb{N}} \rho(\overline{n},\overline{k})$. Dada a forma das fórmulas abaixo (são rudimentares) e o facto delas serem aritmeticamente verdadeiras, tem-se:

(i) $\mathsf{Q} \vdash \rho(\overline{n},\overline{k})$
(ii) $\mathsf{Q} \vdash \psi(\overline{n},\overline{k})$
(iii) para todo $i < k$, $\mathsf{Q} \vdash \neg\psi(\overline{n},\overline{i})$
(iv) $\mathsf{Q} \vdash \overline{m} \leq \overline{k}$
(v) $\mathsf{Q} \vdash \exists z \leq \overline{k}\, \theta(\overline{n},\overline{m},z)$
(vi) para todo $j \neq m$, $\mathsf{Q} \vdash \neg\exists z \leq \overline{k}\, \theta(\overline{n},\overline{j},z)$

Vamos agora mostrar que

(vii) $\mathsf{Q} \vdash \forall w(\rho(\overline{n},w) \rightarrow w = \overline{k})$

Por (ii), $\mathsf{Q} \vdash \forall w(\overline{k} < w \rightarrow \exists u < w\, \psi(\overline{n},u))$ e, por conseguinte, $\mathsf{Q} \vdash \forall w(\overline{k} < w \rightarrow \neg\rho(\overline{n},w))$. Por outro lado, por (iii), para $i < k$ tem-se $\mathsf{Q} \vdash \neg\psi(\overline{n},\overline{i})$. Logo, para $i < k$, $\mathsf{Q} \vdash \neg\rho(\overline{n},\overline{i})$. Usando (6) do lema desta secção (e, no caso $k = 0$, o axioma Q7), vem $\mathsf{Q} \vdash \forall w(w < \overline{k} \rightarrow \neg\rho(\overline{n},w))$. Agora, pelo axioma (Q9), podemos concluir (vii).

Considere-se, agora, a fórmula $\phi(x,y) := \exists w(\rho(x,w) \wedge y \leq w \wedge \exists z \leq w\, \theta(x,y,z))$. Vamos mostrar que $\mathsf{Q} \vdash \forall y(\phi(\overline{n},y) \leftrightarrow y = \overline{m})$. Por (i), (iv) e (v) tem-se $\mathsf{Q} \vdash \phi(\overline{n},\overline{m})$. Resta ver que $\mathsf{Q} \vdash \forall y(\phi(\overline{n},y) \rightarrow y = \overline{m})$. Ora, por (vii), $\mathsf{Q} \vdash \forall y\,(\phi(\overline{n},y) \rightarrow y \leq \overline{k} \wedge \exists z \leq \overline{k}\, \theta(\overline{n},y,z))$. Por (1) e (6) do lema desta secção e por (vi), conclui-se $\mathsf{Q} \vdash \forall y\,(y \leq \overline{k} \rightarrow y = \overline{m} \vee \neg\exists z \leq \overline{k}\, \theta(\overline{n},y,z))$. Isto permite concluir o desejado.

Demonstrámos o seguinte: se $f(n) \simeq m$, então $\mathsf{Q} \vdash \forall y(\phi(\overline{n},y) \leftrightarrow y = \overline{m})$. O recíproco deste resultado segue-se imediatamente do facto de Q ser aritmeticamente verdadeira. $\square$

Proposição 2. *Todo o predicado recursivo é representável em* Q.

Demonstração. Seja R um predicado k-ário recursivo. Por definição, a função característica χ_R é recursiva (total). Pela proposição anterior, χ_R é representável por uma certa fórmula $\rho(x_1,\ldots,x_k,y)$. Facilmente se vê que a fórmula $\rho(x_1,\ldots,x_k,\overline{1})$ representa R em Q (usa-se o facto de que $\mathsf{Q} \vdash \overline{0} \neq \overline{1}$). $\square$