O TEOREMA DA INDECIDIBILIDADE DE CHURCH

FERNANDO FERREIRA

Vamos apresentar de seguida uma versão fortalecida do Primeiro Teorema da Incompletude:

Proposição 1. *Os conjuntos*

$C = \{\#(\phi) : \phi$ é fórmula fechada e $\mathsf{Q} \vdash \phi\}$ *e*

$R = \{\#(\phi) : \phi$ é fórmula fechada e $\mathsf{Q} \vdash \neg\phi\}$

são recursivamente inseparáveis.

Demonstração. Sejam A e B dois conjuntos disjuntos recursivamente enumeráveis que sejam recursivamente inseparáveis. Vamos argumentar que se conseguíssemos separar C e R por um conjunto recursivo X, então também poderíamos separar A e B por um conjunto recursivo. Sejam S e T duas relações binárias recursivas, a primeira das quais representada em Q pela fórmula $\sigma(x, y)$, tais que,

(1) $n \in A$ se, e somente se, $\exists y\, S(n, y)$; e
(2) $n \in B$ se, e somente se, $\exists y\, T(n, y)$;

para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere-se a função recursiva parcial ϕ definida por:

$f(n) \simeq$ o menor y tal que $S(n, y) \vee T(n, y)$.

Note-se que $dom(f) = A \cup B$. Seja $\phi(x, y)$ uma fórmula que represente em Q a função f. Vamos ver que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

(a) Se $n \in A$ então $\mathsf{Q} \vdash \exists y(\phi(\overline{n}, y) \wedge \sigma(\overline{n}, y))$.
(b) Se $n \in B$ então $\mathsf{Q} \vdash \neg\exists y(\phi(\overline{n}, y) \wedge \sigma(\overline{n}, y))$.

Nesta situação, é claro que o conjunto recursivo

$\{n \in \mathbb{N} : \#(\exists y(\phi(\overline{n}, y) \wedge \sigma(\overline{n}, y))) \in X\}$

separa A e B. Como se pretende.

Basta, pois, mostrar (a) e (b). Seja $n \in A$. Por (1), tome-se o menor m tal que $S(n, m)$. Tem-se $\mathsf{Q} \vdash \sigma(\overline{n}, \overline{m})$. Também se tem $f(n) \simeq m$ e, portanto, $\mathsf{Q} \vdash \phi(\overline{n}, \overline{m})$. Sai o pretendido. Seja, agora, $n \in B$. Por (2), tome-se o menor m tal que $T(n, m)$. Note-se que $\neg S(n, m)$ e, portanto, $\mathsf{Q} \vdash \neg\sigma(\overline{n}, \overline{m})$. Também se tem $f(n) \simeq m$ e, por conseguinte, $\mathsf{Q} \vdash \forall y(\phi(\overline{n}, y) \to y = \overline{m})$. Logo, $\mathsf{Q} \vdash \forall y(\phi(\overline{n}, y) \to \neg\sigma(\overline{n}, y))$. Conclui-se que $\mathsf{Q} \vdash \neg\exists y(\phi(\overline{n}, y) \wedge \sigma(\overline{n}, y))$. ☐

Definição 1. *Uma teoria consistente* T *diz-se* essencialmente indecidível *se nenhuma teoria consistente que a contenha é decidível.*

Corolário 1. *A teoria dada por* Q *é essencialmente indecidível.*

Demonstração. Uma teoria consistente e decidível que contivesse Q separaria (recursivamente) C e R. ☐

Corolário 2. *A aritmética de Peano* PA *é indecidível.*

Também se tem, como corolário, a versão de Rosser do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel:

Primeiro Teorema da Incompletude (versão de Rosser). *Seja* T *uma teoria consistente, recursivamente axiomatizável, que contenha* Q. *Então* T *não é uma teoria completa.*

Demonstração. Basta observar que se T fosse completa então seria decidível, o que não pode ser pela indecidibilidade essencial de Q . □

Como já se discutiu, o problema de saber se uma fórmula do cálculo proposicional é uma tautologia é um problema decidível. Nos anos vinte do século passado, uma questão central da lógica matemática, historicamente conhecida por *Entscheidungsproblem*, era a de saber se o problema análogo para o cálculo de predicados também é decidível. No que se segue mostramos que, caso a linguagem contenha a linguagem da aritmética (i.e., que seja uma linguagem com igualdade e tenha pelo menos uma constante, um símbolo funcional unário, dois símbolos funcionais binários e um símbolo relacional binário), então o *Entscheidungsproblem* é indecidível. Numa destas linguagens (com um número finito de símbolos não lógicos), tem-se:

Teorema da Indecidibilidade de Church. *O conjunto das verdades lógicas do cálculo de predicados com igualdade é indecidível.*

Demonstração. O problema de ser membro da teoria Q é redutível ao problema de ser verdade lógica do cálculo de predicados com igualdade, pois uma fórmula fechada ϕ está em Q se, e somente se, o condicional

$$[J1 \wedge J2 \wedge J3 \wedge J4 \wedge J5 \wedge J6 \wedge J7 \wedge J8 \wedge J9] \to \phi$$

é uma verdade lógica do cálculo de predicados com igualdade (onde os Js constituem os nove axiomas de J). Note-se que a função que a cada (número de Gödel de) ϕ faz corresponder o (número de Gödel do) condicional acima é claramente recursiva. O resultado sai agora do facto de Q ser indecidível. □

O conjunto das verdades lógicas do cálculo de predicados puro (ou seja, sem igualdade) também é indecidível. Basta notar que as verdades lógicas do cálculo com igualdade se reduzem às do cálculo sem igualdade via a inclusão dum número finito de axiomas da igualdade. Apesar dos axiomas IG serem em número infinito, eles são consequência formal dum número finito de axiomas caso a linguagem tenha apenas um número finito de símbolos funcionais e relacionais. Basta considerar os axiomas (em número finito) da forma (1), (3), (4), (5) e (6) da secção intitulada "Igualdade".

Pode mesmo mostrar-se que o cálculo de predicados (sem igualdade) com apenas *um* símbolo relacional binário já é indecidível.